

ระเบียบวิธีอย่างง่ายสำหรับการประมาณความถี่ที่อยู่บนหลักการของเฟส

A Simple Phase Based Frequency Estimation Algorithm

ราชู พันธุ์ฉลาด

ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

140 ถ.เชื่อมสัมพันธ์ หนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: rachu@mut.ac.th

Mainuscript received May 25, 2016,

Revised April 30, 2017.

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอระเบียบวิธีอย่างง่ายสำหรับการประมาณค่าความถี่ของสัญญาณรูปคลื่นไซน์เชิงซ้อนในสัญญาณรบกวนขาวเกาส์เซียนเชิงซ้อน ระเบียบวิธีที่นำเสนอได้อาศัยหลักการประมาณค่าความถี่จากสัญญาณความต่างเฟส หลักการที่นำเสนอนอกจากจะให้สมบัติทางสถิติที่ดีแล้วยังสามารถประมาณค่าความถี่ได้อย่างรวดเร็วอีกด้วย นอกจากนี้ยังได้ทำการวิเคราะห์หาค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองเฉลี่ยในรูปสูตรสำเร็จไว้ด้วย ผลจำลองการทำงานสามารถยืนยันถึงสมรรถนะของระเบียบวิธีที่นำเสนอได้เป็นอย่างดี

คำสำคัญ: การประมาณค่าความถี่, สัญญาณความต่างเฟส, ระเบียบวิธีปรับตัวได้

ABSTRACT

This paper presents a new simple phase based algorithm to estimate the frequency of a complex sinusoidal signal in complex white Gaussian noise. The proposed technique makes use of the different phase signal to estimate the unknown constant frequency of the corrupted signal. The proposed algorithm not only yields good statistical properties but also yields fast speed of convergence. Moreover, the steady state analysis for mean squared frequency error (MSE) of the estimated frequency is addressed and derived in closed form. Simulation results can assert the performance of the proposed algorithm.

Keywords: Frequency estimation, Different phase signal, Adaptive algorithm

1. บทนำ

การประมาณค่าความถี่ของสัญญาณรูปคลื่นไซน์เชิงซ้อนในสัญญาณรบกวนขาวเกาส์เซียนเชิงซ้อนมีบทบาทสำคัญมากในงานประยุกต์ทางด้านการประมวลผลสัญญาณดิจิทัล เช่นระบบไฟฟ้ากำลัง การสื่อสารดิจิทัล วิศวกรรมควบคุม ระบบเรดาร์ ระบบโซนาร์ เป็นต้น [1] จากการสืบค้นวรรณกรรมพบว่าจะสามารถแบ่งรูปแบบการประมาณค่าความถี่ออกได้เป็นสองแนวทางคือ การประมาณค่าแบบลำดับ (sequential) และแบบบล็อก (block) การประมาณค่าในรูปแบบแรกนั้นจะทำการประมาณค่าความถี่โดยอาศัยค่าตัวอย่างปัจจุบัน (อินพุต) และในอดีต (อินพุตและ/หรือเอาต์พุต) และส่งค่าความถี่ที่ประมาณได้ออกไปใช้งานแบบตัวอย่างต่อตัวอย่าง (sample by sample) ส่วนในแบบหลังนั้นจะทำการเก็บตัวอย่างอินพุตไว้จำนวน N ค่าหนึ่งโดยที่ $N > 1$ จากนั้นทำการประมาณค่าความถี่จากค่าตัวอย่างที่ถูกเก็บไว้ในคราวเดียว จากรูปแบบทั้งสองจะเห็นว่า ในกรณีที่ความถี่ของสัญญาณแปรตามเวลา การประมาณค่าแบบบล็อกจะไม่เหมาะสมเพราะค่าความถี่ของสัญญาณในบล็อกข้อมูลที่บันทึกไว้ไม่เป็นค่าคงที่ ดังนั้นค่าความถี่ที่ประมาณได้อาจไม่ถูกต้อง ดังนั้นการประมาณค่าแบบลำดับจึงเหมาะสมมากกว่า ส่วนในกรณีที่ค่าความถี่ที่ต้องการประมาณเป็นค่าคง เราสามารถใช้หลักการประมาณได้ทั้งสองแบบ ทั้งนี้ขึ้นกับลักษณะงานประยุกต์นั้น ๆ ตัวอย่างวิธีการประมาณแบบลำดับที่มีการนำเสนอมากมายคือ การประมาณค่าความถี่โดยใช้ตัวกรองความถี่ดิจิทัลนอตช์ [2]-[7] ซึ่งมีข้อดีที่ใช้การคำนวณต่ำและนำไปสู่การปฏิบัติจริง (realization) ง่าย [1] อย่างไรก็ตามตัวกรองชนิดนี้มักค้นหาค่าตอบได้ช้าและมีตัวแปรหลายตัวที่ต้องการปรับแต่งเพื่อให้ได้สมรรถนะตามที่ต้องการ เช่น ค่าแบนด์วิดท์ ค่าขั้นการปรับ (step size) และค่าเริ่มต้น (initial value) ดังนั้นจึงเป็นการยากที่จะได้รับสมรรถนะตามที่ต้องการในทางปฏิบัติ ส่วนตัวอย่างการประมาณค่าในรูปแบบหลังนั้นมีเทคนิคมากมายที่ถูกนำเสนอด้วยตัวอย่างที่ปรากฏใน

เอกสารอ้างอิง [8]-[13] ซึ่งมีเป้าหมายหลักคือต้องการลดค่าขีดเริ่มเปลี่ยนของอัตราส่วนกำลังงานของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (signal to noise ratio (SNR) threshold) และเพื่อให้ได้รับค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยเข้าใกล้ค่าขอบต่ำสุด (lower bound) ของคราเมอร์ (Cramer-Rao Bound: CRB) ที่ SNR เหนือค่าขีดเริ่มเปลี่ยน ซึ่งค่า CRB สำหรับการประมาณค่าความถี่เดียวคือ

$$\sigma_{CR}^2 = \frac{6}{\text{SNR}(N^3 - N)} \quad (1)$$

จากสมการที่ (1) พบว่าตัวประมาณค่าความถี่ที่ดีที่สุด (minimum variance unbiased estimator: MVUE) จะให้ค่า MSE ของค่าความถี่ที่ประมาณได้แปรผกผันกับค่า SNR และจำนวนตัวอย่างที่ได้นั้นก็ยิ่งสูงขึ้นถ้าหากว่า SNR และ/หรือ N มีค่าสูง จะทำให้ค่า MSE ของความถี่ที่ประมาณได้ยิ่งมีค่าต่ำ ในการออกแบบตัวประมาณนั้นเราอาจเลือกใช้วิธีการเพิ่มค่า SNR ให้แก่สัญญาณที่ได้รับหรือไม่ก็เพิ่มค่าตัวอย่าง N เช่นในบทความ [10] ได้ใช้วิธีการเพิ่มค่า SNR ให้แก่สัญญาณที่ได้รับก่อนป้อนให้แก่ตัวประมาณค่าที่ได้ออกแบบไว้ ในส่วนของการประมาณค่าในรูปแบบลำดับนั้นแม้ว่าในปัจจุบันยังไม่มีใครทราบค่าขอบล่างของค่า MSE ในรูปสูตรสำเร็จและสูตรทั่วไป แต่เราอาจใช้สมการที่ (1) เป็นแนวทางในการพัฒนาระเบียบวิธีการประมาณแบบลำดับได้

ดังนั้นในบทความนี้ได้นำเสนอตัวประมาณค่าความถี่แบบลำดับโดยอาศัยแนวคิดของการประมาณค่าแบบบล็อกใน [9] โดยได้นำมาทำงานร่วมกับตัวกรองแถบผ่านและตัวกรองต่ำผ่านเพื่อยกระดับค่า SNR ให้แก่สัญญาณในส่วนต่าง ๆ ของตัวประมาณที่ถูกออกแบบ ซึ่งรายละเอียดจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

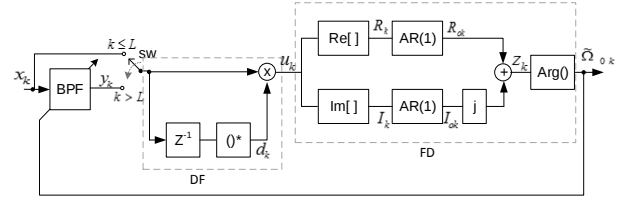
2. ระบบวิธีที่นำเสนอ

หัวข้อนี้กล่าวถึงระบบวิธีที่นำเสนอโดยได้ตั้งชื่อว่า phase based adaptive algorithm (PBAA) โดยมีโครงสร้างดังรูปที่ 1 จากรูป z^{-1} คือตัวประวิงเวลา ($\cdot$)* คือตัวกระทำค่าสังยุค k คือดัชนีเวลา x_k คือสัญญาณอินพุตมีรูปแบบดังนี้

$$x_k = s_k + v_k \quad (2)$$

โดยที่

$$s_k = Ae^{j(\Omega_0 k + \theta)} \quad (3)$$



รูปที่ 1 โครงสร้างของระเบียบวิธี PBAA

คือองค์ประกอบสัญญาณ เมื่อ $A > 0$ และ $\Omega_0 \in (0, \pi)$ คือแอมพลิจูดและความถี่เชิงมุมดิจิทัล ตามลำดับ ซึ่งจะสมมติว่าเป็นค่าคงที่แต่ไม่ทราบค่า ส่วน $\theta \in [0, 2\pi)$ คือเฟสของสัญญาณเป็นตัวแทนรูปแบบสม่ำเสมอ สำหรับ $v_k = v_{rk} + jv_{ik}$ คือองค์ประกอบสัญญาณรบกวนขาวเกาส์เซียนเชิงซ้อน ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบค่าจริงสองตัวคือ v_{rk} และ v_{ik} ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวน (กำลังงาน) เท่ากันแต่ไม่ทราบค่าเป็น $\sigma^2/2$ โดยสมมติว่าองค์ประกอบทั้งสองเป็นอิสระกันทางสถิติ ดังนั้นค่า SNR ของสัญญาณอินพุตจึงมีค่าเป็น $\text{SNR} = A^2/\sigma^2$ ขั้นตอนการทำงานของระเบียบวิธี PBAA ตามรูปที่ 1 สามารถอธิบายได้ดังนี้ จากรูป ระบบถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนหลักคือ BPF DF และ FD โดย BPF (bandpass filter) ทำหน้าที่ยกระดับ SNR ให้แก่สัญญาณอินพุต DF (different phase) ทำหน้าที่สร้างสัญญาณความต่างเฟส และ FD (frequency detector) ทำหน้าที่ตรวจจับความถี่ ในช่วงเริ่มต้นของการทำงาน สัญญาณอินพุต x_k ถูกส่งตรงไปยัง FD เพื่อประเมินค่าความถี่ในเบื้องต้น ซึ่งใช้เวลา $k \leq L$ เมื่อ L เป็นจำนวนเต็มบวก ต่อมาเมื่อ $k > L$ FD จะส่งค่าความถี่ที่ประมาณได้ในขั้นแรกให้แก่ตัวกรองแถบผ่านพร้อมกันนั้นสวิตช์ sw จะถูกสลับไปที่เอาต์พุตของตัวกรองแถบผ่านและจะอยู่ในสภาวะนี้ไปตลอดการทำงาน จากนั้น y_k จึงถูกส่งไปยัง DF และ FD เพื่อประมาณค่าความถี่ต่อไป การประมาณค่าความถี่ในขั้นแรกนั้นมีความสำคัญเพราะหากระบบสามารถประมาณค่าความถี่ในเบื้องต้นได้ใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริง ตัวประมาณจะสามารถค้นหาคำตอบได้รวดเร็วและตัวกรองแถบผ่านก็จะสามารถยกระดับค่า SNR ของสัญญาณอินพุต ความถี่ที่ต้องการได้ถูกต้องตามเป้าหมาย ซึ่งจะส่งผลให้ระบบในส่วนถัดไปสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพ ในทางกลับกันหากการประมาณค่าความถี่ในเบื้องต้นมีความคลาดเคลื่อนไปจากค่าความถี่ที่แท้จริงของสัญญาณอินพุต ความสามารถในการประมาณค่าความถี่ของระบบที่นำเสนอ ก็จะลดลงเป็นอย่างมากด้วย อย่างไรก็ตามจากการทดลองพบว่า หากกำหนดให้ L มีค่ามากพอ ปัญหาดังกล่าวก็จะแทบจะไม่เกิดขึ้นเลย สำหรับตัวกรองแถบผ่านที่นำมาใช้นั้นมีรูปแบบดังสมการ

$$H_{BP}(z) = G \frac{1 + e^{j\tilde{\Omega}_0} z^{-1}}{1 - \rho e^{j\tilde{\Omega}_0} z^{-1}}, \quad G = (1 - \rho) / 2 \quad (4)$$

โดยที่ $\tilde{\Omega}_0$ คือค่าความถี่กลางที่จะถูกปรับ $0 < \rho < 1$ ใช้สำหรับปรับค่าแบนด์วิดท์ของตัวกรองโดยที่ ρ ยิ่งมาก แบนด์วิดท์จะยิ่งแคบ และ G คือค่าคงที่ที่ใช้เพื่อปรับอัตราขยาย ณ ความถี่กลางให้มีค่าเป็นหนึ่ง กำหนดให้ y_k คือสัญญาณเอาต์พุตของตัวกรองแถบผ่านซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบนี้

$$y_k = s_{ok} + v_{ok} \quad (5)$$

โดยที่ s_{ok} คือองค์ประกอบของสัญญาณอันเนื่องมาจากสัญญาณ s_k ส่วน v_{ok} คือองค์ประกอบของสัญญาณรบกวนอันเนื่องมาจากสัญญาณ v_k ค่ากำลังงานขององค์ประกอบทั้งสองที่ $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0$ มีค่าตามลำดับดังนี้

$$P_{so} = A^2 |H_{BP}(e^{j\Omega_0})|^2 = A^2 \quad (6)$$

โดยที่

$$|H_{BP}(e^{j\Omega})|^2 = G^2 \frac{2 + 2 \cos(\Omega_0 - \Omega)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\Omega_0 - \Omega)} \quad (7)$$

และ

$$\begin{aligned} P_{vo} &= \frac{\sigma^2 G^2}{2\pi} \oint H_{BP}(z) H^*(z^{-1}) z^{-1} dz \\ &= \frac{1 - \rho}{2} \sigma^2 \end{aligned} \quad (8)$$

โดยที่สัญลักษณ์ดอกจัน * แทนการสังยุคเชิงซ้อน ดังนั้นค่า SNR ที่เอาต์พุตของตัวกรองแถบผ่านคือ

$$\text{SNR}_y = \frac{2}{1 - \rho} \frac{A^2}{\sigma^2} = \frac{2}{1 - \rho} \text{SNR} \quad (9)$$

จากสมการที่ (9) พบว่าที่ $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0$ ตัวกรองแถบผ่านสามารถยกระดับค่า SNR ได้ $2/(1 - \rho)$ เท่าของ SNR อินพุต ดังนั้นหากการประเมินค่าความถี่ในช่วง $k \leq L$ ทำได้อย่างถูกต้อง สัญญาณ y_k ก็จะมีค่า SNR ตามสมการที่ (9) ดังนั้นพบว่าถ้ากำหนดให้ ρ มีค่ามาก จะส่งผลให้ SNR_y มีค่าสูงตามไปด้วย ขั้นตอนต่อไปจะอาศัยแนวคิดการประมาณค่าความถี่แบบบล็อก [9] ที่ใช้ประโยชน์จากสัญญาณความต่างเฟส จากรูปเราได้สัญญาณความต่างเฟสชั่วคราว u_k ดังนี้

$$u_k = y_k d_k \approx s_{ok} s_{ok-1}^* + v_{ok} v_{ok-1}^* = A e^{j\Omega_0} + w_k \quad (10)$$

โดยที่ d_k คือสัญญาณ y_k ที่ถูกประวิงเวลาไปหนึ่งหน่วยและถูกทำสังยุค และ

$$w_k = v_{ok} v_{ok-1}^* \quad (11)$$

เป็นสัญญาณรบกวนเกาส์เซียนเชิงซ้อนแบนด์วิดท์จำกัด (band limited complex Gaussian noise) มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีค่าความแปรปรวนหรือกำลังงานโดยประมาณเป็น

$$P_w = P_{vo}^2 = \left(\frac{1 - \rho}{2} \right)^2 \sigma^4 \quad (12)$$

ดังนั้นค่า SNR ของสัญญาณความต่างเฟส u_k คือ

$$\text{SNR}_u = \frac{A^4}{\left(\frac{1 - \rho}{2} \right)^2 \sigma^4} = \text{SNR}_y^2 \quad (13)$$

อนึ่ง การได้มาซึ่งสมการที่ (10) ได้ตั้งอยู่บนสมมติฐานสองข้อคือ 1) ความถี่กลางของตัวกรองแถบผ่านมีค่าเท่ากับค่าความถี่ของสัญญาณอินพุต $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0$ ซึ่งทำให้องค์ประกอบสัญญาณอินพุตกับเอาต์พุตของตัวกรองมีค่าเท่ากัน 2) องค์ประกอบ s_{ok} กับ v_{ok-1}^* และ s_{ok-1}^* กับ v_{ok} ไม่มีความสัมพันธ์กันทางสถิติ จึงสามารถละเลยได้ ขั้นตอนต่อไปเราจะแยกส่วนจริงกับจินตภาพของสัญญาณความต่างเฟส u_k ออกจากกันดังนี้

$$R_k = \text{Re}[u_k] = A^2 \cos \Omega_0 + w_{rk} \quad (14)$$

$$I_k = \text{Im}[u_k] = A^2 \sin \Omega_0 + w_{ik} \quad (15)$$

เมื่อ $\text{Re}[\cdot]$ กับ $\text{Im}[\cdot]$ คือส่วนจริงและจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนตามลำดับ และ $w_{rk} = \text{Re}[w_k]$ กับ $w_{ik} = \text{Im}[w_k]$ คือส่วนจริงและจินตภาพของสัญญาณรบกวนเชิงซ้อนเกาส์เซียนแบนด์วิดท์จำกัด w_k ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนเท่ากันเท่ากับ $P_w/2$ เพื่อลดผลกระทบจากองค์ประกอบสัญญาณรบกวนในสมการที่ (14) และ (15) และเนื่องจาก R_k กับ I_k เป็นค่าจริง เราจึงได้นำตัวกรองผ่านต่ำค่าจริง IIR อันดับหนึ่งหรือเรียกในชื่อเฉพาะว่ากระบวนการ AR(1) (Auto Regressive (AR) process) มาใช้ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$F(z) = \frac{a}{1 - (1-a)z^{-1}} \quad (16)$$

โดยที่ $0 < a < 1$ เป็นค่าคงที่น้อยๆ กำหนดให้ R_{ok} กับ I_{ok} คือเอาต์พุตของกระบวนการ AR(1) อันเนื่องมาจาก R_k กับ I_k ตามลำดับ เราสามารถคำนวณหาค่าความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังงานของ R_{ok} กับ I_{ok} ได้ตามลำดับดังนี้

$$S_R = A^4 \cos^2 \Omega_0 |F(0)|^2 + \frac{P_w}{2} \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) F(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (17)$$

$$= A^4 \cos^2 \Omega_0 + \frac{P_w}{2} \frac{a}{2-a}$$

$$S_I = A^4 \cos^2 \Omega_0 |F(0)|^2 + \frac{P_w}{2} \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) F(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (18)$$

$$= A^4 \sin^2 \Omega_0 + \frac{P_w}{2} \frac{a}{2-a}$$

เมื่อ $|F(0)| = 1$ คือผลตอบสนองทางขนาดที่ความถี่ศูนย์ของ AR(1) จากนั้นเมื่อรวมองค์ประกอบ R_{ok} กับ I_{ok} เข้าด้วยกันเราจะได้สัญญาณเชิงซ้อนกลับคืนมาคือ

$$z_k = R_{ok} + jI_{ok} = A^2 e^{j\Omega_0} + w_{ok} \quad (19)$$

เมื่อ w_{ok} คือสัญญาณรบกวนเกาส์เซียนเชิงซ้อนแบนด์วิดท์จำกัดที่เอาต์พุตของกระบวนการ AR(1) อันเนื่องมาจาก w_k ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และกำลังงานเป็น

$$P_{wo} = \frac{a}{2-a} P_w \quad (20)$$

สุดท้ายเราจะได้อัตรา SNR ของสัญญาณ z_k ที่ต้องการประมาณค่าความถี่คือ

$$\text{SNR}_z = \frac{A^4}{P_{wo}} = \frac{4}{(1-\rho)^2} \frac{2-a}{a} \text{SNR}^2 \quad (21)$$

จากสมการที่ (21) พบว่า เราสามารถเพิ่มค่า SNR ให้แก่ z_k ได้โดยการปรับเพิ่มค่า ρ และปรับลดค่า a แม้ว่าค่า SNR อินพุตจะมีค่าต่ำก็ตาม ในกรณีพิเศษเมื่อกำหนดให้ $\rho \rightarrow 1$ และ $a \rightarrow 0$ เราจะพบว่า $\text{SNR}_z \rightarrow \infty$ และเมื่ออาศัยแนวความคิดใน [8] เราสามารถประมาณค่าสัญญาณ z_k ในสมการที่ (19) ได้ว่า

$$z_k \approx A^2 e^{j(\Omega_0 + n_k)}, \text{SNR}_z \gg 1 \quad (22)$$

โดยที่ n_k จะถูกมองว่าเป็นค่าสัญญาณรบกวนเฟส (phase noise) ของสัญญาณ z_k ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และกำลังงานโดยประมาณเป็น [8]

$$P_n \approx \frac{1}{2\text{SNR}_z} = \frac{a(1-\rho)^2}{8(2-a)} \frac{1}{\text{SNR}^2} \quad (23)$$

สุดท้ายเราจะประมาณค่าความถี่ของสัญญาณอินพุตจากสัญญาณ z_k โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\hat{\Omega}_{ok} = \arg(z_k) = \Omega_0 + n_k \quad (24)$$

เมื่อ $\arg(\cdot)$ คือตัวคำนวณเฟสของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งอาจใช้วิธีแทนเจนต์ผกผัน (inverse tangent) หรือวิธีอื่น ๆ ก็ได้ (ดูรูปที่ 1 ประกอบ) และเนื่องจาก Ω_0 เป็นค่าคงที่ ดังนั้นความแปรปรวนของ $\hat{\Omega}_{ok}$ จึงมีค่าเท่ากับความแปรปรวนของ n_k ดังนั้น

$$\sigma_{\hat{\Omega}_{ok}}^2 = \frac{a(1-\rho)^2}{8(2-a)} \frac{1}{\text{SNR}^2} \quad (25)$$

โดยทั่วไปค่า MSE ของความถี่ที่ประมาณได้จะอยู่ในรูปของ

$MSE = \sigma_{\Omega_{0k}}^2 + bias^2$ แต่จากสมการที่ (24) เราพบว่า

$bias = 0$ ดังนั้น

$$MSE = \sigma_{\Omega_{0k}}^2 \quad (26)$$

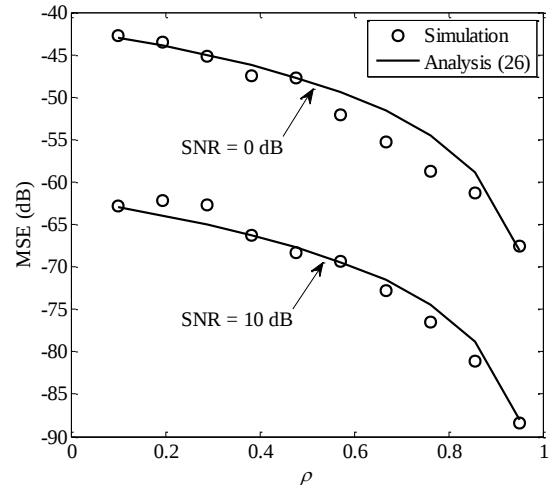
จากสมการที่ (26) พบว่าค่า MSE ของตัวประมาณที่นำเสนอไม่ขึ้นกับความถี่ของสัญญาณอินพุต ดังนั้นหากเราพอที่จะประเมินค่า SNR อินพุตได้เราก็สามารถกำหนดค่า MSE ได้ตามต้องการด้วยการเลือกค่า ρ และ a ที่เหมาะสมให้แก่ตัวประมาณ เพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎีที่ได้กล่าวมา เราจะนำผลที่วิเคราะห์ได้ไปเปรียบเทียบกับผลจำลองการทำงานด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อถัดไป

3. ผลจำลองการทำงาน

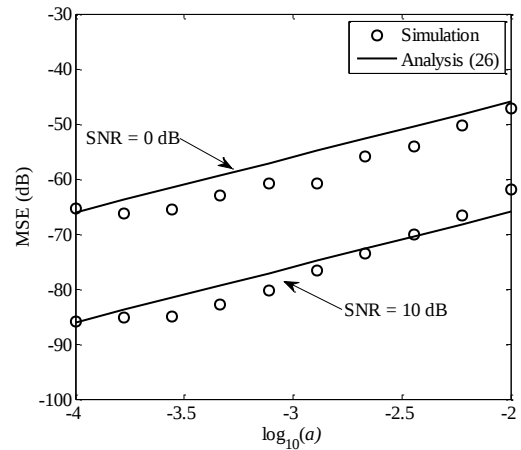
ในหัวข้อนี้ได้จำลองการทำงานของระเบียบวิธี PBAA ที่นำเสนอเพื่อยืนยันความถูกต้องของผลที่ได้จากวิเคราะห์ทางทฤษฎี โดยในเริ่มแรกเราจะดูผลกระทบของ ρ a SNR และ Ω_0 ที่มีต่อค่า MSE ของความถี่ที่ประมาณได้ในสมการที่ (26) จากนั้นเราได้ทำการเปรียบเทียบสมรรถนะของระเบียบวิธี PBAA กับระเบียบวิธีบางแบบในอดีตที่ถูกนำเสนอมาก่อนหน้า

3.1 ผลกระทบจาก ρ และ a ต่อค่า MSE

ในหัวข้อนี้เราจะดูผลกระทบของ ρ และ a ที่มีต่อค่า MSE ของความถี่ที่ประมาณได้ โดยกำหนดตัวแปรให้แก่สัญญาณอินพุต ดังนี้ $SNR = 0$ dB และ 10 dB $\Omega_0 = 0.1\pi$ $\theta \in [0, 2\pi)$ ความยาวสัญญาณเป็น 10^4 ตัวอย่าง $L = 10$ ที่ตัวกรองแถบผ่านได้ปรับค่า $\rho \in [0.1, 0.98]$ ที่ AR(1) ได้กำหนดให้ $a = 10^{-3}$ และให้ตัวประมาณทำงานซ้ำจำนวน 100 รอบ ในแต่ละรอบ สัญญาณแบบสุ่มเฟสจะถูกนำไปรวมกับสัญญาณรบกวนที่เป็นอิสระกันแต่มีค่าความแปรปรวนเท่ากัน สุดท้ายนำค่าความถี่ที่ประมาณได้ในแต่ละรอบไปประเมินค่า MSE โดยใช้การเฉลี่ยแบบบองแซมเบิล (ensemble average) สำหรับผลกระทบของ ρ ต่อ MSE แสดงดังรูปที่ 2 จากรูปจะเห็นว่า เมื่อค่า ρ มีค่าเพิ่มขึ้น จะส่งผลทำให้ค่า MSE ของตัว



รูปที่ 2 ผลกระทบจากค่า ρ ต่อค่า MSE ของตัวประมาณ PBAA ที่ค่า SNR 0 dB และ 10 dB



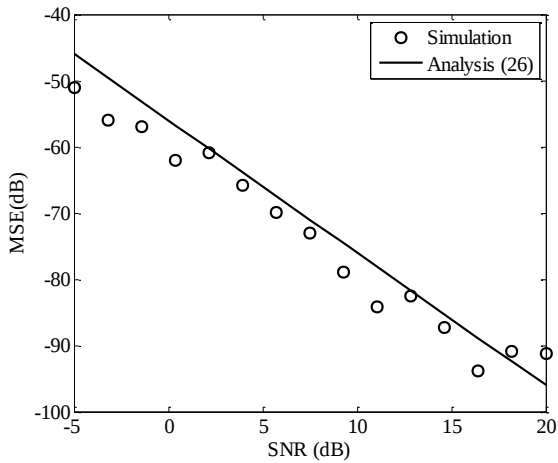
รูปที่ 3 ผลกระทบจากค่า a ต่อค่า MSE ของตัวประมาณ PBAA ที่ค่า SNR 0 dB และ 10 dB

ประมาณมีค่าลดลงอย่างมีนัย และยังสามารถเห็นว่า ค่าที่วิเคราะห์ได้

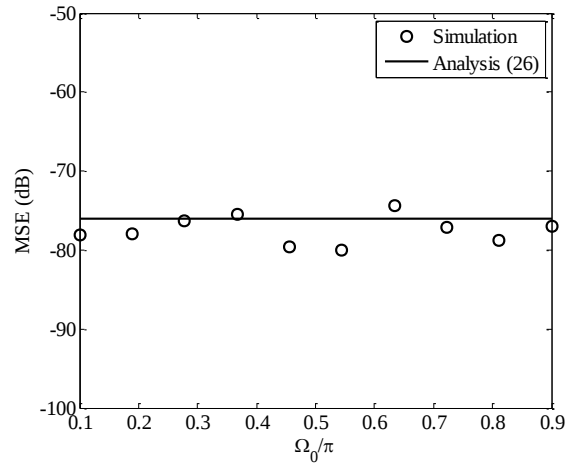
กับการจำลองการทำงานใกล้เคียงกันและเป็นไปในทิศทางเดียวกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ค่า SNR ต่ำ ผลการวิเคราะห์ก็ยังคงทำนายผลจำลองการทำงานได้ใกล้เคียงกัน นั่นหมายความว่า สมการที่ (26) สามารถยอมรับได้ทั้งในกรณีที่ SNR ต่ำและสูง ส่วนผลกระทบจาก α ต่อค่า MSE แสดงดังรูปที่ 3 ซึ่งการทดลองนี้ได้ทำการแปรค่า $\alpha \in [10^{-4}, 10^{-2}]$ ส่วน $\rho = 0.8$ ส่วนตัวแปรอื่นยังคงเดิม จากรูปพบว่า เมื่อลดค่า α จะส่งผลให้ MSE มีค่าลดลงด้วย แม้ว่าในช่วงค่าที่ได้จากจำลองการทำงานอาจแตกต่างจากผลการวิเคราะห์บ้างแต่ผลทั้งสองนั้นมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน

3.2 ผลกระทบของ SNR และ Ω_0 ต่อ MSE

ในหัวข้อนี้เราจะดูผลกระทบของ SNR และ Ω_0 ที่มีต่อค่า MSE ของตัวประมาณที่นำเสนอ โดยตัวแปรส่วนใหญ่ที่ใช้ในการทดลองมีค่าเหมือนกับการทดลองก่อนหน้านี้ ผลการทดลองในรูปที่ 4 แสดงค่า MSE ต่อค่า SNR ในช่วง -5 dB ถึง 20 dB ที่ค่า $\rho = 0.8$ และ $\alpha = 10^{-3}$ จากรูปเห็นว่าผลวิเคราะห์สามารถทำนายผลจำลองการทำงานได้ค่อนข้างดีและพบว่าค่า MSE จะมีค่าลดลงเมื่อ SNR มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ส่วนผลการทดลองในรูปที่ 5 แสดงค่า MSE เทียบกับความถี่อื่น ๆ ซึ่งพบว่าค่า MSE ไม่ขึ้นกับความถี่ ซึ่งสอดคล้องกับผลวิเคราะห์ในทางทฤษฎี



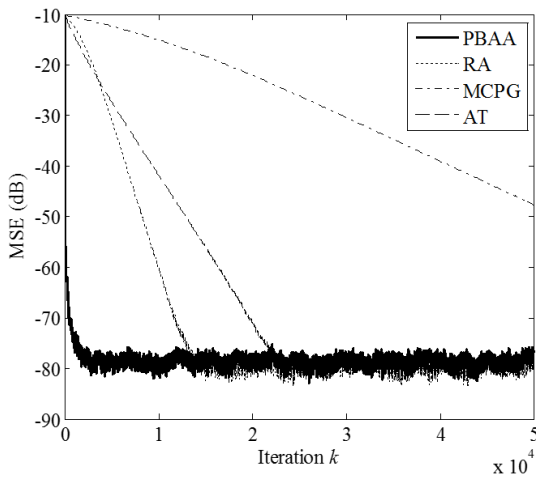
รูปที่ 4 ค่า MSE ต่อค่า SNR อื่นๆของตัวประมาณ PBAA สำหรับ $\Omega_0 = 0.1\pi$ $\rho = 0.8$ และ $\alpha = 10^{-3}$



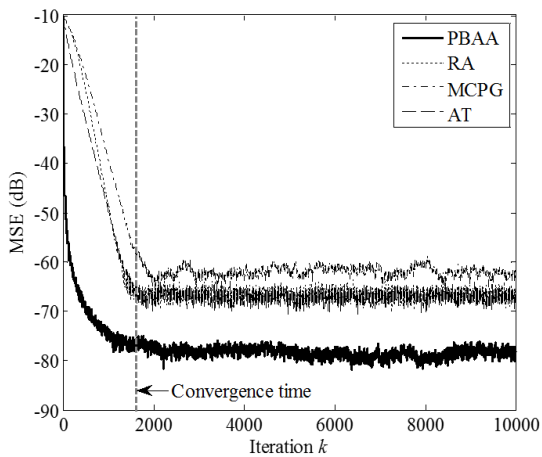
รูปที่ 5 ค่า MSE ต่อค่าความถี่อื่น ๆ ของตัวประมาณ PBAA สำหรับ SNR = 10 dB $\rho = 0.8$ $\alpha = 10^{-3}$

3.3 ผลการประมาณค่าความถี่

หัวข้อนี้จะแสดงความสามารถในการประมาณค่าความถี่ที่แต่ไม่ทราบค่าของสัญญาณรูปคลื่นไซน์เชิงซ้อนที่ถูกรบกวนโดยสัญญาณรบกวนขาวเกาส์เซียนเชิงซ้อนของระเบียบวิธีที่นำเสนอโดยจะเปรียบเทียบกับระเบียบในอดีตที่สนใจซึ่งถูกนำเสนอมาก่อนหน้าอันประกอบด้วยระเบียบวิธี RA [3] MCPG [4] และ AT [7] ตามลำดับ เพื่อให้การเปรียบเทียบมีความยุติธรรม เราจะออกแบบการเปรียบเทียบเป็นสองแบบ แบบแรกจะพยายามปรับให้ทุกระเบียบวิธีรู้ค่าคำตอบที่เวลาเท่ากันหรือใกล้เคียงกันมากที่สุด จากนั้นจะดูค่า MSE ของแต่ละระบบ แบบที่สองจะพยายามปรับให้ทุกระบบมีค่า MSE เท่ากันหรือใกล้เคียงกันมากที่สุดและจะดูเวลาที่ใช้ในการรู้ค่าคำตอบ ระเบียบวิธีใดที่ให้ค่า MSE ต่ำพร้อมทั้งใช้เวลาในการค้นหาคำตอบน้อยจะถือว่าเป็นระบบที่ดีที่สุด ระเบียบวิธีในอดีตที่เราให้ความสนใจทั้งสามนั้นใช้ตัวกรองความถี่แบบนอตซ์เชิงซ้อนทำงานร่วมกับระเบียบวิธีแบบปรับตัวได้ (adaptive algorithm) ระเบียบวิธีทั้งสามจะมีตัวแปรที่สำคัญสองตัวคือ ρ และ μ ตัวแปรแรกจะเป็นตัวกำหนดแบนด์วิดท์ของตัวกรองนอตซ์ (เป็นตัวแปรเดียวกับของตัวกรองแถบผ่านที่ใช้ในระเบียบวิธี PBAA) ส่วนตัวแปรหลังจะทำหน้าที่ควบคุมการใช้เวลาในการค้นหาคำตอบ และควบคุมค่า MSE ให้ได้ค่าตามที่ต้องการ ดังนั้นในการจำลองการทำงานนั้นค่า ρ จึงถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.8 ตลอดการทดลอง ส่วนค่า μ



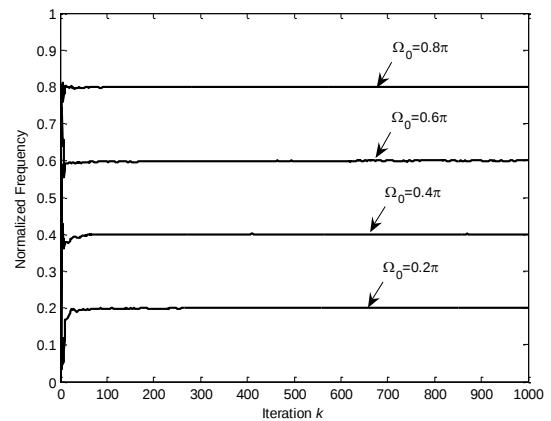
รูปที่ 6 เปรียบเทียบการใช้เวลาในการค้นหาคำตอบของระเบียบวิธีต่าง ๆ ที่ให้ค่า MSE เท่ากันสำหรับ $SNR = 10 \text{ dB}$ $\Omega_0 = 0.1\pi$ $\rho = 0.8$ $a = 10^{-3}$ $\mu_{RA} = 2.5 \times 10^{-5}$ $\mu_{MCPG} = 1 \times 10^{-5}$ $\mu_{AT} = 2 \times 10^{-4}$ และทำซ้ำ 100 รอบ



รูปที่ 7 เปรียบเทียบค่า MSE ของระเบียบวิธีต่าง ๆ เมื่อใช้เวลาค้นหาคำตอบเท่ากันสำหรับ $SNR = 10 \text{ dB}$ $\Omega_0 = 0.1\pi$ $\rho = 0.8$ $a = 10^{-3}$ $\mu_{RA} = 2.5 \times 10^{-5}$ $\mu_{MCPG} = 1 \times 10^{-5}$ $\mu_{AT} = 2 \times 10^{-4}$ และทำซ้ำ 100 รอบ

ของแต่ละระเบียบวิธีจะถูกปรับอย่างอิสระกันเพื่อให้ได้ค่า MSE และอัตราลู่เข้าของระเบียบวิธีต่าง ๆ มีค่าเท่ากัน ผลการเปรียบเทียบในรูปที่ 6 พบว่า ที่ค่า MSE เท่ากัน ระเบียบวิธีที่นำเสนอ PBAA ใช้เวลาในการค้นหาคำตอบน้อยกว่าระเบียบวิธีที่นำมาเปรียบเทียบ ระเบียบวิธี MCPG ลู่เข้าช้าที่สุด ส่วน RA จะลู่เข้าเร็วกว่า AT ผล

การเปรียบเทียบนี้แสดงให้เห็นว่า PBAA มีสมรรถนะในด้านการลู่เข้าที่เหนือกว่าระเบียบวิธีที่ถูกนำมาเปรียบเทียบ สำหรับผลการเปรียบเทียบในรูปที่ 7 เราพบว่า ที่อัตราการลู่เข้าเท่ากัน ระเบียบวิธี PBAA จะให้ค่า MSE ต่ำสุด ระเบียบวิธี MCPG จะให้ค่า MSE สูงสุด ส่วน RA กับ AT จะให้ค่า MSE ใกล้เคียงกัน ดังนั้นระเบียบวิธีที่นำเสนอจึงมีสมรรถนะที่ดีกว่าระเบียบวิธีที่นำมาเปรียบเทียบทั้งสามแบบ สุดท้ายในรูปที่ 8 แสดงความสามารถในการประมาณค่าความถี่ Ω_0 ในช่วง 0 ถึง π ของระเบียบวิธีที่นำเสนอ PBAA โดยกำหนดให้ $\Omega_0 = [0.2\pi, 0.4\pi, 0.6\pi, 0.8\pi]$ $SNR = 0 \text{ dB}$ $\rho = 0.8$ $a = 10^{-3}$ และ $L = 10$ จากรูปจะพบว่าระเบียบวิธีที่นำเสนอสามารถค้นหาค่าความถี่ได้เร็วเกือบเท่ากันทุกความถี่ที่กำหนดไว้



รูปที่ 8 ความสามารถในการประมาณค่าความถี่คงที่ของระเบียบวิธี PBAA ที่ค่า $SNR = 0 \text{ dB}$ $L = 10$ $\rho = 0.8$ $a = 10^{-3}$

4 สรุป

บทความนี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีการประมาณค่าความถี่ที่อยู่บนหลักการของเฟส จากการที่ได้นำตัวกรองแถบผ่านและตัวกรองผ่านต่ำมาใช้ระบบ ทำให้ค่า SNR ของสัญญาณที่ต้องการประมาณค่าความถี่ถูกยกกระดืบ ซึ่งได้ส่งผลให้ผลการประมาณค่าความถี่มีความเที่ยงตรงสูงขึ้น นอกจากนี้ ระเบียบวิธีที่นำเสนอยังสามารถค้นหาคำตอบได้อย่างรวดเร็วอีกด้วย อนึ่ง ค่าคลาดเคลื่อนระหว่างผลทางทฤษฎีและผลจำลองการทำงานที่พบในรูปที่ 2 ถึง 5 นั้นเกิดจากการตั้งสมมติฐานต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาก่อนหน้า ซึ่งหากไม่ได้ตั้งสมมติฐานดังกล่าว การวิเคราะห์ก็จะเป็นการดำเนินการต่อไปได้ อย่างไรก็ตาม การค้นหาวิธีวิเคราะห์และการค้นหามมติฐานใหม่ยังคงเป็นหัวข้อวิจัยที่ท้าทาย และจะนำเสนอในอนาคตต่อไป ทั้งนี้เพื่อให้ได้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับผลการทดลองมากที่สุด

เอกสารอ้างอิง

- [1] Kay SM. Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory, Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall; 1993.
- [2] Nishimura S., Jiang HY., 'Gradient-based complex adaptive IIR notch filters for frequency estimation,' In: Proceedings of IEEE APCCAS. 1996.
- [3] Regalia PA., 'A complex adaptive notch filter,' IEEE Signal Process Lett., vol. 17, no. 11, pp. 937-940, 2010.
- [4] Nosan A., Punchalard R., 'A complex adaptive notch filter using modified gradient algorithm,' Signal Processing, vol. 92, no. 6, pp. 1508-1514, June 2012.
- [5] Punchalard R., Wardkein P., 'Linear prediction based adaptive algorithm for a complex sinusoidal frequency estimation,' Int J Electron Commun (AEU), vol. 37, no. 6, pp. 521-527, June 2012.
- [6] Punchalard R., 'Steady-state analysis of a complex adaptive notch filter using modified gradient algorithm,' Int J Electron Commun (AEU), vol. 68, no. 11, pp. 1112-1118, November 2014.
- [7] Punchalard R., 'Arctangent based adaptive algorithm for a complex IIR notch filter for frequency estimation and tracking,' Signal Processing, vol. 94, pp. 535-544, January 2014.
- [8] Tretter SA., 'Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression,' IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-31, no. 6, pp. 832-835, November 1985.
- [9] Kay S. A., 'Fast and accurate single frequency estimator,' IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Process., vol. 37, no. 12, pp 1987-1989, December 1989.
- [10] Kim D., Narasimha JM., Cox CD., 'An improved single frequency estimator,' IEEE Signal Process Lett., vol. 3, no. 7, pp. 212-214, July 1996.
- [11] Brown T., Wang MM., 'An iterative algorithm for single-frequency estimation,' IEEE Trans. Signal Process., vol. 50, no. 1, pp. 2671-2682, November 2002.
- [12] So HC., Chan WK., 'A generalized weighted linear predictor frequency estimation approach for a complex sinusoid,' IEEE Trans. Signal Process., vol. 54, no. 4, pp. 1304-13015, April 2006.
- [13] Zhou Z., So HC., 'Linear prediction approach to oversampling parameter estimation for multiple complex sinusoids,' Signal Processing, vol. 92, no. 6, pp. 1458-1466, June 2012.



ราชู พันธุ์ฉลาด สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอก สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ในปี 2550 ปัจจุบันทำงานเป็นอาจารย์ประจำ ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์สังกัด ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร หัวหน้างานวิจัยที่สนใจได้แก่ การประมวลผลสัญญาณแอนะล็อกและดิจิทัล ทฤษฎีข่าวสาร การสื่อสารแอนะล็อกและดิจิทัล