

ระเบียบวิธีแบบปรับตัวเพื่อการประมาณค่าความถี่

Adaptive Algorithm for Frequency Estimation

ราชู พันธุ์ฉลาด

ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

140 ถ.เชื่อมสัมพันธ์ หนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: rachu@mut.ac.th

Manuscript received June 1, 2016,

Revised November 28, 2016.

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอระเบียบวิธีปรับตัวได้สำหรับการประมาณค่าความถี่ของสัญญาณรูปคลื่นไซน์เชิงซ้อนในสัญญาณรบกวนขาวเกาส์เซียนแบบบวกเชิงซ้อน วิธีที่นำเสนอได้ใช้สัญญาณความต่างเฟสเป็นเกณฑ์ในการปรับหาความถี่ของสัญญาณอินพุตงานชิ้นนี้ยังได้วิเคราะห์หาค่าไบอัสและค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยไว้ในรูปสูตรสำเร็จไว้ด้วย ผลจำลองการทำงานสามารถยืนยันถึงสมรรถนะของวิธีที่นำเสนอ

คำสำคัญ: การประมาณค่าความถี่, ระเบียบวิธีปรับตัวได้

ABSTRACT

This paper presents an adaptive algorithm for estimating an unknown frequency of a complex sinusoidal signal corrupted by a complex additive white Gaussian noise. The proposed method utilizes the different phase signal to be a criterion of adapting and finding the input frequency. Moreover, performance analysis of the proposed algorithm in terms of bias and mean square error (MSE) is investigated. Computer simulations can assert the performance of the proposed method.

Keywords: Frequency estimation, Adaptive algorithm

1. บทนำ

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของสัญญาณรูปคลื่นไซน์มีบทบาทสำคัญในงานประยุกต์ด้านการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลเช่น อคูสติก อิเล็กทรอนิกส์ทางการแพทย์ วิศวกรรมควบคุม เรดาร์ โซนา ระบบสื่อสารดิจิทัล ระบบไฟฟ้ากำลัง และอื่นๆ [1] วิธีที่เหมาะสม (optimum method) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีคือตัวประมาณแบบ maximum likelihood estimator (MLE) [2] ซึ่งให้ค่าความแปรปรวนของความถี่ที่ประมาณได้เข้าใกล้ค่าขอบล่างของคราเมอร์-ราโอ (Cramer-Rao lower bound) ที่ค่าอัตราส่วนกำลังงานของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (signal to noise ratio: SNR) มีค่ามากพอ แต่เนื่องจาก MLE ต้องใช้ FFT ในการสร้าง จึงมีความซับซ้อนในการคำนวณมากซึ่งไม่เหมาะกับงานประยุกต์บางประเภทด้วยเหตุนี้ระเบียบวิธีที่อยู่บนพื้นฐานของเฟสจึงได้ถูกเสนอ [3]-[4] ซึ่งมีความซับซ้อนในการคำนวณต่ำกว่าแต่ให้สมรรถนะที่ด้อยกว่า MLE นอกจากนี้วิธีที่ได้กล่าวถึงแล้วยังมีวิธีอื่น ๆ อีกมากมายที่ถูกนำเสนอซึ่งไม่อาจกล่าวได้ถ้วนในบทความนี้ หลักการประมาณค่าใน [2]-[4] ต้องอาศัยการประมวลผลแบบแบตช์ (batch processing) โดยการประมวลผลจะเริ่มขึ้นภายหลังจากการเก็บค่าตัวอย่าง (samples) ของสัญญาณที่ต้องการมาได้จำนวนหนึ่ง ด้วยกับหลักการดังกล่าว ยังทำให้ระเบียบวิธีใน [2] - [4] ยังมีความซับซ้อนอยู่ เพื่อลดความซับซ้อนนี้ หลักการประมาณค่าในแบบ ตัวอย่าง-ต่อ-ตัวอย่าง (sample-by-sample operation) จึงถูกนำเสนอเช่น เฟสล็อกลูป (phase locked loop: PLL) [5] และระเบียบวิธีแบบ

ปรับตัวบนพื้นฐานของการทำนายเชิงเส้นหรือเรียกในชื่อเฉพาะว่า complex direct frequency estimation: CDFE [6] นอกจากนี้เทคนิคการประมาณค่าแบบ ตัวอย่าง-ต่อ-ตัวอย่าง ยังสามารถใช้ได้กับสัญญาณสุมแบบไม่นิ่ง (nonstationary) ได้ด้วย

บทความนี้นำเสนอระเบียบวิธีแบบปรับตัวอย่างง่ายสำหรับการประมาณค่าความถี่ในแบบ ตัวอย่าง-ต่อ-ตัวอย่าง ระเบียบวิธีที่นำเสนอจะมีความคล้ายคลึงและมีสมรรถนะเทียบเท่ากับระเบียบวิธี CDFE แต่รูปสมการและการวิเคราะห์สมรรถนะทำได้ง่ายกว่า และแม้ว่าระเบียบวิธีที่นำเสนอไม่ได้มีการกล่าวถึงใน [7] แต่เป็นการกล่าวในลักษณะพาดพิงเท่านั้นและเมื่อได้ทำการสืบค้นวรรณกรรมก็ยังไม่พบว่ามีถูกนำเสนอมาก่อนหน้า

2. ระเบียบวิธีการที่นำเสนอ

ระเบียบวิธีที่นำเสนอแสดงดังรูปที่ 1 โดยกำหนดให้สัญญาณอินพุตมีค่าดังสมการ

$$x_k = u_k + n_k, k = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty \quad (1)$$

โดยที่

$$u_k = Ae^{j(\Omega_0 k + \theta)} \quad (2)$$

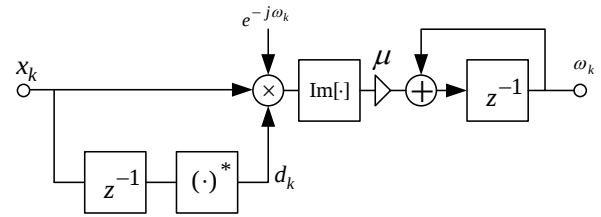
คือสัญญาณรูปคลื่นไซน์เชิงซ้อน เมื่อ $A > 0$ และ $0 < \Omega_0 < \pi$ คือแอมพลิจูดและความถี่ของสัญญาณตามลำดับ ซึ่งจะสมมติว่าเป็นค่าคงที่ไม่ทราบค่า ส่วน $0 \leq \theta < 2\pi$ คือเฟสจะสมมติว่าเป็นตัวแปรสุ่มแบบสม่ำเสมอ L คือความยาวสัญญาณ และ $n_k = n_{rk} + jn_{ik}$ คือสัญญาณกวนขาวเกาส์เซียนแบบบวกเชิงซ้อนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ส่วน n_{rk} และ n_{ik} คือกระบวนการค่าจริง (real processes) ที่เป็นอิสระกัน มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนเท่ากันเป็น $\sigma^2/2$ อัตราส่วนกำลังงานของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนจะมีค่าเป็น $\text{SNR} = A^2/\sigma^2$ ก่อนที่จะกล่าวถึงระเบียบวิธีประมาณค่าความถี่ Ω_0 ที่นำเสนอ เราจะพิจารณาระเบียบวิธีปรับความถี่ทั่วไปดังสมการ

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \mu f_k(\delta_k) \quad (3)$$

เมื่อ $0 < \omega_k < \pi$ คือตัวแปรความถี่ที่ถูกปรับ $\mu > 0$ คือขั้นการปรับ $\delta_k = \Omega_0 - \omega_k$ ค่าความถี่คลาดเคลื่อนจากการประมาณชั่วขณะ และ $f_k(\delta_k)$ คือฟังก์ชันค่าจริงชั่วขณะมีค่าขึ้นกับค่าความถี่คลาดเคลื่อน δ_k เพื่อให้ตัวแปรความถี่ ω_k ลู่เข้าหาทุกค่าของ Ω_0 เราต้องการเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$f(\delta_k) = E[f_k(\delta_k)] \begin{cases} > 0, \omega_k < \Omega_0 \\ < 0, \omega_k > \Omega_0 \\ = 0, \omega_k = \Omega_0 \end{cases} \quad (4)$$

โดยที่ $E[\cdot]$ คือตัวหาค่าคาดหวังทางสถิติ เพื่อค้นหาฟังก์ชัน $f(\delta_k)$ ที่ให้เงื่อนไขตามสมการที่ (4) เราจะพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้



รูปที่ 1 โครงสร้างของระเบียบวิธีที่นำเสนอ

$$f(\delta_k) = \text{Im}\{E[x_k x_{k-1}^* e^{-j\omega_k}]\} \quad (5)$$

โดยที่ $\text{Im}\{\cdot\}$ คือค่าจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน และดอกจัน (*) คือการสังยุคเชิงซ้อน เมื่อแทนค่าในสมการที่ (1) ลงในสมการที่ (5) และตั้งสมมติฐานว่า องค์ประกอบของสัญญาณและองค์ประกอบของสัญญาณรบกวนเป็นอิสระกันทางสถิติจะได้

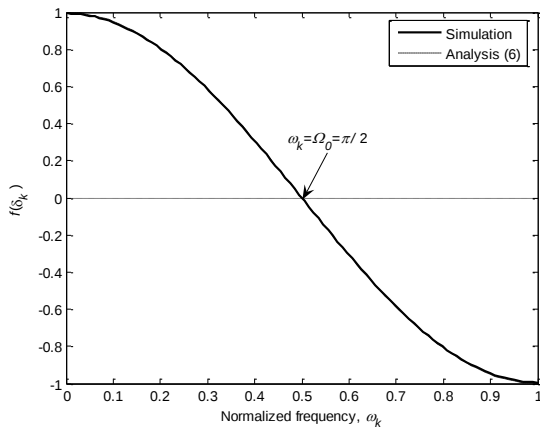
$$\begin{aligned} f(\delta_k) &= \text{Im}\{E[(u_k u_{k-1}^* + n_k n_{k-1}^*) e^{-j\omega_k}]\} \\ &= \text{Im}\{E[u_k u_{k-1}^* e^{-j\omega_k}] + E[n_k n_{k-1}^* e^{-j\omega_k}]\} \\ &\approx A^2 \sin(\delta_k) \end{aligned} \quad (6)$$

จากสมการที่ (6) เราพบว่าพจน์ $E[n_k n_{k-1}^* e^{-j\omega_k}] = 0$ ทั้งนี้เพราะสัญญาณรบกวน n_k n_{k-1}^* และ $e^{j\omega_k}$ ไม่มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งความจริงในสมการที่ (6) สามารถยืนยันได้จากผลจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งเป็นเป็นการเปรียบเทียบกราฟของฟังก์ชัน $f(\delta_k)$ ต่อค่า ω_k ในสมการที่ (6) กับผลที่ได้จากการ

จำลองการทำงานที่ $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$ $A=1$ และ $\Omega_0 = \pi/2$ จากรูปพบว่าฟังก์ชัน $f(\delta_k)$ มีค่าเป็นไปตามเงื่อนไขตามสมการที่ (4) และผลการวิเคราะห์สามารถทำนายผลจำลองการทำงานได้อย่างถูกต้อง ดังนั้นจึงสามารถนำ $f(\delta_k)$ มาใช้เป็นเกณฑ์ในการปรับค่า ω_k ในสมการที่ (3) ได้ แต่เนื่องจากในทางปฏิบัติเราไม่สามารถหาค่า $f(\delta_k)$ ที่แท้จริงมาใช้ได้จึงต้องอาศัยการประมาณค่า ทางเลือกหนึ่งที่สามารถทำได้คือการใช้ค่าชั่วขณะของ $f(\delta_k)$ แทน คือ $f_k(\delta_k)$ ดังนี้

$$f_k(\delta_k) = \text{Im}\{x_k x_{k-1}^* e^{-j\omega_k}\} \quad (7)$$

แทนค่าในสมการที่ (7) ลงในสมการที่ (3) เราจะได้ระเบียบวิธีสำหรับประมาณค่าความถี่ที่น่าเสนอ ดังนี้



รูปที่ 2 ฟังก์ชัน $f(\delta_k)$ เทียบกับค่า ω_k

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \mu \text{Im}\{x_k x_{k-1}^* e^{-j\omega_k}\} \quad (8)$$

ระเบียบวิธีที่น่าเสนอในสมการที่ (8) นี้คล้ายคลึงและมีสมรรถนะเทียบเท่ากับระเบียบวิธี CDFE ที่ถูกพัฒนามานานพื้นฐานของการทำนายเชิงเส้น อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์หาค่า MSE ของ CDFE นั้นต้องใช้เทคนิคที่ค่อนข้างซับซ้อนมากกว่าเมื่อเทียบกับระเบียบวิธีที่น่าเสนอในบทความนี้ซึ่งใช้สมมติฐานง่าย ๆ ในการวิเคราะห์ ซึ่งจะกล่าวดังต่อไปนี้ ในขั้นแรกจะทำการคุณสมบัติสมการที่ (8) ทั้งสองด้านด้วย -1 จากนั้นนำ Ω_0 ไปบวกทั้งสองข้างและหาค่าเฉลี่ยจะได้

$$E[\delta_{k+1}] = E[\delta_k] - \mu A^2 E[\sin(\delta_k)] \quad (9)$$

หากระเบียบวิธีมีความเสถียรและรู้เข้าหาคำตอบ เมื่อเข้าสู่สถานะอยู่ตัวเราจะพบว่า $\delta_k \rightarrow 0$ ดังนั้นจะสามารถประมาณได้ว่าพจน์ $\sin(\delta_k) \approx \delta_k$ จากนั้นแทนลงในสมการที่ (9) จะได้

$$E[\delta_{k+1}] = (1 - \mu A^2) E[\delta_k] \quad (10)$$

เราจะเรียกค่า $E[\delta_k]$ ว่า ไบอัส ของการประมาณค่า สมการที่ (10) เป็นสมการผลต่างอันดับหนึ่งที่ไม่มียินพุต โดยสมการจะเสถียรเมื่อ $|1 - \mu A^2| < 1$ ภายใต้เงื่อนไขนี้ สมการจะมีผลตอบสนองเพียงส่วนเดียว คือ ผลตอบสนองธรรมชาติ ซึ่งเมื่อคำนวณโดยสมมติค่าเริ่มต้นเป็น δ_{-1} จะได้คำตอบคือ

$$E[\delta_k] = \delta_{-1} (1 - \mu A^2)^{k+1} \quad (11)$$

ที่สถานะอยู่ตัวเมื่อ $k \rightarrow \infty$ จะพบว่า $E[\delta_k] \rightarrow 0$ ทั้งนี้เพราะพจน์ $(1 - \mu A^2) \rightarrow 0$ ดังนั้นระเบียบวิธีที่น่าเสนอจึงเป็นตัวประมาณที่ไร้ไบอัส (unbiased estimator) เนื่องจาก A เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ดังนั้นเงื่อนไขที่ทำให้ระเบียบวิธีในสมการที่ (8) เสถียรในมุมมองของค่าเฉลี่ย (mean sense) คือ

$$0 < \mu < \frac{2}{A^2} \quad (12)$$

กลับไปพิจารณาสมการที่ (7) เมื่อแทนค่าในสมการที่ (1) ลงไปจะสามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\begin{aligned} f_k(\delta_k) &= \text{Im}\{A^2 e^{j(\Omega_0 - \omega_k)} + v_k\} \\ &= A^2 \sin(\delta_k) + v_{ik} \end{aligned} \quad (13)$$

โดยที่ $v_k = v_{rk} + jv_{ik} = n_k n_{k-1}^* e^{-j\omega_k}$ สามารถประมาณได้ว่าเป็นสัญญาณรบกวนเกาส์เซียนเชิงซ้อนถ้าหากว่า ω_k เปลี่ยนตามเวลาอย่างช้า ๆ มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนเป็น σ_v^2 ส่วน v_{rk} กับ v_{ik} คือกระบวนการค่าจริงที่เป็นอิสระกันและมีความแปรปรวนเท่ากันเป็น $\sigma_v^2/2$ โดยค่า σ_v^2 สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\sigma_v^2 = E[v_k v_k^*] = E[n_k n_{k-1}^* n_k^* n_{k-1}] \quad (14)$$

บนสมมติฐานความเป็นเกาส์เซียนของ v_k เราจะใช้ทฤษฎี Gaussian moment-factoring theorem [8] ต่อสมการที่ (14) จะได้

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= E[n_k n_k^*] E[n_{k-1}^* n_{k-1}] + E[n_k n_{k-1}] E[n_{k-1}^* n_k^*] \\ &\quad + E[n_k n_{k-1}^*] E[n_k^* n_{k-1}] \\ &= \sigma^4 \end{aligned} \quad (15)$$

ดังนั้นกระบวนการ v_{ik} จะมีค่าความแปรปรวนเป็น $\sigma^4/2$ ต่อไปจะศึกษาค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองเฉลี่ย MSE ของตัวประมาณ โดยจะเริ่มต้นด้วยการเขียนสมการที่ (8) ในรูปค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าดังนี้

$$\delta_{k+1} = \delta_k - \mu(A^2 \sin(\delta_k) + v_{ik}) \quad (16)$$

จากนั้นยกกำลังสองทั้งสองข้างและจัดรูปจะได้

$$\delta_{k+1}^2 = (1 - 2\mu A^2 + \mu^2 A^4) \delta_k^2 + \mu^2 v_{ik}^2 \quad (17)$$

สมการที่ (18) ได้ใช้สมมติฐานเช่นเดียวกับสมการที่ (10) และมีสมมติฐานเพิ่มเติมคือ δ_k กับ v_{ik} ไม่มีความสัมพันธ์กัน จากนั้นหาค่าเฉลี่ยและสมมติให้ $E[\delta_{k+1}^2]_{k \rightarrow \infty} = E[\delta_k^2]_{k \rightarrow \infty} = E[\delta_\infty^2]$ สุดท้ายจัดรูปจะได้

$$E[\delta_\infty^2] = \frac{\mu \sigma^4}{4A^2(1 - \mu A^2)} \quad (18)$$

สมการที่ (18) คือค่า MSE ของตัวประมาณที่นำเสนอซึ่งพบว่าแปรผันตรงกับค่า μ และ σ^2 โดยแปรผกผันกับ A^2 สมการนี้จะยอมรับได้ก็เฉพาะในกรณี μ น้อยหรือในกรณีที่ระเบียบวิธีมีการปรับตัวอย่างช้า ๆ เท่านั้น ซึ่งจะได้เห็นจากผลการทดลองในหัวข้อถัดไป

3. ผลจำลองการทำงาน

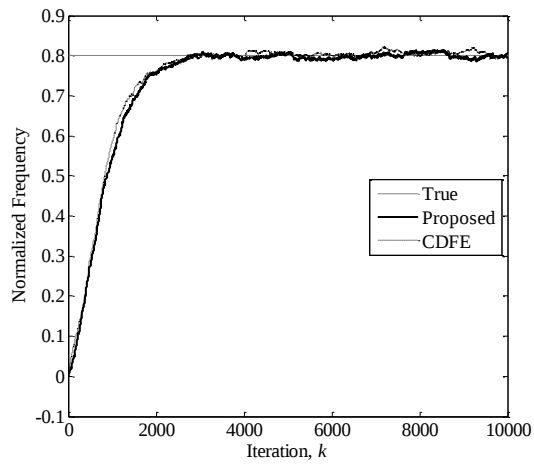
หัวข้อนี้จะทำการจำลองการทำงานระเบียบวิธีที่นำเสนอด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเราจะแบ่งการทดลองออกเป็นหัวข้อดังนี้

3.1 การประมาณค่าความถี่

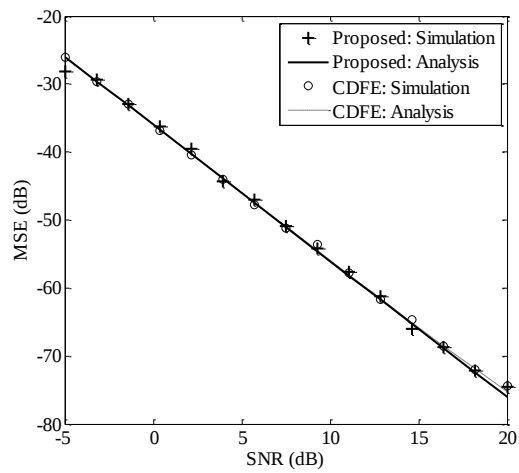
กำหนดตัวแปรให้แก่สัญญาณอินพุตที่ต้องการประมาณค่าดังนี้ $A=1$ $\Omega_0 = 0.8\pi$ $\theta = \pi/10$ $\text{SNR} = 0$ dB ความยาวสัญญาณ $L=10^4$ และค่าเริ่มต้นการปรับ $\omega_0 = 0$ ผลการประมาณค่าความถี่แสดงดังรูปที่ 3 จากรูปจะเห็นว่าระเบียบที่นำเสนอกับระเบียบวิธี CDFE จะมีสมรรถนะที่เทียบเท่ากัน โดยสามารถประมาณค่าความถี่ได้อย่างถูกต้อง

3.2 ค่า MSE ที่สถานะอยู่ตัว

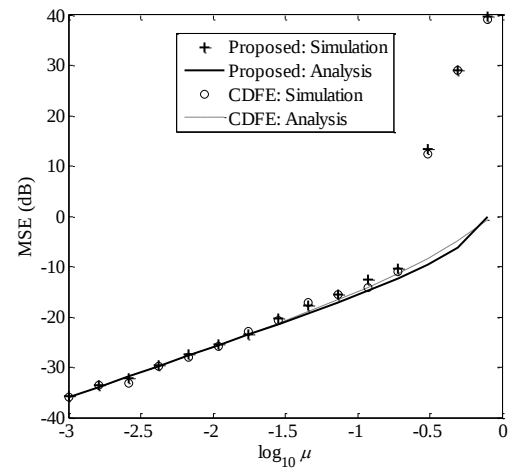
เพื่อที่จะดูผลกระทบจาก SNR μ และ Ω_0 ที่มีต่อค่า MSE ของระเบียบวิธีที่นำเสนอเราจะกำหนดการทดลองดังนี้ หากเราต้องการดูผลกระทบจาก SNR เราจะปรับค่า SNR ส่วนตัวแปรอื่นกำหนดเป็นค่าคงที่ และในทำนองเดียวกันกับตัวแปรอื่นด้วย นอกจากนี้เราจะกำหนดให้ระบบทำงานซ้ำ $N = 100$ รอบ โดยในแต่ละรอบสัญญาณไซน์เชิงซ้อนแบบสุ่มเฟสจะถูกนำไปรวมกับสัญญาณรบกวนขาวเกาส์เซียนที่เป็นอิสระกันแต่มีความแปรปรวนเท่ากัน และกำหนดให้ L มีค่ามากพอที่จะมั่นใจได้ว่าระบบเข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้ว จากนั้นจะนำค่าความถี่ที่ $k=L$ ของแต่ละรอบไปประมาณค่า MSE โดยการเฉลี่ยแบบอองเซมเบิล (ensemble average) ผลการทดลองแสดงดังรูปที่ 4 ถึง 6 จากรูปพบว่าผลการวิเคราะห์สามารถทำนายผลจำลองการทำงานได้อย่างถูกต้อง ผลวิเคราะห์ของวิธีที่นำเสนอจะแตกต่างจากผลวิเคราะห์ของ CDFE เพียงเล็กน้อยเท่านั้น จากรูปที่ 4 พบว่า MSE จะน้อยลงหากค่า SNR มีค่ามากขึ้น ส่วนในรูปที่ 5 พบว่า MSE จะเพิ่มหากค่า μ มีค่ามากขึ้นและพบว่าผลวิเคราะห์ไม่สามารถทำนายผลจำลองการทำงานได้เมื่อ μ มีค่ามากซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ ส่วนในรูปที่ 6 ยืนยันว่า MSE ที่ทุกความถี่สำหรับค่า SNR และ μ ใด ๆ นั้นมีค่าเท่ากัน



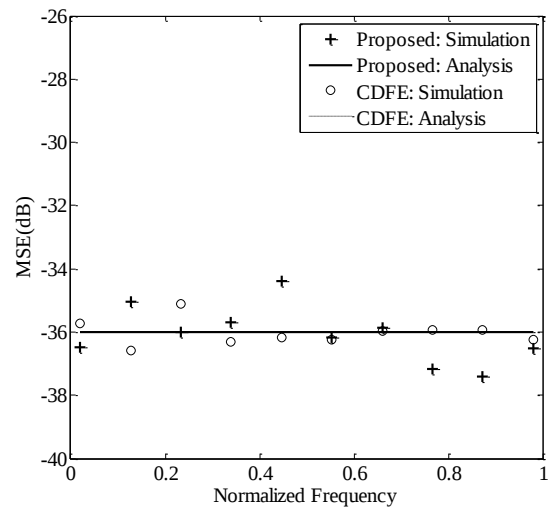
รูปที่ 3 ผลการประมาณค่าความถี่



รูปที่ 4 ค่า MSE เทียบกับ SNR สำหรับ $\Omega_0 = 0.5\pi$ และ $\mu = 10^{-3}$



รูปที่ 5 ค่า MSE เทียบกับ μ สำหรับ $\Omega_0 = 0.5\pi$ และ $SNR = 0$ dB



รูปที่ 6 ค่า MSE เทียบกับ Ω_0 สำหรับ $\mu = 10^{-3}$ และ $SNR = 0$ dB

4 สรุป

บทความนี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีแบบปรับตัวสำหรับการประมาณค่าความถี่ของสัญญาณไซน์เชิงซ้อนความถี่เดียว ข้อเด่นของวิธีนี้คือเรียบง่ายและคำนวณต่ำ ถูกออกแบบให้ทำงานที่เวลาจริงแบบ ตัวอย่าง-ต่อ-ตัวอย่าง นอกจากนี้ยังได้นำเสนอผลการวิเคราะห์สมรรถนะในรูปสูตรสำเร็จของค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญคือ MSE ไว้ด้วย ซึ่งจากการทดลองพบว่าผลวิเคราะห์สามารถทำนายผลจำลองการทำงานได้อย่างแม่นยำถ้าหากว่าค่า μ มีค่าไม่มากเกินไป ทั้งนี้เพราะเมื่อ μ มีค่ามากเกินไปนั้น สมมติฐานของแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นและไม่แปรตามเวลาจะไม่สามารถใช้ได้ จึงทำให้ผลการวิเคราะห์ที่ไม่สอดคล้องกับผลจำลองการทำงาน ดังนั้นการค้นหาลักษณะใหม่เพื่อทำนายสมรรถนะระเบียบวิธีที่นำเสนอที่ครอบคลุมทุก ๆ ค่าของตัวแปรในระบบยังเป็นงานวิจัยที่น่าสนใจและท้าทายซึ่งจะได้ศึกษาในอนาคตต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] S. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.
- [2] D. C. Rife and R. R. Boorstyn, "Single-Tone parameter estimation from discrete-time observations," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 20, no. 5, pp. 591-598, Sept. 1974.
- [3] S. A. Tretter, "Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression," *IEEE Trans. Information theory*, vol. 31, no. 6, pp. 832-835, Nov. 1985.
- [4] S. Kay, "A fast and accurate single frequency estimator," *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing*, vol. 37, no. 12, pp. 1987-1990, Dec. 1989.
- [5] R. Best, *Phase-Locked Loops: Designs, Simulation, and Applications*, New York: McGraw-Hill, 2003.
- [6] R. Punchalard, P. Wardkein, "Linear prediction based adaptive algorithm for a complex sinusoidal frequency estimation," *Int. J. Electron. Commun. (AEU)*, vol. 67, no. 6, pp. 521-527, June 2013.
- [7] M. P. Fitz, "Further results in the fast estimation of a single frequency," *IEEE trans. on Communication*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 862-864, 1994.
- [8] V. Krishnan, *Probability and random processes*, John Wiley & Sons, Inc, 2016.



ราชู พันธฉลาด สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอก สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ในปี 2550 ปัจจุบันทำงานเป็นอาจารย์ประจำ ตำแหน่งรองศาสตราจารย์ สังกัดภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร หัวข้องานวิจัยที่สนใจได้แก่ การ

ประมวลผลสัญญาณแอนะล็อกและดิจิทัล ทฤษฎีข่าวสาร การสื่อสารแอนะล็อกและดิจิทัล