

การศึกษาการหาตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียมวงโคจรใกล้โลก จากข้อมูลจีพีเอสโดยใช้แนวทางเชิงสถิติศาสตร์

A Study LEO Satellite Orbit Determination from GPS Data using the Statistical Approach

ประมินทร์ พิชิตการค้า¹ และ สมภพ ภูริวิทย์พงศ์²

¹บัณฑิตศึกษา สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

²ภาควิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

140 ถนนเชื่อมสัมพันธ์ แขวงกระทุ่มราย เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Manuscript received November 8, 2013

Revised January 6, 2014

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอผลการศึกษาคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียมวงโคจรต่ำ จากข้อมูลการวัดระยะเสมือนระหว่างดาวเทียมวงโคจรต่ำและดาวเทียมจีพีเอส การประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดร่วมกับการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียลถูกนำมาประยุกต์ใช้งานเพื่อให้ตัวประมาณค่าสามารถประมาณค่าภายใต้ผลกระทบที่เกิดจากพลวัตดาวเทียมและการรบกวนวงโคจรได้ โดยบทความนี้ได้พิจารณาพลวัตดาวเทียมร่วมกับคีย์โน้มน้าวโลกที่ถูกอธิบายในรูปแบบฮาร์มอนิกทรงกลม ทั้งนี้ผลลัพธ์จากการศึกษาพบว่าค่าที่ประมาณได้มีใกล้เคียงกับคำตอบอ้างอิง

คำสำคัญ: การหาตำแหน่งวงโคจรของยานอวกาศ, วิธีกำลังสองน้อยที่สุดร่วมกับการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียล และจีพีเอสเพอร์เซดเดอร์

ABSTRACT

This paper presents a study of the orbit determination of low-Earth orbit (LEO) spacecraft using GPS observable. The statistical approach based on least squares estimation associated with differential correction has been implemented to estimate the position and velocity of the spacecraft. The spacecraft dynamics and orbit perturbation from Earth oblateness, particularly J_2 effect, were taken into account. The estimates were evaluated by the conventional orbit propagator.

Keywords: spacecraft orbit determination, least squares estimation with differential correction, GPS pseudoranges

1. บทนำ

ปัจจุบันสัญญาวิทยุที่แพร่โดยกลุ่มดาวเทียมนำร่อง (อาทิ กลุ่มดาวเทียมจีพีเอส) ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในอวกาศอย่างแพร่หลายเพื่อระบุตำแหน่งและความเร็วของวัตถุอวกาศที่โคจรใกล้โลก อาทิ ดาวเทียม วงโคจรต่ำหรือสถานีนอวกาศนานาชาติ ทั้งนี้ วัตถุอวกาศดังกล่าวจำเป็นต้องมีเครื่องรับสัญญาณดาวเทียมนำร่อง อาทิ เครื่องรับจีพีเอส ติดตั้งอยู่ในวัตถุอวกาศนั้นๆ เพื่อทำการรับสัญญาณดาวเทียมนำร่อง มีวิธีการคำนวณทางคณิตศาสตร์บรรจุอยู่ในส่วนประมวลผลของวัตถุอวกาศ เพื่อคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วของตัววัตถุอวกาศเอง [1]

ในบทความนี้ได้พิจารณาให้ดาวเทียมวงโคจรต่ำใกล้โลกเป็นผู้รับข้อความนำร่องจากกลุ่มดาวเทียมจีพีเอส โดยดาวเทียมวงโคจรต่ำ มีเครื่องรับจีพีเอส ซึ่งทำหน้าที่รับข้อความนำร่องที่ระบุตำแหน่งของดาวเทียมจีพีเอสทั้งกลุ่ม รวมไปถึงคำนวณระยะเสมือนระหว่างดาวเทียม จีพีเอส จากข้อมูลรหัสที่บรรจุอยู่ในข้อความนำร่อง (ที่เครื่องรับจีพีเอส สามารถติดตามสัญญาณได้) [2] ข้อมูลตำแหน่งดาวเทียมจีพีเอส จากข้อความนำร่องและระยะเสมือนที่เครื่องรับจีพีเอสคำนวณได้ จะเป็นข้อมูลดิบที่ถูกนำไปประมวลผลด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ได้ค่าพิกัดตำแหน่งและความเร็วของเครื่องรับจีพีเอส ซึ่งถูกบรรจุอยู่บนดาวเทียม วงโคจรต่ำ ดังนั้น ค่าพิกัดตำแหน่งและความเร็วของเครื่องรับจีพีเอสที่ถูกคำนวณนั้น ก็สามารถอนุมาน

ได้ว่าเป็นค่าพิกัดตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียมวงโคจรต่ำ [1]

จากผลบทความที่ผ่านมา การประมวลผลด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ได้ค่าพิกัดตำแหน่งและความเร็วของเครื่องรับ จีพีเอสนั้นมีหลายวิธี อาทิ ตัวกรองประมาณค่า (filtering estimator) วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแบบธรรมดา (conventional least squares methods) เป็นต้น ตัวกรองประมาณค่าที่นิยมใช้งานกันอย่างแพร่หลาย ได้แก่ ตัวกรองคาลแมน (Kalman filter) [3] ซึ่งโดยทั่วไป ตัวกรองประมาณค่ามีทั้งข้อดีและข้อด้อย โดยข้อดีนั้นแบบจำลองระบบสามารถรวมผลกระทบที่เกิดจากพลวัตการเคลื่อนที่ของดาวเทียม และการรบกวนวงโคจรได้ รวมไปถึงการคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วได้จากข้อมูลการวัดระยะเหมือนเพียงอย่างเดียวไม่จำเป็นต้องใช้ข้อมูลการวัดการเคลื่อนที่ดอปเพลอร์ (Doppler Shift) อีกทั้งในบางช่วงเวลาของการประมวลผลที่ข้อมูลการวัดมีจำนวนน้อยหรือไม่เลย ตัวกรองประมาณค่ายังคงสามารถใช้แบบจำลองระบบทำการแพร่ค่าประมาณตำแหน่งและความเร็วได้ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติควรดำเนินการดังกล่าวเป็นช่วงระยะเวลาสั้นๆ เพื่อป้องกันมิให้เกิดการลู่ออกในการประมาณค่าของตัวกรอง

สำหรับตัวกรองคาลแมนแบบธรรมดา ต้องสร้างแบบจำลองระบบที่มีลักษณะเฉพาะสำหรับแพลตฟอร์มใดแพลตฟอร์มหนึ่ง อย่างไรก็ตามในปัจจุบันได้มีการพัฒนาตัวกรองประมาณค่าที่เป็นอิสระจาก แพลตฟอร์ม รวมไปถึงการพัฒนาตัวกรองให้มีศักยภาพและขีดความสามารถในระดับที่สูงมาก อาทิ particle filter [4] ซึ่งเป็นตัวกรองแบบไม่เป็นเชิงเส้นและพิจารณาการกระจายตัวของสัญญาณรบกวนที่ไม่เป็นแบบปกติมาตรฐานส่วน unscented Kalman filter [5] เป็น ตัวกรองประมาณค่าที่ใช้หลักการทางสถิติและความน่าจะเป็นเพื่อหา การกระจายตัวรอบค่าเฉลี่ยซึ่งมีความแม่นยำและคงทนต่อการเปลี่ยนแปลง แบบฉบับพลัน อย่างไรก็ตามความซับซ้อนของตัวกรองเหล่านี้เป็นประเด็นที่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาสำหรับการประยุกต์ใช้งานในอวกาศ เนื่องจากเป็นที่ทราบดีว่าทรัพยากรด้านเทคโนโลยีบนดาวเทียมหรือยานอวกาศ มีข้อจำกัดที่แตกต่างจากกรณีบนพื้นโลก

โดยปกติแล้ว วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแบบธรรมดาคำนวณค่าพิกัดตำแหน่งได้จากข้อมูลการวัดระยะเหมือน แต่ถ้าต้องการที่จะคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วด้วยนั้นจำเป็นต้องใช้ข้อมูลการวัดการเคลื่อนที่ดอปเพลอร์ เนื่องจากข้อมูลการวัดระยะเหมือนไม่สามารถให้ข้อมูลด้านความเร็ว ส่วนในกรณีของตัวกรองประมาณค่าเนื่องจากแบบจำลองระบบได้พิจารณาพลวัตการเคลื่อนที่ของดาวเทียมร่วมด้วยทำให้สามารถคำนวณค่าตำแหน่งและความเร็วได้จากข้อมูลการวัดระยะเหมือนเพียงอย่างเดียว ซึ่งแตกต่างไปจากการประมาณค่าที่ใช้วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดที่ไม่มีแบบจำลองระบบมีแต่แบบจำลองข้อมูลการวัดเท่านั้น

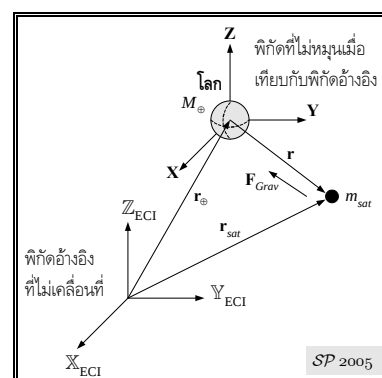
ในบทความวิจัยนี้ นำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีการประมาณค่ากำลังน้อยที่สุดร่วมกับการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียล เพื่อคำนวณค่าพิกัดตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียมวงโคจรต่ำจากข้อมูลการวัดระยะเหมือนเพียงอย่างเดียว โดยตัวประมาณค่าที่พัฒนาขึ้นได้นำพลวัตการเคลื่อนที่ของดาวเทียมและศักย์โน้มถ่วงโลกมารวมในการพิจารณาเพื่อให้การประมาณค่ารวมผลกระทบที่เกิดจากการรบกวนวงโคจร

2. พลวัตดาวเทียมและข้อมูลการวัด

2.1 สมการการเคลื่อนที่ (Equations of Motion) [6]

การเคลื่อนที่ของดาวเทียมรอบโลก สามารถอธิบายได้ตามกฎแรงดึงดูดระหว่างมวลของนิวตัน (Newton's universal law of gravitation) โดยกำหนดสมมุติฐานเพื่อรองรับสมการคณิตศาสตร์ที่จะนำเสนอ ดังนี้

1. วัตถุทั้งสอง (โลกและดาวเทียม) มีลักษณะเป็นทรงกลมที่สมมาตร
2. ไม่มีแรงอื่น กระทำต่อระบบนอกจากแรงดึงดูดระหว่างมวล



รูปที่ 1 ภาพของแรงดึงดูดระหว่างมวลของวัตถุสองชิ้น

จากรูปที่ 1 แรงที่เกิดจากสนามโน้มถ่วงโลก F_{Grav} ที่กระทำต่อตัวดาวเทียม สามารถแสดงได้

$$\mathbf{F}_{Grav} = -\frac{GM_{\oplus}m_{sat}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1)$$

โดยที่ G เป็นค่าคงที่ของความโน้มถ่วง

$M_{\oplus}$ เป็นมวลของโลก

m_{sat} เป็นมวลของดาวเทียม

$\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์ระยะระหว่างโลกและดาวเทียม

r เป็นระยะขจัดของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$

ในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของดาวเทียม เริ่มต้นด้วยการพิจารณาเวกเตอร์ตำแหน่งของโลก $\mathbf{r}_\oplus$ และเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเทียม $\mathbf{r}_{sat}$ เมื่อเทียบกับระบบพิกัดอ้างอิง ดังแสดงในรูปที่ 1 ดังนั้น เวกเตอร์ของระยะระหว่างโลกและดาวเทียม $\mathbf{r}$ สามารถแสดงได้เป็น $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_\oplus$

จากการที่กำหนดให้ระบบพิกัดอ้างอิงเป็นระบบพิกัดที่ไม่เคลื่อนที่ ทำให้การอนุพันธ์สมการข้างต้นสามารถทำได้โดยไม่ต้องพิจารณาการอนุพันธ์ในแต่ละแกน ดังนั้นอนุพันธ์อันดับที่สองของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ที่แสดงถึงความเร่งของดาวเทียมเมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางของโลก

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_\oplus \quad (2)$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน ซึ่งกล่าวถึงความเร่ง a ของวัตถุมวล m ใดๆจะมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น หรือมีค่าเป็นสัดส่วนผกผันกับมวลของวัตถุนั้น $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \equiv m\ddot{\mathbf{r}}$ ซึ่งแรงที่เกิดจากศักย์โน้มถ่วงโลก $\mathbf{F}_{Grav}$ และ $\mathbf{F}_\oplus$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Grav} &= m_{sat}\ddot{\mathbf{r}}_{sat} = -\frac{GM_\oplus m_{sat}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \mathbf{F}_\oplus &= M_\oplus \ddot{\mathbf{r}}_\oplus = -\frac{GM_\oplus m_{sat}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

แทนค่า สมการความเร่ง $\ddot{\mathbf{r}}_{sat}$ และ $\ddot{\mathbf{r}}_\oplus$ จากข้างต้น ลงในสมการ (2)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_\oplus + m_{sat})}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4)$$

โดยที่ $\mu = G(M_\oplus + m_{sat})$ เป็นพารามิเตอร์ของความโน้มถ่วง

เมื่อพิจารณาตามความเป็นจริงพบว่ามวลของดาวเทียมมีขนาดเล็กมาก ๆ เมื่อเทียบกับมวลของโลกจึงคิดเฉพาะมวลของโลกเพียงอย่างเดียว ทำให้พารามิเตอร์ของศักย์โน้มถ่วงของโลก มีค่าเท่ากับ

$$G(M_\oplus + m_{sat}) \approx GM_\oplus \approx \mu_\oplus = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \quad (\text{WGS84})$$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ (4) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_\oplus}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{a}_{pr} \quad (5)$$

โดยที่ $\mathbf{a}_{pr}$ เป็นผลรวมของความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียม

2.2 ศักย์โน้มถ่วงโลก

ศักย์โน้มถ่วงโลก U ในรูปแบบของอนุกรมพหุนามเลอฌ็องด์ร์ (Legendre) อ้างอิงกับระบบพิกัด $(r, \phi_{sat}, \lambda_{sat})$ แสดงได้ตามสมการ [7]

$$\begin{aligned} U(r, \phi_{sat}, \lambda_{sat}) &= -\frac{\mu_\oplus}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n P_n(\sin \phi_{sat}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{n,m} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \phi_{sat}) \cos m(\lambda - \lambda_{n,m}) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

โดยที่ $(\phi_{sat}, \lambda_{sat})$ เป็นพิกัดละติจูดและลองจิจูดของตำแหน่งดาวเทียม

$R_\oplus$	เป็นรัศมีของโลก
n	เป็นระดับชั้นพหุนาม และ m เป็นอันดับพหุนาม
$P_{n,m}$	เป็นฟังก์ชันเลอฌ็องด์ร์สมทบ (associated Legendre function)
$J_{n,m}$	เป็นสัมประสิทธิ์ฮาร์โมนิก (zonal harmonics)
$\lambda_{n,m}$	เป็นลองจิจูดสมมูลสำหรับประสิทธิ์ฮาร์โมนิก $J_{n,m}$

เมื่อพิจารณาผลการรบกวนที่เกิดจากโซนอลฮาร์โมนิก โดยเฉพาะลำดับที่สอง (second spherical harmonic, J_2) ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงโลก สามารถลดรูปสมการได้เป็นตามสมการ(7)

$$U_{J_2} = -J_2 \frac{\mu_\oplus}{r} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 P_2(\sin \phi_{sat}) \quad (7)$$

จากเทอมพหุนามเลอฌ็องด์ร์ $P_2(\gamma) = \frac{1}{2}(3\gamma^2 - 1)$ ดังนั้น ฟังก์ชันศักย์โน้มถ่วงกรณีสำหรับ J_2

$$U_{J_2} = -\frac{J_2}{2} \frac{\mu_\oplus}{r} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 (3\sin^2 \phi_{sat} - 1) \quad (8)$$

ค่าความเร่งที่รบกวนวงโคจรของดาวเทียมสามารถบอกได้จากเกรเดียนต์ของศักย์โน้มถ่วงโลก ซึ่งแสดงได้ตามสมการ

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{pr} &= \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \\ &\equiv [a_x \quad a_y \quad a_z]^T \end{aligned} \quad (9)$$

โดยที่ ∇ เป็นสัญลักษณ์เกรเดียนต์
 (i, j, k) เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน x, y, z
 ตามลำดับ

a_x, a_y, a_z เป็นความเร่งที่รับกวนวงโคจรของดาวเทียมใน
 แกน x, y, z ตามลำดับ

ดังนั้น ความเร่งที่รับกวนวงโคจรของดาวเทียม เมื่อ
 พิจารณาเฉพาะโซนอลฮาร์โมนิกที่ 2 (J_2) แสดงได้ตามสมการ

$$\mathbf{a}_{pr(J_2)} = \begin{bmatrix} \frac{3J_2\mu_{\oplus}x}{2r^3} \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2 \left(\frac{5z^2}{r^2} - 1\right) \\ \frac{3J_2\mu_{\oplus}y}{2r^3} \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2 \left(\frac{5z^2}{r^2} - 1\right) \\ \frac{3J_2\mu_{\oplus}z}{2r^3} \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2 \left(\frac{5z^2}{r^2} - 3\right) \end{bmatrix} \quad (10)$$

โดยที่ J_2 เป็นสัมประสิทธิ์ฮาร์โมนิกที่สองมีค่า 0.001082616
 (WGS84)

2.3 การแพร่วงโคจร (Orbit Propagation)

เมื่อตำแหน่งวงโคจรดาวเทียมหรือวัตถุอวกาศได้ถูกคำนวณหา
 เป็นที่เรียบร้อยแล้ว เราสามารถนำเทคนิคการแพร่วงโคจรมา
 ประยุกต์ใช้เพื่อทำนายตำแหน่งของดาวเทียมหรือวัตถุอวกาศใน
 อนาคตได้ อย่างไรก็ตาม แรงรบกวนวงโคจรจะต้องถูกนำมา
 พิจารณาด้วย ซึ่งเทคนิคการทำนายวงโคจรโดยรวมผลแรงรบกวน
 ดังกล่าวซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลานั้นมีสองเทคนิค คือแบบ
 พิเศษ (Special Perturbation) และแบบทั่วไป (General
 Perturbation)

การรบกวนแบบพิเศษจะใช้หลักการปริพันธ์เชิงตัวเลข
 (Numerical integrations) โดยตรงกับสมการการเคลื่อนที่ วิธีที่ใช้
 งานกัน อาทิ วิธีโคเวลล์ (Cowell's method) ซึ่งเป็นวิธีที่มีการใช้
 งานอย่างแพร่หลาย ทั้งนี้ ในการทำปริพันธ์สมการการเคลื่อนที่นั้น
 จะได้ผลลัพธ์เป็นความเร็ว และเมื่อทำปริพันธ์ซ้ำอีกครั้ง ก็จะได้
 ผลลัพธ์เป็นค่าตำแหน่งของวัตถุที่ถูกพิจารณา อย่างไรก็ตาม ความ
 ถูกต้องของเทคนิคนี้จะขึ้นอยู่กับขีดความสามารถของตัวปริพันธ์ที่
 นำมาใช้ และเราไม่สามารถเห็นการเปลี่ยนแปลงทางกายภาพ
 และการวิเคราะห์พฤติกรรมของวงโคจรในระหว่างช่วงเวลาที่น่าสนใจ
 นั้นเป็นไปได้ลำบาก เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้เป็นผลลัพธ์สุดท้ายจำนวน

อันดับของตัวปริพันธ์ที่เลือกใช้อาจจะส่งผลต่อทรัพยากรของ
 หน่วยประมวลผล

สำหรับเทคนิคการรบกวนแบบทั่วไปนั้น จะใช้การแก้สมการ
 การเคลื่อนที่ในลักษณะเชิงวิเคราะห์ โดยจะวิเคราะห์เพียงบางส่วน
 ของการเคลื่อนที่ที่เราสนใจซึ่งได้รับผลกระทบจากการรบกวน ข้อดี
 ของเทคนิคนี้คือทำให้เห็นภาพรวมของพฤติกรรมวงโคจรของวัตถุขึ้น
 นั้น อย่างไรก็ตาม เทคนิคนี้ยังมีข้อด้อยในเรื่องประเด็นความแม่นยำ
 รวมไปถึงความซับซ้อนของสมการที่ต้องพิจารณา ซึ่งขึ้นอยู่กับแหล่ง
 รบกวนใดบ้างที่จะถูกนำมาพิจารณา และจำนวนพารามิเตอร์ที่นำมา
 วิเคราะห์ร่วมด้วย อาทิ อันดับอนุกรมฟูรีเยร์ของเลอฌ็องด์ร์

2.4 ข้อมูลการวัดระยะเสมือน

ระยะเสมือนเป็นข้อมูลการวัดพื้นฐานสำหรับการคำนวณหา
 ตำแหน่งวงโคจรดาวเทียมจากสัญญาณนำร่องที่แพร่โดยกลุ่ม
 ดาวเทียมนำร่อง เมื่อพิจารณา ณ เวลา t_k เครื่องรับจีพีเอสบน
 ดาวเทียมวงโคจรต่ำใกล้โลก รับสัญญาณนำร่องจากดาวเทียมจีพีเอส
 ดวงที่ j ค่าระยะเสมือนระหว่างดาวเทียมทั้งสอง แสดงได้ตาม
 สมการ

$$\rho_j = \sqrt{(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2 + (z_j - z_u)^2} + ct_u \Big|_{t_k} \quad (11)$$

โดยที่ (x_j, y_j, z_j) เป็นตำแหน่งดาวเทียมจีพีเอสดวงที่ j

(x_u, y_u, z_u) เป็นตำแหน่งดาวเทียม

t_u เป็นค่าความแตกต่างของฐานเวลาของระบบกับเครื่องรับ
 จีพีเอส

c เป็นความเร็วแสง

จากสมการ (11) – (15) โดยการให้ค่าประมาณเริ่มต้นของ
 ตำแหน่งดาวเทียมวงโคจรต่ำใกล้โลก $(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u)$ และ $\hat{t}_u$
 ค่าประมาณของระยะเสมือนสำหรับดาวเทียมจีพีเอสดวงที่ j
 สามารถคำนวณกลับได้จาก

$$\hat{\rho}_j = \sqrt{(x_j - \hat{x}_u)^2 + (y_j - \hat{y}_u)^2 + (z_j - \hat{z}_u)^2} + c\hat{t}_u \quad (12)$$

ค่ารีซิดวล $\delta\tilde{\rho}$ (residual) หรือค่าความแตกต่างระหว่างระยะ
 เสมือนที่เครื่องรับจีพีเอสวัดได้ $\tilde{\rho}_j$ และค่าประมาณระยะเสมือนจาก
 การคำนวณ $\hat{\rho}_j$ แสดงได้เป็น

$$\delta\tilde{\rho}_j = \tilde{\rho}_j - \hat{\rho}_j \quad (13)$$

ณ เวลา t_k สมมุติว่าเครื่องรับจีพีเอสบนดาวเทียมวงโคจรต่ำใกล้
 โลกสามารถรับสัญญาณนำร่องได้จำนวน N ดวง ดังนั้นกลุ่มหรือเซต

ของ $\delta\tilde{p}_i$ สามารถถูกจัดอยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ค่าความผิดพลาดของการวัด $\Delta\tilde{\mathbf{p}}$ ที่เรียกว่าเวกเตอร์ค่าความผิดพลาดของการวัด

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}}|_{t_k} = \begin{bmatrix} \delta\tilde{p}_1 \\ \delta\tilde{p}_2 \\ \vdots \\ \delta\tilde{p}_N \end{bmatrix}_{t_k} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 - \hat{p}_1 \\ \tilde{p}_2 - \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \tilde{p}_N - \hat{p}_N \end{bmatrix}_{t_k} \quad (14)$$

3. การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุดร่วมกับการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียล

3.1 เวกเตอร์สเตท

เวกเตอร์สเตท $\mathbf{x}$ ถูกกำหนดตามสมการ

$$\mathbf{x} = [\mathbf{r} \quad \mathbf{v} \quad t_u]^T \quad (15)$$

โดยที่ $\mathbf{r} = [x_u \quad y_u \quad z_u]^T$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเทียม

$\mathbf{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$ เป็นเวกเตอร์ความเร็วของดาวเทียม

t_u เป็นค่าความแตกต่างของฐานเวลาของระบบกับเครื่องรับจีพีเอส

3.2 แบบจำลองแรงกระทำต่อดาวเทียม

แบบจำลองระบบเชิงวิเคราะห์ในบทความนี้ พิจารณาแรงกระทำต่อดาวเทียมวงโคจรโคจรต่ำใกล้โลก เฉพาะเทอมที่สองของโซนอลฮาร์โมนิก (J_2) ตามสมการ (5) และ (10) ซึ่งแสดงได้ตามสมการ

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} ; \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \quad (16)$$

$$\text{โดยที่ } \mathbf{a} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}_{pr(J_2)}$$

3.3 การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุด

จากสมการ (11) ข้อมูลการวัด y_o (observable) สามารถเขียนในรูปแบบฟังก์ชันได้ตามสมการ

$$y_o = f(x_u, y_u, z_u, t_u) \quad (17)$$

ดังนั้นค่าประมาณของข้อมูลการวัดจากการคำนวณ y_c (computable) และค่ารีซิดวล สามารถเขียนได้ตามสมการ

$$y_c = f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u) \quad (18)$$

$$\delta\tilde{p} = y_o - y_c \quad (19)$$

เนื่องจากสมการข้อมูลการวัดตามสมการ (11) เป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งสามารถทำการประมาณให้เป็นแบบเชิงเส้น โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) อย่างไรก็ตาม เพื่อลดความซับซ้อน ในบทความวิจัยนี้ จะพิจารณาเพียงอนุกรมอันดับที่หนึ่งเท่านั้น

$$y_c = y_n + \Delta\mathbf{r} \frac{\partial y_n}{\partial \mathbf{r}} + \Delta\mathbf{v} \frac{\partial y_n}{\partial \mathbf{v}} + \delta t_u \frac{\partial y_n}{\partial t_u} \quad (20)$$

โดยที่ y_n เป็นฟังก์ชันของ (x_u, y_u, z_u, t_u) ณ เวลาที่ทำการวัด และ

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}} ; \quad \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} ; \quad \delta t_u = t_u - \hat{t}_u$$

ดังนั้นค่ารีซิดวล สามารถเขียนได้ใหม่ตามสมการ

$$\delta\tilde{p}_i = y_{o_i} - \left(y_{n_i} + \Delta\mathbf{r} \frac{\partial y_{n_i}}{\partial \mathbf{r}} + \Delta\mathbf{v} \frac{\partial y_{n_i}}{\partial \mathbf{v}} + \delta t_u \frac{\partial y_{n_i}}{\partial t_u} \right) \quad (21)$$

ณ เวลาหนึ่ง ๆ จำนวนข้อมูลการวัดมีจำนวน N ข้อมูล สมการข้างต้นเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ตามสมการ

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\mathbf{p}} &= \begin{bmatrix} y_{o_1} - y_{n_1} \\ y_{o_2} - y_{n_2} \\ \vdots \\ y_{o_N} - y_{n_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{n_1}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y_{n_1}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial y_{n_1}}{\partial t_u} \\ \frac{\partial y_{n_2}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y_{n_2}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial y_{n_2}}{\partial t_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n_N}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y_{n_N}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial y_{n_N}}{\partial t_u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{r} \\ \Delta\mathbf{v} \\ \delta t_u \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{โดยที่ } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_{o_1} - y_{n_1} \\ y_{o_2} - y_{n_2} \\ \vdots \\ y_{o_N} - y_{n_N} \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{r} \\ \Delta\mathbf{v} \\ \delta t_u \end{bmatrix} \quad (23) - (24)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{n_1}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y_{n_1}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial y_{n_1}}{\partial t_u} \\ \frac{\partial y_{n_2}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y_{n_2}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial y_{n_2}}{\partial t_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n_N}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y_{n_N}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial y_{n_N}}{\partial t_u} \end{bmatrix} \quad (25)$$

พิจารณาผลรวมของค่ารีซิดวลกำลังสอง จำนวน N ข้อมูล ณ เวลาการวัดหนึ่ง ๆ แสดงได้ตามสมการ

$$J = \sum_{i=1}^N w_i^2 \delta \tilde{p}_i^2 \equiv \Delta \tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{W} \Delta \tilde{\mathbf{p}} \quad (26)$$

โดยที่ i เป็นจำนวนข้อมูลการวัดเวลาหนึ่ง ๆ มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง N

w เป็นค่าถ่วงน้ำหนักสำหรับการประมวลผล

$\mathbf{W}$ เป็นเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก (Weighting Matrix)

ทั้งนี้ ค่าถ่วงน้ำหนัก และ เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก แสดงได้ตามสมการ

$$w_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{t_u}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w_r & 0 & 0 \\ 0 & w_v & 0 \\ 0 & 0 & w_{t_u} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_N^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

โดยที่ σ เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จากสมการ (22) และ (26) เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากที่สุดตามการประมาณค่าแบบกำลังน้อยที่สุด หรืออีกนัยหนึ่งคือการ ทำให้ค่ารีซิดวล มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากทำให้ฟังก์ชัน J มีค่าน้อยที่สุด โดยการอนุพันธ์ฟังก์ชัน J เทียบกับสเตต $\mathbf{x}$ ตามสมการ

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{b}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + 2\Delta \mathbf{x} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} = 0 \quad (29)$$

จากสมการข้างต้น ค่าความผิดพลาดของสเตต สามารถคำนวณได้ตามสมการ[8]

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{b} \quad (30)$$

3.4 เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (covariance matrix, $\mathbf{P}$) เป็นเมทริกซ์ที่ระบุถึงความน่าเชื่อถือในเชิงสถิติของคำตอบที่คำนวณได้ โดยที่ ค่าของสมาชิกที่อยู่นอกเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ จะมีลักษณะเป็นสมมาตร และสำหรับทุก ๆ $\mathbf{P}_{i \neq j}$ มีค่าน้อยมาก ๆ (เข้าใกล้ 0) แสดงว่าสมาชิกแต่ละค่า มีอิสระต่อกัน (Independent) และไม่เกิดปัญหาสัมพันธ์กัน (Coupling) ส่วนค่าสมาชิกตามแนวเส้นทแยงมุม สำหรับทุก ๆ $\mathbf{P}_{i=j}$ มีค่าคงที่เท่ากับความแปรปรวน

σ^2 จากสมการ (30) เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\mathbf{P}$ แสดงได้ตามสมการ (31)

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W})_{N \times N}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \mu_{rv} \sigma_r \sigma_v & \mu_{ru} \sigma_r \sigma_{t_u} \\ \mu_{rv} \sigma_r \sigma_v & \sigma_v^2 & \mu_{vu} \sigma_v \sigma_{t_u} \\ \mu_{ru} \sigma_r \sigma_{t_u} & \mu_{vu} \sigma_v \sigma_{t_u} & \sigma_{t_u}^2 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (31)$$

3.5 เมทริกซ์อนุพันธ์ย่อย

เมทริกซ์อนุพันธ์ย่อย (matrix of partial-derivative, $\mathbf{A}$) เป็นอนุพันธ์ของเมทริกซ์ข้อมูลการวัดที่เป็นระยะเสมือน ณ เวลา t_k เมื่อเทียบกับสเตต ณ เวลาเริ่มต้น ($\mathbf{x}_0$) และใช้การกระจายอนุพันธ์ได้ผลตามสมการ

$$\mathbf{A}_{t_k} = \frac{\partial \mathbf{p}_{t_k}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \equiv \mathbf{H} \cdot \Phi \quad (32)$$

โดยที่ $\mathbf{H}$ เป็นเมทริกซ์การวัด

Φ เป็นเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ

3.6 เมทริกซ์การวัด

เมทริกซ์การวัด (Matrix of Observation Partial, $\mathbf{H}$) เป็นเมทริกซ์อนุพันธ์ย่อยของข้อมูลการวัด เทียบกับสเตต ณ เวลา t_k

สำหรับบทความนี้ใช้ข้อมูลการวัดจากดาวเทียมจีพีเอสจำนวน 4 ดวง [9]

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{p}_{t_k}}{\partial \mathbf{x}_{t_k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t_u} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t_u} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial t_u} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_4}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{p}_4}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{p}_4}{\partial t_u} \end{bmatrix} \quad (33)$$

3.7 เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ

เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ (State Transition Matrix, Φ) เป็นเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง สตเท ณ เวลา t_k เทียบกับสตเท ณ เวลาเริ่มต้น t_0 ซึ่งบทความนี้ได้พิจารณาพลวัตการรบกวนวงโคจรที่เกิดจากวัตถุสองชิ้น และเทอมที่สองของโซโนลฮาร์โมนิก

$$\Phi = \frac{\partial \mathbf{x}_{t_k}}{\partial \mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \Phi_{rv} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}_0} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_0} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{7 \times 7} \quad (34)$$

จากสมการ (34) การหาอนุพันธ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าของสตเทความเร็วที่เวลา t_k เทียบกับค่าของสตเทตำแหน่งที่เวลา t_0 (อีพอคเริ่มต้น) ซึ่งผลการอนุพันธ์เทอม $\frac{\partial r_x}{\partial v_{x_0}} = \frac{\partial r_y}{\partial v_{y_0}} = \frac{\partial r_z}{\partial v_{z_0}} = \Delta t$ ส่วนเทอมอื่น ๆ เป็นการอนุพันธ์เทียบกับค่าคงที่ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์ อย่างไรก็ตาม ในส่วนของการหาอนุพันธ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าของสตเทความเร็วที่เวลา t_k เทียบกับค่าของสตเทความเร็วที่เวลา t_0 (อีพอคเริ่มต้น) ซึ่งผลการอนุพันธ์เทอม $\frac{\partial v_x}{\partial v_{x_0}} = \frac{\partial v_y}{\partial v_{y_0}} = \frac{\partial v_z}{\partial v_{z_0}} = 1$ ส่วนเทอมอื่น ๆ เป็นการอนุพันธ์เทียบกับค่าคงที่ ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์

3.8 สมการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียล (Differential Correction)

จากความสัมพันธ์ระหว่างชุดข้อมูลที่วัดมาได้จากสตเทที่มีความไม่เชิงเส้น ซึ่งประมาณให้เป็นเชิงเส้น โดยทำการกระจายเทอมด้วยอนุกรมเทย์เลอร์รอบๆ สตเทนอนินอล ($\mathbf{x}_n$) ที่เวลาอีพอคเริ่มต้น ซึ่งเป็นค่าประมาณ อ้างอิงในช่วงแคบ ๆ และคำนวณเฉพาะเทอมอันดับหนึ่ง มีลักษณะเป็นเชิงเส้น โดยแสดงได้เป็นการประมาณค่าซึ่งเป็นสมการการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียลร่วมกับการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุด

เวกเตอร์แก้ไข $\Delta \mathbf{x}$ ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (30) จะถูกนำมาปรับปรุงโดยการเพิ่มเข้าในเวกเตอร์สตเท $\mathbf{x}$ ณ เวลา t_0 ที่อีพอคเริ่มต้น ค่าเดิม จะได้เวกเตอร์สตเท $\mathbf{x}$ ณ เวลา t_0 ที่อีพอคเริ่มต้นค่าใหม่

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_x}{\partial r_{x_0}} & \frac{\partial r_x}{\partial r_{y_0}} & \frac{\partial r_x}{\partial r_{z_0}} & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial r_y}{\partial r_{x_0}} & \frac{\partial r_y}{\partial r_{y_0}} & \frac{\partial r_y}{\partial r_{z_0}} & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ \frac{\partial r_z}{\partial r_{x_0}} & \frac{\partial r_z}{\partial r_{y_0}} & \frac{\partial r_z}{\partial r_{z_0}} & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial r_{x_0}} & \frac{\partial v_x}{\partial r_{y_0}} & \frac{\partial v_x}{\partial r_{z_0}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial r_{x_0}} & \frac{\partial v_y}{\partial r_{y_0}} & \frac{\partial v_y}{\partial r_{z_0}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r_{x_0}} & \frac{\partial v_z}{\partial r_{y_0}} & \frac{\partial v_z}{\partial r_{z_0}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{7 \times 7} \quad (35)$$

$$\mathbf{x}_{t_0_new} = \mathbf{x}_{t_0_old} + \Delta \mathbf{x}_0 \quad (36)$$

ในการคำนวณตามวิธีทำซ้ำ (iteration method) จะนำค่าเวกเตอร์สตเท $\mathbf{x}$ ณ เวลา t_0 ที่อีพอคเริ่มต้นค่าใหม่ แล้วนำมาทำการแพร่วงโคจรในอนาคต โดยรวมผลของความเร่งที่การรบกวนซึ่งเกิดจากวัตถุสองชิ้นและเทอมที่สองของโซโนลฮาร์โมนิก จะได้ตำแหน่งและความเร็ว ของดาวเทียมวงโคจรต่ำใกล้โลกโดยการแพร่วงโคจรถึงเวลาอีพอคชุดสุดท้ายของข้อมูลแล้วทำการคำนวณใหม่อีกรอบ ที่ทำให้ได้ ค่าผลรวมของผลต่างของ ชุดข้อมูลที่วัดได้ กับข้อมูลนอนินอลที่ได้การคำนวณที่น่าจะเป็นกำลังสอง ซึ่งเป็นค่าริชจวดล ที่น้อยที่สุด ให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ที่ผิดพลาดน้อยที่สุด ทำซ้ำจนลู่เข้า (converge) สูตรค่าตอบค่าที่มีคอสฟังก์ชันน้อยที่สุดสามารถ

คำนวณได้ค่าสเตทที่ดีที่สุดวิธีการนี้ เรียกว่า สมการการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียล

4. ผลการทดสอบ

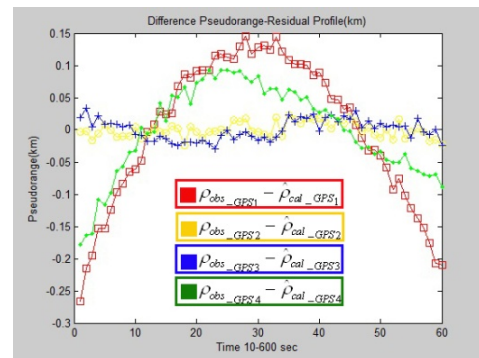
ในการทดสอบการประมาณค่าตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียมวงโคจรต่ำใกล้โลกจากข้อมูลจีพีเอสนี้ ได้มีการจำลองวงโคจรของดาวเทียมไทโพตซึ่งมีระดับความสูง 835 กิโลเมตรจากพื้นโลกมุมเอียง 98 องศา โดยใช้ตัวแปรวงโคจร SGP4 (Simplified General Perturbations 4) [10] ซึ่งรวมผลของศักย์โน้มถ่วงโลกและแรงต้านจากอากาศ (Atmospheric Drag) ทั้งนี้ ตัวแปรวงโคจร SGP4 มีความเหมาะสมกับวงโคจรที่มีคาบเวลาน้อยกว่า 225 นาที สำหรับตัวแปรวงโคจร SDP4 (Simplified Deep Perturbations 4) ถูกใช้ในการจำลองวงโคจรกลุ่มดาวเทียมจีพีเอส เนื่องจากตัวแปรวงโคจร SGP4 มีความเหมาะสมกับวงโคจรที่มีคาบเวลามากกว่า 225 นาที อีกทั้งได้รวมผลกระทบที่เกิดจากดวงจันทร์และดวงอาทิตย์ ทั้งนี้พารามิเตอร์สำหรับการจำลองดาวเทียม วงโคจรใกล้โลก ข้อมูลแสดงในตารางที่ 1 สำหรับงบประมาณค่าความผิดพลาดของระยะเสมือนได้อย่างอิงตาม [11]

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์สำหรับการจำลองดาวเทียมวงโคจรใกล้โลก

	พารามิเตอร์	ค่า	หน่วย
วงโคจร	ความยาวกึ่งแกนเอก	7213	km
	ความรีของวงโคจร	0.0003	-
	มุมเอียงระนาบวงโคจร	98.0	deg

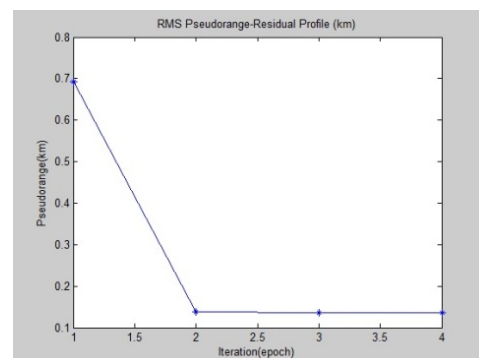
ในบทความนี้ ค่าความผิดพลาดของข้อมูลการวัดถูกสมมุติว่าเป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์ที่มีค่าอาร์เอ็มเอส 10 เมตร [11] ข้อมูลสองบรรทัด (Two-Line Element, TLE) ตามรูปแบบ NORAD ของดาวเทียมไทโพตและกลุ่มดาวเทียมจีพีเอส ถูกใช้เป็นตัวเริ่มต้นสำหรับ ตัวแปรวงโคจร ข้อมูลการวัดระยะเสมือนและตำแหน่งของดาวเทียมจีพีเอส ทุก 10 วินาที ถูกใช้เป็นข้อมูลดิบสำหรับส่วนอินพุต ซึ่งเป็นการกำหนด ค่าเริ่มต้นของตัวประมาณค่าตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียมไทโพต จะถูกคำนวณ และเปรียบเทียบกับค่าอ้างอิงที่ได้จากตัวแปรวงโคจร SGP4

จากการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดรวมกับการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียล ค่าความผิดพลาดข้อมูลการวัด (ดาวเทียมจีพีเอส 4 ดวง) แสดงในรูปที่ 2



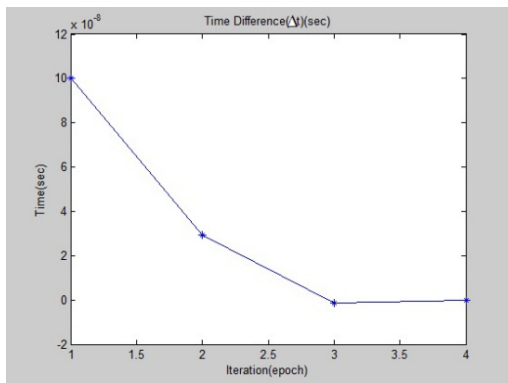
รูปที่ 2 ค่าความผิดพลาดข้อมูลการวัด δp (ดาวเทียมจีพีเอส 4 ดวง)

ทั้งนี้ ในการประมาณค่าหลังจากการทำซ้ำรอบที่สองของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดรวมกับการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียล ค่าเฉลี่ยความผิดพลาดข้อมูลการวัด (ดาวเทียมจีพีเอส 4 ดวง) มีค่าลดลงจากประมาณ 700 เมตร สู่ค่าต่ำสุดประมาณ 135 เมตร ดังแสดงในรูปที่ 3



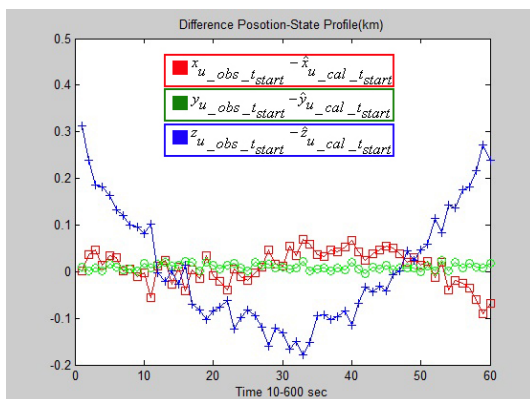
รูปที่ 3 จำนวนรอบทำซ้ำของวิธีกำลังสองน้อยที่สุด และค่าเฉลี่ยความผิดพลาดข้อมูลการวัด (ดาวเทียมจีพีเอส 4 ดวง)

จากที่แสดงในสมการ (16) t_e เป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่ง ที่มีผลต่อการคำนวณค่าตำแหน่งและความเร็วของวงโคจรใกล้โลก ดังนั้นในการประมาณค่าจำเป็นที่จะต้องคำนวณหา δt_e ซึ่งเป็นตัวแปรสุดท้ายของ $\Delta \mathbf{x}$ โดยที่ผลการประมาณค่า δt_e มีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 4 และ ค่าปรับปรุงของ t_e ตามสมการ (31) พร้อมค่าเฉลี่ยความผิดพลาดข้อมูลการวัดแสดง ในตารางที่ 2

รูปที่ 4 ค่าประมาณของ δt_u ตารางที่ 2 ค่าปรับปรุงของ t_u และค่าเฉลี่ย δp

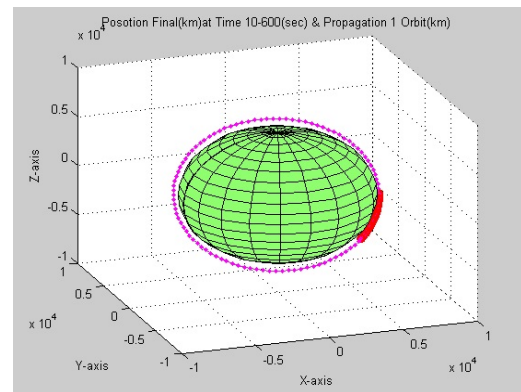
จำนวนรอบ การทำซ้ำ	t_u (วินาที)	ค่าเฉลี่ย δp (เมตร)
1	1.00e-07	692.4149039
2	2.94e-08	138.6906129
3	1.20e-09	134.8648765
4	3.10e-10	134.8203546

จากการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดร่วมกับการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียล ค่าความผิดพลาดในตำแหน่งของดาวเทียมวงโคจร โกล์โลกที่คำนวณได้จากการเปรียบเทียบกับค่าตำแหน่งอ้างอิงแสดงใน รูปที่ 5



รูปที่ 5 ค่าความผิดพลาดในตำแหน่งของดาวเทียมวงโคจรโกล์โลก

หลังจากการประมาณค่าตำแหน่งโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดสามารถคำนวณตำแหน่งของดาวเทียมวงโคจรโกล์โลกเป็นเวลา 600 วินาที หรือ 60 อีพ็อค (เส้นสีแดงหนา) และได้ทำการแพร่วงโคจรเป็นเวลา 1 คาบวงโคจร (เส้นสีม่วง) ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 6 การแพร่วงโคจรเป็นเวลา 1 คาบวงโคจร (เส้นสีม่วง) ภายหลังจากการประมาณค่าตำแหน่งโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นเวลา 600 วินาที (เส้นสีแดงหนา)

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของค่าความแตกต่างในตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียมวงโคจรโกล์โลก

ค่าความแตกต่าง	ค่าเฉลี่ย	ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน
δx_u	-1.66 เมตร	7.91E-04 เมตร
δy_u	-0.90 เมตร	1.53 E-05 เมตร
δz_u	2.17 เมตร	1.57 E-02 เมตร
δv_x	-2.47E-04 เมตร/ วินาที	3.09E-10 เมตร/วินาที
δv_y	3.68E-06 เมตร/ วินาที	6.16E-12 เมตร/วินาที
δv_z	-3.19E-05 เมตร/ วินาที	2.46E-09 เมตร/วินาที

ความน่าเชื่อถือในเชิงสถิติของค่าสเททที่คำนวณได้ สอดคล้องกับค่า เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ตามตารางที่ 4 ค่าความแปรปรวนของตำแหน่ง (ค่าที่ขีดเส้นใต้ตามแนวเส้นทแยงมุม) ที่ตำแหน่ง y_u มีค่าความแปรปรวน น้อยที่สุดเท่ากับ 4.67E-02 ซึ่งสอดคล้องกับค่าเฉลี่ย จากการประมาณค่าตำแหน่ง y_u มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ -0.90 เมตร ตามตารางที่ 3

ส่วนค่าความแปรปรวน ของความเร็ว(ค่าที่ขีดเส้นใต้ตามแนวเส้นทแยงมุม) ที่ความเร็ว v_y มีค่าความแปรปรวนน้อยที่สุดเท่ากับ 3.72E-07 เมตร/วินาที ซึ่งสอดคล้องกับค่าเฉลี่ยจากการประมาณค่าความเร็ว v_y มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ 3.68E-06 เมตร/วินาที ตามตารางที่ 3

ค่าความแปรปรวน ของสเททมีค่าที่น้อยและมีค่าสอดคล้องกับค่าเฉลี่ย จากการประมาณค่าสเทท แสดงถึงมีค่าความแตกต่างน้อย มีค่าความถูกต้องและความน่าเชื่อถือในเชิงสถิติสูง ทำให้ค่าสเททที่

คำนวณได้ มีความแม่นยำสูง

ส่วนค่าความแปรปรวนร่วมของสเตท (ค่าที่อยู่นอกเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์) มีค่าอยู่ในช่วง $2.10\text{E-}02$ ถึง $-1.07\text{E-}01$ ตามตารางที่

4 ซึ่งเป็นค่าที่น้อยมากแสดงถึงความสัมพันธ์กันของสเตทแต่ละค่ามีอิสระต่อกันและไม่เกิดปัญหาสัมพันธ์กัน

ตารางที่ 4 แสดงค่าความแปรปรวนในเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม(ค่าที่ขีดเส้นใต้ตามแนวเส้นทแยงมุม)

$\sigma_{x_u}^2$	$\sigma_{y_u}^2$	$\sigma_{z_u}^2$	$\sigma_{v_x}^2$	$\sigma_{v_y}^2$	$\sigma_{v_z}^2$	$\sigma_{t_u}^2$
<u>1.43E-01</u>	2.10E-02	-1.08E-01	-3.01E-04	-4.12E-05	1.91E-04	-5.27E-08
2.10E-02	<u>4.67E-02</u>	-1.33E-02	-4.12E-05	-1.14E-04	1.80E-05	-1.05E-08
-1.08E-01	-1.33E-02	<u>1.44E-01</u>	1.91E-04	1.80E-05	-2.54E-04	7.21E-08
-3.01E-04	-4.12E-05	1.91E-04	<u>9.86E-07</u>	1.35E-07	-6.27E-07	3.00E-15
-4.12E-05	-1.14E-04	1.80E-05	1.35E-07	<u>3.72E-07</u>	-5.91E-08	-1.00E-15
1.91E-04	1.80E-05	-2.54E-04	-6.27E-07	-5.91E-08	<u>8.31E-07</u>	-1.20E-14
-5.27E-08	-1.05E-08	7.21E-08	3.00E-15	-1.00E-15	-1.20E-14	<u>1.25E-13</u>

ส่วนค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของตำแหน่งมีค่าอยู่ในช่วง $3.79\text{E-}01$ ถึง $2.16\text{E-}01$ และความเร็ว มีค่าอยู่ในช่วง $9.93\text{E-}04$ ถึง $6.10\text{E-}04$ ตามตารางที่ 5 ซึ่งเป็นค่าที่น้อยมากแสดงถึงมีความผิดพลาดต่ำ มีค่าความถูกต้องความน่าเชื่อถือในเชิงสถิติของค่าสเตทที่คำนวณได้ มีความแม่นยำสูง

ตารางที่ 5 แสดงค่าความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของสเตทในเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

ค่าสเตท	ความแปรปรวน	ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ค่าตำแหน่ง x_u	1.43E-01	3.78E-01
ค่าตำแหน่ง y_u	4.67E-02	2.16E-01
ค่าตำแหน่ง z_u	1.44E-01	3.79E-01
ค่าความเร็ว v_x	9.86E-07	9.93E-04
ค่าความเร็ว v_y	3.72E-07	6.10E-04
ค่าความเร็ว v_z	8.31E-07	9.12E-04
ค่าฐานเวลา t_u	1.25E-13	3.54E-07

5. สรุป

บทความนี้ได้ศึกษาและออกแบบตัวประมาณค่าที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด ร่วมกับการนำเทคนิคการแก้ไขแบบดิฟเฟอเรนเชียลมาประยุกต์ใช้เพื่อประมาณค่าตำแหน่งและความเร็วของดาวเทียม จากข้อมูลการวัดจีพีเอส โดยที่พลวัตการเคลื่อนที่ของดาวเทียมและการรบกวนวงโคจรเนื่องจากความไม่กลมของโลกโดยเฉพาะฮาร์มอนิกที่สองของโซนอล ได้ถูกนำมาพิจารณาในบทความนี้ จากการจำลองการทำงานพบว่าค่าตำแหน่งและความเร็วที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าอ้างอิงที่ได้จากตัวแพร่วงโคจรที่เป็นที่ยอมรับ อาทิ SGP4 อย่างไรก็ตามผลลัพธ์จากบทความนี้จะเป็แนวทาง ในการพัฒนาบทความด้านนี้ในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

- [1] สมภพ ภูริวิทย์พงศ์ และสุวัฒน์ กุลธนปริดา “การคำนวณทางโคจรดาวเทียมวงโคจรโลกต่ำ โดยใช้ข้อมูลการวัดสัญญาณจีพีเอส” วิทยานิพนธ์การศึกษาระดับปริญญาโท สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย 30 มิถุนายน 2549
- [2] E.D. Kaplan and C. Hegarty, Understanding GPS: Principles and Applications, 2nd edition, Artech House, 2005.
- [3] R.E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems”, Journal of Basic Engineering, Vol. 82, 1960, pp. 35–45.
- [4] F. Gustafsson, and et al., "Particle filters for positioning, navigation, and tracking," Signal Processing, IEEE Transactions on , Vol. 50, No. 2, Feb 2002, pp.425-437.
- [5] E.A Wan and R. Van der Merwe, "The unscented Kalman filter for nonlinear estimation", Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000, AS-SPCC The IEEE 2000, pp.153-158.
- [6] O. Montenbruck and E. Gill, Satellite Orbits: Models Methods and Applications, Springer, 2011.
- [7] D.A. Vallado and W.D. McClain, Fundamentals of Astrodynamics and Applications, 3rd edition, Microcosm Press/Springer, 2007.
- [8] D.A. Vallado, and S.S. Carter, Accurate Orbit Determination from Short-arc Dense Observational Data, AS 97-704, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist conference, Sun Valley, Idaho, August, 1997.
- [9] Y. Hashida, Mathematical Specification of Experimental Orbit Determination of GEO Satellites, Surrey Space Centre, October, 2004.
- [10] F.R. Hoots, and R.L. Roehrich, Models for Propagation of NORAD Element Sets, Project Spacetrack Report Number 3, Aerospace Defense Center, December, 1980.
- [11] B.W. Parkinson, GPS Performance and Error Analysis, Global Positioning System: Theory and Applications, Vol. 2, 1996, pp. 469-772



นายประมินทร์ พิษิตการคำ สำเร็จ
การศึกษาระดับปริญญาตรี สาขา
วิศวกรรมไฟฟ้า พ.ศ.2552 จาก
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
ปัจจุบันกำลังศึกษาระดับปริญญาโท
สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า สาขาย่อย
วิศวกรรมดาวเทียม มหาวิทยาลัย
เทคโนโลยีมหานคร ปัจจุบันดำรง
ตำแหน่งวิศวกร(ฝ่ายรับสัญญาณ
ดาวเทียม) สำนักปฏิบัติการดาวเทียม

(ลาดกระบัง) สำนักงานพัฒนาเทคโนโลยีอวกาศและภูมิสารสนเทศ มีความ
สนใจในงานวิจัยด้านวงโคจรดาวเทียม



รศ.ดร. สมภพ ภูริวิริยพงศ์ สำเร็จ
การศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาฟิสิกส์
ประยุกต์พ.ศ.2531 ระดับปริญญาโท
สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า พ.ศ.2437จาก
สถาบันพระจอมเกล้าคุณทหารลาดกระบัง
และ ระดับปริญญาเอก สาขา
วิศวกรรมไฟฟ้าจาก University of Surrey
พ.ศ.2544 ปัจจุบันดำรงตำแหน่งรอง
อธิการบดี มหาวิทยาลัย เทคโนโลยีมหา-
นคร