

(Invited Paper)

ตัวกรองนอตช์แบบปรับตัว Adaptive Notch Filter

ราชู พันธุ์ฉลาด

ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

140 ถ.เชื่อมสัมพันธ์ หนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: rachu@mut.ac.th

Manuscript received April 11, 2011

Revised April 18, 2011

บทคัดย่อ

ตัวกรองนอตช์แบบปรับตัวเป็นตัวกรองที่สามารถปรับผลตอบสนองทางความถี่ได้ด้วยตัวเองโดยอาศัยอัลกอริธึมทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ตัวกรองชนิดนี้มีความน่าสนใจเนื่องจากสามารถนำไปใช้งานได้หลายประเภท เช่น ในงานทางด้านวิศวกรรมควบคุม วิศวกรรมชีวการแพทย์ วิศวกรรมไฟฟ้ากำลัง หรือวิศวกรรมการสื่อสาร บทความนี้ได้กล่าวถึงงานวิจัยบางส่วนที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองชนิดนี้ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักวิจัยรุ่นใหม่ที่มีความสนใจใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาตัวกรองนี้ต่อไปในอนาคต

คำสำคัญ: ตัวกรองนอตช์แบบปรับตัว, อัลกอริธึมเกรเดียนต์

ABSTRACT

An adaptive notch filter can adjust its frequency response by itself by using the appropriated mathematical algorithm. This filter is interesting because it can be found in many digital signal processing applications such as control engineering, biomedical engineering, electrical power engineering, or telecommunication engineering. This paper presents the review of the researches concerning the adaptive notch filter. The objective is to provide the next generation of researcher the guidance for future development of this filter.

Keywords: Adaptive Notch Filter, Gradient Algorithm

1. บทนำ

เป็นที่ทราบกันทั่วไปว่า ตัวกรองนอตช์นั้น ถูกนำไปใช้เพื่อกำจัดองค์ประกอบความถี่ที่ไม่ต้องการของสัญญาณ ตัวกรองประเภทนี้ถูกออกแบบให้มีค่าการลดทอนที่สูงสำหรับความถี่ของสัญญาณที่ไม่ต้องการ ในขณะที่เดียวกันก็ยอมให้องค์ประกอบความถี่ของสัญญาณที่ต้องการเดินทางผ่านตัวกรองไปโดยปราศจากความผิดเพี้ยน โดยทั่วไป ตัวกรองนอตช์จะถูกออกแบบให้มีแบนด์วิดท์แคบมาก ทั้งนี้เพราะมีการประยุกต์ใช้งานทางด้านการวัด (measurement) และการประมวลผลสัญญาณ (signal processing) บางอย่างมีความต้องการกำจัดสัญญาณแบนด์วิดท์แคบหรือสัญญาณรูปคลื่นไซน์ที่แทรกสอดเข้ามาในระบบ ซึ่งเราจะพบการประยุกต์ดังกล่าวในงานทางด้านวิศวกรรมชีวการแพทย์ (biomedical engineering) และวิศวกรรมไฟฟ้า (electrical engineering) ในหลายแขนงอันประกอบด้วย วิศวกรรมการสื่อสาร (communication engineering) วิศวกรรมไฟฟ้ากำลัง (electrical power engineering) และวิศวกรรมระบบควบคุม (control engineering) เป็นต้น หนึ่งใน การประยุกต์ทางด้านการวิศวกรรมชีวการแพทย์ คือ การกำจัดสัญญาณเพาเวอร์ไลน์ (power line) และสัญญาณแทรกสอดอื่นๆ ที่เห็นย่นเข้าไประบบการวัดและ

บันทึกสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (electrocardiogram หรือ ECG) ของผู้ป่วย [1]-[6] สำหรับการนำไปใช้ในด้านวิศวกรรมการสื่อสาร คือ นำไปกำจัด (suppress) สัญญาณแทรกสอดแบบคิวิตซ์แคบในระบบสื่อสารแบบ DS-spread spectrum [7] และนำไปกำจัดสัญญาณเสียงหึ่ง (humming) ในระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่จีเอสเอ็ม (GSM : Global System for Mobile communications) [8] ทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้ากำลังได้นำตัวกรองนอตช์ไปใช้สำหรับการประมาณค่าความถี่ของสัญญาณเพาเวอร์ไลน์ (power system frequency estimation) [9] นอกจากนี้ที่กล่าวมาแล้ว ตัวกรองนอตช์ยังถูกนำไปใช้สำหรับควบคุมการป้อนกลับของสัญญาณเสียงที่เกิดขึ้นในระบบเสียง (acoustic feedback control in audio system) อีกด้วย [10]-[13] จากตัวอย่างการประยุกต์ใช้งานของตัวกรองนอตช์ที่กล่าวมานั้นสามารถกล่าวได้ว่า ตัวกรองนอตช์เป็นเป็นตัวกรองที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้หลากหลาย ทำให้ตัวกรองชนิดนี้มีคุณค่าทั้งในแง่ของการวิจัยและพัฒนานับแต่อดีตมาจนถึงปัจจุบัน

ในการออกแบบตัวกรองนอตช์ในทางปฏิบัติ นั้นนับว่าเป็นเรื่องยากพอสมควร โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อสัญญาณที่ต้องการกำจัดมีแบนด์วิดท์ที่แคบมาก นอกจากนี้ยังมีปัจจัยอื่นๆ อีกเช่น ความต้องการผลตอบสนองทางเฟสแบบเชิงเส้น (linear phase response) และต้องการให้ตัวกรองมีผลตอบสนองชั่วคราวสั้น (short transient response) เป็นต้น ตัวกรองนอตช์ที่เรารู้จักในบทความนี้เป็นตัวกรองนอตช์แบบดิจิทัลเท่านั้น ซึ่งตัวกรองชนิดนี้สามารถสร้างขึ้นได้ทั้งในรูปแบบเอฟไออาร์ (FIR : finite impulse response) และแบบไอไออาร์ (IIR : infinite impulse response) โดยทั่วไป โครงสร้างตัวกรองแบบไอไออาร์ต้องการอันดับ (order) ของตัวกรองน้อยกว่าโครงสร้างแบบเอฟไออาร์ เมื่อเปรียบเทียบกันที่ผลตอบสนองทางขนาดต่อความถี่ใกล้เคียงกัน อย่างไรก็ตาม โครงสร้างแบบไอไออาร์ก็มีปัญหาทางด้านเสถียรภาพมากกว่า นอกจากนี้ มันยังให้ผลตอบสนองทางเฟสที่ไม่เชิงเส้นอีกด้วย ในขณะที่ตัวกรองแบบเอฟไออาร์เป็นตัวกรองที่มีเสถียรภาพแบบไร้เงื่อนไขและให้ผลตอบสนองทางเฟสแบบเชิงเส้นตามธรรมชาติ แต่จากการที่ตัวกรองแบบเอฟไออาร์ต้องการอันดับมาก ทำให้สัญญาณมีการประวิงสูง ในส่วนของรายละเอียดเกี่ยวกับการ

ออกแบบตัวกรองนอตช์ทั้งแบบเอฟไออาร์และไอไออาร์ ผู้อ่านที่มีความสนใจสามารถสืบค้นได้จากบทความ [14]-[16]

ตัวกรองนอตช์ที่มีการทำวิจัยกันมาตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบันยังสามารถแบ่งได้อีกสามกลุ่มคือ 1. ตัวกรองนอตช์แบบคงที่ (fixed notch filter) [3], [14]-[16] ตัวกรองแบบนี้ถูกออกแบบให้ทำงานเฉพาะแถบความถี่ใดความถี่หนึ่งที่กำหนดไว้ก่อนล่วงหน้า 2. ตัวกรองนอตช์แบบจูนได้ (tunable notch filter) [17] ตัวกรองแบบนี้มีลักษณะคล้ายกับตัวกรองชนิดแรกแต่มันสามารถย้ายไปทำงานในแถบความถี่อื่นๆ ได้ และ 3. ตัวกรองนอตช์แบบปรับตัว (adaptive notch filter) [1]-[5], [7], [9]-[13], [18]-[43], [46] ตัวกรองชนิดนี้ถูกนำไปใช้ในสถานการณ์ที่ลักษณะเฉพาะ (characteristic) ของสัญญาณที่ถูกประมวลผลมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งตัวกรองจะพยายามปรับตัวเองให้สัมพันธ์กับสัญญาณที่อินพุตของตัวกรอง

ตัวกรองนอตช์แบบปรับตัวจะมีสามประสิทธิภาพตามเวลา ซึ่งสามประสิทธิภาพของตัวกรองจะถูกปรับอย่างต่อเนื่องโดยอาศัยเกณฑ์ที่เหมาะสม (optimum criterion) เกณฑ์ที่เหมาะสม รูปแบบหนึ่งที่ได้รับค่านิยมกันมากคือ เกณฑ์แบบกำลังสองน้อยที่สุด (least mean-square criterion : LMS) [3]-[4] ซึ่งถูกนำไปใช้กำจัดสัญญาณแทรกสอดรูปคลื่นไซน์ อย่างไรก็ตาม แม้ว่าเกณฑ์แบบ LMS จะได้รับความนิยมเนื่องจากความง่ายและนำไปสู่การปฏิบัติจริง (realization) ได้ง่าย แต่ข้อเสียคือ ตัวกรองจะลู่เข้าสู่ค่าตอบได้ช้าเมื่อแบนด์วิดท์ของตัวกรองมีค่าน้อยแต่นำเกณฑ์แบบอื่น เช่น เกณฑ์แบบกำลังสองน้อยที่สุดที่มีการป้อนกลับ (recursive least-squared criterion : RLS) [5] มาใช้แทน แม้ว่าจะสามารถแก้ปัญหากลุ่มเข้าที่ช้าได้แต่ต้องแลกด้วยการคำนวณที่สูงด้วย มีอัลกอริทึมชนิดหนึ่งที่ถูกนำไปใช้กับตัวกรองนอตช์และสามารถเทียบเคียงได้กับอัลกอริทึมแบบ LMS คืออัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดา (plain gradient algorithm : PG) [36] ซึ่งต่อมาอัลกอริทึม PG ได้ถูกนำมาวิเคราะห์สมรรถนะทางด้านสถิติจนได้ผลที่น่าเชื่อถือทั้งในกรณีที่ความถี่ของสัญญาณเป็นค่าคงที่ [37] และความถี่แปรตามเวลาอย่างช้าๆ [38] นอกจากอัลกอริทึม PG แล้วยังมีอัลกอริทึมอื่นๆ อีกที่ถูกนำไปใช้ร่วมกันตัวกรองนอตช์เช่น อัลกอริทึมเครื่องหมาย (sign algorithm : SA) [30], [39]-[40] อัลกอริทึมเกรเดียนต์แบบนอร์มอล

ไลซ์ (normalized gradient : NG) [36], [40] อัลกอริทึมแบบทำนายค่าคลาดเคลื่อนแบบป้อนกลับ (recursive prediction error : RPE) [41] อัลกอริทึมกำลังพี (p -power : PP) [42] อัลกอริทึมเกรเดียนต์ไม่เชิงเส้นไร้หน่วยความจำ (memoryless nonlinear gradient : MNG) [43] อัลกอริทึมเกรเดียนต์แบบปรับ สเต็ปไซส์ (variable step size : VS) [30], [34] อัลกอริทึมเกรเดียนต์แบบใช้เกณฑ์แบบใหม่ [21] อัลกอริทึมเครื่องหมายแบบใช้เกณฑ์แบบใหม่ [22] อัลกอริทึมเกรเดียนต์แบบไร้ไบแอส [23]-[24], [27], [32] อัลกอริทึมแบบแทนเจนต์ผกผัน (inverse tangent IT) [28] อัลกอริทึมแบบต่างๆดังที่กล่าวมา จะให้ข้อดีและข้อเสียแตกต่างกัน โดยทั่วไปแล้วอัลกอริทึมเหล่านี้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมแบบ PG ทั้งนี้เพราะพวกมันถูกพัฒนามาจากอัลกอริทึมแบบ PG นั่นเอง

จากที่กล่าวมาแล้วว่า ตัวกรองนอตช์สามารถสร้างในรูปแบบ IIR หรือ FIR ก็ได้ รูปแบบตัวกรองแบบ IIR ที่นิยมใช้กันจะมีด้วยกันสามรูปแบบคือ แบบพินปลา (lattice) [39] แบบไบลิเนียร์ (bilinear) [40] และแบบบังคับโพลและซีโรว์ [41] แต่เราพบว่า ตัวกรอง IIR แบบบังคับโพลและซีโรว์จะได้รับความนิยมมากที่สุด และในบทความนี้ ก็จะมุ่งเน้นไปที่ตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบหลังนี้เท่านั้น สำหรับตัวกรองนอตช์รูปแบบ FIR นั้นจะมีทั้งแบบมากกว่าสองอันดับ [14]-[15] และแบบอันดับสอง [19]-[20]

ในการนำตัวกรองนอตช์ไปใช้สำหรับการประมาณค่าความถี่ นั้นจะมีอยู่ด้วยกันสองวิธี คือ การประมาณค่าความถี่โดยตรง [20],[25],[32],[35],[46] และโดยอ้อม [18]-[19], [21]-[24], [26]-[31], [33]-[34], [36]-[43] โดยทั่วไป การประมาณค่าความถี่โดยตรง จะให้สมรรถนะที่เหนือกว่าการประมาณค่าความถี่โดยอ้อมแต่มีข้อเสีย คือ ต้องมีการเก็บข้อมูลในรูปแบบตาราง (lookup table) ไว้ก่อนล่วงหน้าเพื่อนำไปใช้สำหรับการเปรียบเทียบเทียบกับค่าที่ประมาณได้จริง จึงทำให้การประมาณค่าความถี่โดยตรงใช้จำนวนหน่วยความจำมากกว่าการประมาณค่าความถี่โดยอ้อม

บทความนี้กล่าวถึงตัวกรองดิจิทัลนอตช์แบบปรับตัวอันดับสองทั้งแบบ FIR และ IIR ที่ทำงานร่วมกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์แบบต่างๆที่ผู้แต่งได้เคยนำเสนอมาแล้วในอดีต โดยจะเริ่มจากตัวกรองแบบ FIR ก่อนและตามด้วยตัวกรองแบบ IIR ในบทความนี้

เราได้แสดงสมรรถนะของตัวกรองนอตช์ที่ทำงานร่วมกับอัลกอริทึมที่กล่าวถึงผ่านทางผลการประยุกต์ใช้งานทางด้านการประมาณค่าความถี่ที่แต่ไม่ทราบค่าของสัญญาณรูปคลื่นไซน์ความถี่เดียวเท่านั้น โดยอาศัยการจำลองการทำงานด้วยโปรแกรมประยุกต์ MATLAB

2. ตัวกรองดิจิทัลนอตช์ FIR และ IIR แบบปรับตัวอันดับสอง

ในหัวข้อนี้ขอกล่าวถึงตัวกรองนอตช์ทั้งแบบ FIR และ IIR อันดับสองโดยจะขอแยกออกเป็นสองประเภทคือ แบบการประมาณค่าความถี่โดยอ้อมและแบบการประมาณค่าความถี่โดยตรง ดังนี้

2.1 ตัวกรองนอตช์ FIR แบบการประมาณค่าความถี่โดยอ้อม

ตัวกรองนอตช์ FIR อันดับสองแบบการประมาณค่าความถี่โดยอ้อมมีฟังก์ชันของระบบ $H(z)$ ดังนี้ [19]

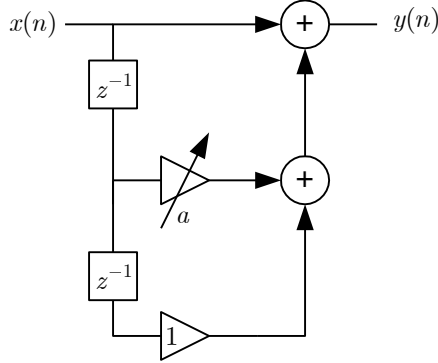
$$H(z) = 1 + az^{-1} + z^{-2} \quad (1)$$

เมื่อ a คือสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่จะถูกปรับด้วยอัลกอริทึมแบบเกรเดียนต์ ถ้านำสมการที่ (1) ไปสู่การปฏิบัติจริงโดยอาศัยโครงสร้างโดยตรง (direct form) [44] จะได้ดังรูปที่ 1 จากรูปพบว่า ตัวกรองนี้ต้องการตัวประวิง (delay) 2 ตัว ตัวบวก 2 ตัวและตัวคูณ 1 ตัว เพื่อที่จะคูณผลตอบสนองทางความถี่และเฟสของตัวกรอง เราจะจัดรูปสมการที่ (1) ใหม่และแทน z ด้วย $e^{j\omega}$ โดยที่ ω คือความถี่ดิจิทัล ลงในสมการที่ (1) ดังนี้

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 + az^{-1} + z^{-2} \frac{z}{z} \\ &= z + a + z^{-1} z^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

เมื่อแทน $z = e^{j\omega}$ จะได้

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= e^{j\omega} + a + e^{-j\omega} e^{-j\omega} \\
 &= 2 \cos \omega + a e^{-j\omega}
 \end{aligned}
 \quad (3)$$



รูปที่ 1 โครงสร้างแบบโดยตรงของตัวกรองนอด้ FIR อันดับสอง

จากสมการที่ (3) ทำให้เราได้ผลตอบสนองทางขนาดและเฟสต่อความถี่ตามลำดับ ดังนี้

$$|H(e^{j\omega})| = |2 \cos \omega + a| \quad (4.1)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega \quad (4.2)$$

จากสมการที่ (4.1) พบว่า สมการจะเท่ากับศูนย์มีเพียงกรณีเดียวคือเมื่อ $a = -2 \cos \omega$ ดังนั้นถ้าอินพุต $x(n)$ ของตัวกรองเป็นสัญญาณรูปคลื่นไซน์ที่มีค่าดังสมการ

$$x(n) = A \cos \omega_0 n + \phi \quad (5)$$

โดยที่ n คำนวณเวลา (time index) A คือแอมพลิจูด ω_0 คือความถี่ของสัญญาณและ ϕ คือเฟสของสัญญาณ แล้วเราจะได้ความสัมพันธ์

$$a_0 = -2 \cos \omega_0 \quad (6)$$

เนื่องจาก $\omega \in [0, \pi]$ ทำให้ $a \in [-2, 2]$ ในกรณีที่ความถี่ของสัญญาณรูปคลื่นไซน์มีการแปรตามเวลาซึ่งมีค่าดังสมการ

$$x(n) = A \cos \omega_0(n)n + \phi \quad (7)$$

สมการที่ (6) จะกลายเป็น

$$a_0(n) = -2 \cos \omega_0(n) \quad (8)$$

ในกรณีเช่นนี้ จึงมีความจำเป็นต้องนำอัลกอริทึมแบบปรับตัวมาทำงานร่วมกับตัวกรองนอด้เพื่อปรับสัมประสิทธิ์ $a_0(n)$ สำหรับติดตามค่าความถี่ $\omega_0(n)$ ของสัญญาณที่อินพุต จากการที่ตัวกรองชนิดนี้ได้ติดตามค่าความถี่ผ่านทางสัมประสิทธิ์ $a_0(n)$ จึงเรียกการประมาณค่าความถี่แบบนี้ว่า การประมาณค่าความถี่โดยอ้อม พิจารณาผลตอบสนองทางเฟสในสมการที่ (4.2) พบว่า ตัวกรองนี้ให้ผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้นตามธรรมชาติดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 1 ตัวอย่างรูปร่างผลตอบสนองทางความถี่ในสมการที่ (4) เมื่อกำหนดให้ $a = a_0 = 0$ หรือ $\omega_0 = \pi/2$ แสดงดังรูปที่ 2 จากรูปจะพบว่า สมการที่ (1) ให้ผลตอบสนองทางขนาดแบบตัวกรองนอด้ที่มีแบนด์วิดท์กว้างและไม่สามารถลดหรือเพิ่มได้อีก ดังนั้นการจะนำตัวกรองนี้ไปใช้สำหรับกำจัดสัญญาณแทรกสอดแบบแค้วิตีแค้บจึงไม่เหมาะสม อย่างไรก็ตามหากจะนำตัวกรองนี้ไปใช้เพื่อการประมาณค่าความถี่ (frequency estimation) ก็สามารทำได้

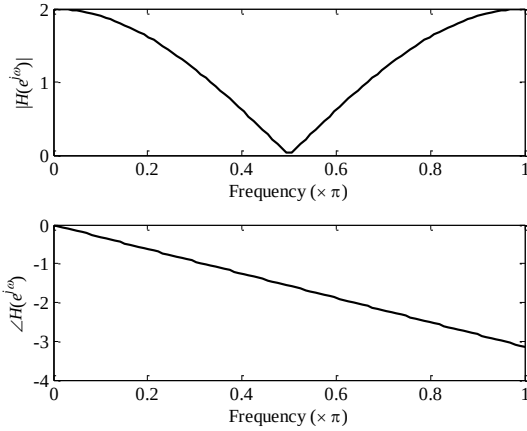
ต่อไปจะขอก้าวถึงอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดาที่ใช้สำหรับปรับสัมประสิทธิ์ a ของตัวกรอง ในเบื้องต้น เราจะนิยามสมการผลต่างที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุต $x(n)$ และเอาต์พุต $y(n)$ ของตัวกรอง ดังนี้

$$y(n) = x(n) + ax(n-1) + x(n-2) \quad (9)$$

จากธรรมชาติของตัวกรองนอด้เราพบว่า $y(n) \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ดังนั้นเราจึงมองได้ว่า $y(n)$ เป็นสัญญาณค่าคลาดเคลื่อน (error signal) ได้ โดยเราสามารถนำไปใช้เป็นเกณฑ์สำหรับการปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองได้ ซึ่งเกณฑ์ที่อัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดานำมาใช้คือค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองเฉลี่ย

$J(a)$ คำนี

$$J(a) = E[y^2(n)] \quad (10)$$



รูปที่ 2 ผลตอบสนองทางขนาด (บน) และเฟส (ล่าง) ของตัวกรอง
นอตช์แบบ FIR อันดับสองแบบประมาณความถี่โดยอ้อม

เมื่อ $E[\bullet]$ ตัวกระทำค่าคาดหวังทางสถิติ (expectation operator) สาเหตุที่เราต้องใช้ $E[\bullet]$ มาช่วยในการคำนวณค่าเกณฑ์ของอัลกอริทึมเกรเดียนต์ก็เนื่องจากในความเป็นจริงแล้ว สัญญาณรูปคลื่นไซน์ที่เราต้องการประมาณค่าความถี่จะมีสัญญาณรบกวนรวมอยู่ด้วย ก่อนที่จะดำเนินการต่อไป ในเบื้องต้น จะขอกำหนดให้สัญญาณอินพุตประกอบด้วยสัญญาณรูปคลื่นไซน์ที่มีแอมพลิจูด A ความถี่ ω_0 คงที่แต่ไม่ทราบค่า และเฟส ϕ เป็นตัวแปรสุ่มเพียงตัวแปรเดียว โดยจะกำหนดให้เฟสเป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบสม่ำเสมอ (uniform distribution) ในช่วง 0 ถึง 2π รวมอยู่กับสัญญาณรบกวน $v(n)$ แบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และมีค่าความแปรปรวนเป็น σ_v^2 ดังสมการ

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) + v(n) \quad (11)$$

และเพื่อให้ง่าย จะสมมติต่อไปว่า ตัวกรองในสมการที่ (1) เป็นตัวกรองแบบเชิงเส้นและไม่แปรตามเวลา ดังนั้น ทำให้ค่าในสมการที่

(8) มีค่าเทียบเคียงกับค่ายกกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณเอาต์พุตของตัวกรอง ซึ่งมีค่าดังนี้

$$J(a) = E[y^2(n)] \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega) d\omega$$

เมื่อ $S_x(\omega)$ คือความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังงานของสัญญาณ $x(n)$ ซึ่งมีค่าดังนี้

$$S_x(\omega) = \frac{A^2}{4} \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + \sigma_v^2 \quad (13)$$

เมื่อแทนค่าในสมการที่ (4.1) และ (13) ลงในสมการที่ (12) ผลที่ได้คือ

$$J(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{A^2}{4} \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right] + \sigma_v^2 \right] |2 \cos \omega + a|^2 d\omega$$

$$= \frac{A^2}{2} |2 \cos \omega_0 + a|^2 + \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |2 \cos \omega + a|^2 d\omega \quad (14)$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปว่า

$$J(a) = \frac{A^2}{2} |H(e^{j\omega_0})|^2 + \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (15)$$

ต่อไปจะคำนวณค่าในพจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการที่ (15) เนื่องจาก $2 \cos \omega + a$ เป็นค่าจริงสำหรับทุกค่าของ $\omega \in [0, \pi]$

และ $a \in [-2, 2]$ ดังนั้นจะสามารถเปลี่ยน $|2 \cos \omega + a|^2$ ไปเป็น $2 \cos \omega + a^2$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ = \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos \omega + a^2 d\omega \\ = \sigma_v^2(2 + a^2) \end{aligned} \quad (16)$$

สุดท้ายจะได้ว่า

$$J(a) = \frac{A^2}{2} |2 \cos \omega_0 + a|^2 + \sigma_v^2(2 + a^2) \quad (17)$$

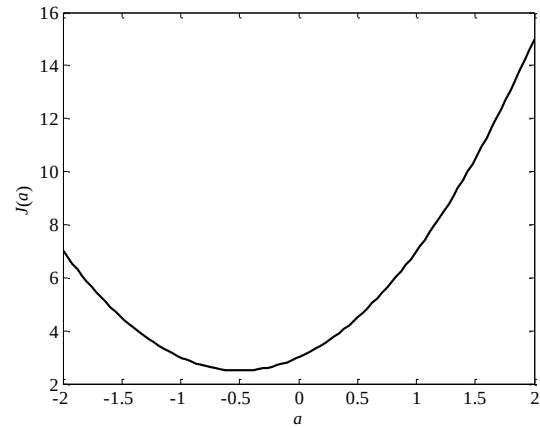
สมการที่ (17) ถูกเรียกว่า ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อน (error function) ซึ่งพบว่าฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนดังกล่าวจะขึ้นกับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองเท่านั้น ทั้งนี้เพราะเราได้สมมติว่า ตัวแปรอื่นๆเป็นค่าคงที่ พจน์แรกทางด้านขวาเป็นผลอันเนื่องจากสัญญาณรูปคลื่นไซน์ ส่วนพจน์ที่สองทางด้านขวาเป็นผลอันเนื่องจากสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน ในทางปฏิบัติ สัญญาณรูปคลื่นไซน์อาจมีขนาด ความถี่ และเฟสแปรเปลี่ยนตามเวลาไปพร้อมกัน ในกรณีเช่นนี้เราจะไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนที่แน่นอนได้ เมื่อนำฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนตามสมการที่ (17) ไปวาดกราฟโดยกำหนดให้ $A = \sqrt{2}$ $\omega_0 = \pi/3$ $\sigma_v^2 = 1$ และ $a \in [-2, 2]$ จะได้ผลดังรูปที่ 3 จากรูปจะพบว่า รูปร่างของฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนมีลักษณะเหมือนรูปชาม (bowl) จากที่กล่าวข้างต้นว่า อัลกอริทึมเกรเดียนต์แบบธรรมดาจะใช้นั้นจะใช้ $J(a)$ เป็นเกณฑ์ในการปรับสัมประสิทธิ์ a ของตัวกรอง โดยกำหนดว่า

$$a_{\text{opt}} = \arg \min_a J(a) \quad (18)$$

เมื่อ $\text{opt} = \text{optimum}$

สมการที่ (18) หมายความว่า ค่าสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสมจะมีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ a ที่ทำให้ $J(a)$ มีค่าต่ำที่สุดนั่นเอง ซึ่งเราสามารถคำนวณค่าตามสมการที่ (18) ได้โดยการทำอนุพันธ์ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อน $J(a)$ เทียบกับสัมประสิทธิ์ a และกำหนดให้ผล

การทำอนุพันธ์เท่ากับศูนย์ จากนั้นแก้สมการเพื่อหาค่า a ก็จะได้ค่า a_{opt} ตามสมการที่ (18) เมื่อดำเนินการตามที่กล่าวมา ผลที่ได้ก็คือ



รูปที่ 3 รูปร่างของฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อน

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(a)}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{A^2}{2} 2 \cos \omega_0 + a^2 + \sigma_v^2(2 + a^2) \right] = 0 \\ &= \frac{A^2}{2} 4 \cos \omega_0 + 2a + 2a\sigma_v^2 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

เมื่อแก้สมการที่ (19) จะได้

$$\begin{aligned} a &= a_{\text{opt}} = \frac{A^2}{A^2 + 2\sigma_v^2} - 2 \cos \omega_0 \\ &= \frac{A^2}{A^2 + 2\sigma_v^2} a_0 \end{aligned} \quad (20)$$

ถ้าเราแทน $A = \sqrt{2}$ และ $\sigma_v^2 = 1$ (ค่าตัวแปรที่ใช้วาดกราฟในรูปที่ 3 แต่ไม่คำนึงถึงค่า ω_0) ลงในสมการที่ (20) ผลที่ได้ก็คือ

$$a = a_{\text{opt}} = \frac{1}{2} a_0 \quad (21)$$

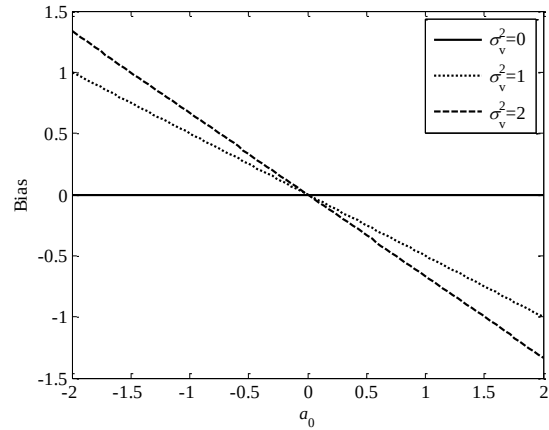
จะเห็นว่าค่า $a_{\text{opt}} \neq a_0$ แต่ในกรณีที่ $\sigma_v^2 = 0$ เราจะพบว่า $a_{\text{opt}} = a_0$ นั้นหมายความว่า ถ้าสัญญาณอินพุตปราศจากสัญญาณรบกวนแล้วฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนก็จะมีจุดต่ำสุด (global minimum point) ที่ตำแหน่งสัมประสิทธิ์ a ที่ระบบต้องการนั่นเอง อย่างไรก็ตาม ในปัญหาที่เรากำลังสนใจนี้จะยกเว้นในกรณีที่เมื่อ $\omega_0 = \pi/2$ เพราะในกรณีนี้จะทำให้ค่า $\cos \omega_0 = 0$ ส่งผลให้ตัวแปรอื่นๆในสมการที่ (20) ไม่ส่งผลใดๆต่อคำตอบได้ ดังนั้นในกรณีนี้จะทำให้ $a = a_{\text{opt}} = 0$ สำหรับทุกค่า A และ σ_v^2 จากสมการที่ (20) ถ้าเรานำ a_0 ไปลบออกทั้งสองข้างเราจะได้ปริมาณอันหนึ่งที่สำคัญซึ่งเรียกว่า ค่าไบแอส (Bias) ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Bias} &= a - a_0 \\ &= \frac{A^2}{A^2 + 2\sigma_v^2} a_0 - a_0 \\ &= \frac{-2\sigma_v^2}{A^2 + 2\sigma_v^2} a_0 \end{aligned} \quad (22)$$

จากสมการที่ (22) จะพบว่า ค่าไบแอสจะเป็นศูนย์ได้สองกรณีคือ เมื่อ $\sigma_v^2 = 0$ และเมื่อ $a_0 = 0$ หรือเมื่อ $\omega_0 = \pi/2$ เงื่อนไขแรกมีโอกาสเกิดขึ้นน้อยมากในทางปฏิบัติ ส่วนเงื่อนไขที่สองเราสามารถกำหนดได้ จากสมการที่ (22) เมื่อนำไปวาดกราฟโดยกำหนดให้ $a_0 \in [-2, 2]$ $A = \sqrt{2}$ และ $\sigma_v^2 = \{0, 1, 2\}$ จะได้ผลดังรูปที่ 4 จากรูปจะเห็นว่าค่าไบแอสนั้นจะขึ้นกับค่าความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนอินพุตและขึ้นกับค่าความถี่ของสัญญาณรูปคลื่นไซน์โดยยกเว้นที่ความถี่เท่ากับ $\pi/2$

ในการออกแบบอัลกอริทึมแบบปรับตัวสำหรับปรับสัมประสิทธิ์ a ของตัวกรองนอตช์ในสมการที่ (1) เราจะอาศัยหลักการลดลงจากที่สูงลงสู่ที่ต่ำ (steepest descent) ซึ่งอัลกอริทึมนี้จะมีรูปแบบการปรับสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$a(n+1) = a(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial J(a)}{\partial a(n)} \quad (23)$$



รูปที่ 4 ค่าไบแอสเทียบกับค่าสัมประสิทธิ์ a_0 สำหรับ $\sigma_v^2 = \{0, 1, 2\}$

เมื่อ μ คือค่าสเกลไชส์เป็นจำนวนจริงบวก อาศัยหลักการของอัลกอริทึมแบบ LMS [45] ที่ว่า เราจะสามารถประมาณค่า $J(a)$ ด้วยกับค่าชั่วขณะ $J(a(n)) = y^2(n)$ เมื่อ $a(n)$ คือค่าชั่วขณะของ a โดยอัลกอริทึมแบบ LMS ได้พิสูจน์ให้เห็นว่าเมื่อใช้หลักการตามสมการที่ (23) แล้ว $J(a(n)) \rightarrow J(a)$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ดังนั้นเมื่อแทน $J(a)$ ด้วยค่าชั่วขณะของมันลงในสมการที่ (23) จะได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned} a(n+1) &= a(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial y^2(n)}{\partial a(n)} \\ &= a(n) - \mu y(n) \frac{\partial y(n)}{\partial a(n)} \end{aligned} \quad (24)$$

จากนั้นแทนค่าในสมการที่ (9) ลงในสมการที่ (24) จะได้

$$a(n+1) = a(n) - \mu y(n)x(n-1) \quad (25)$$

สมการที่ (25) เรียกว่าอัลกอริทึมแบบเกรเดียนต์ธรรมดาสำหรับตัวกรอง FIR เนื่องจากอัลกอริทึมนี้อาศัยฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อน

$J(a)$ เป็นเกณฑ์ในการปรับสัมประสิทธิ์ ทำให้สัมประสิทธิ์ $a(n)$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ มีค่าไบแอสรวมอยู่ด้วย ซึ่งค่าไบแอสที่เกิดขึ้นจะมีค่าเท่ากับค่าที่ได้กล่าวไปแล้วในสมการที่ (22) ซึ่งเราจะได้แสดงความจริงดังกล่าวนี้โดยอาศัยการจำลองตัวกรองให้ทำงานภายใต้สถานการณ์ที่ก่อให้เกิดปัญหาค่าไบแอส โดยเราจะกำหนดให้สัญญาณรูปคลื่นไซน์ที่อินพุตมีแอมพลิจูด A ความถี่ ω_0 และเฟส ϕ ลงที่แต่ไม่ทราบค่าเท่ากับ $\{\sqrt{2}, \pi/3, \pi/8\}$ ตามลำดับ สัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่รวมมาับสัญญาณรูปคลื่นไซน์มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma_v^2 = 0.1$ ที่ตัวกรองจะกำหนดให้ $a(0) = 0$ ที่อัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดาจะกำหนดให้ $\mu = 0.01$ กำหนดความยาว (จำนวนตัวอย่างของข้อมูล) ของสัญญาณอินพุตเป็น 5000 ตัวอย่าง และให้ระบบทำงานเพียงหนึ่งรอบ ผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 5 จากรูปพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่ประมาณได้มีค่าแตกต่างจากค่าจริง ($a_0 = -2 \cos(\pi/3) = -1$) อย่างมีนัย ทั้งนี้ก็เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ที่ประมาณได้มีค่าไบแอสรวมอยู่ด้วย ซึ่งค่าไบแอสมีค่าประมาณเท่ากับ 0.09 (คำนวณตามสมการที่ (22)) เพื่อแก้ปัญหาค่าไบแอสที่เกิดขึ้น ผู้เขียนได้นำเสนอวิธีการกำจัดค่าไบแอสของอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดาไว้ในบทความที่ [19] ซึ่งมีหลักการดังนี้ พิจารณาสมการที่ (17) ถ้าเรานิยามฟังก์ชันค่าผิดพลาด $J_1(a)$ ขึ้นใหม่ให้มีค่าดังนี้

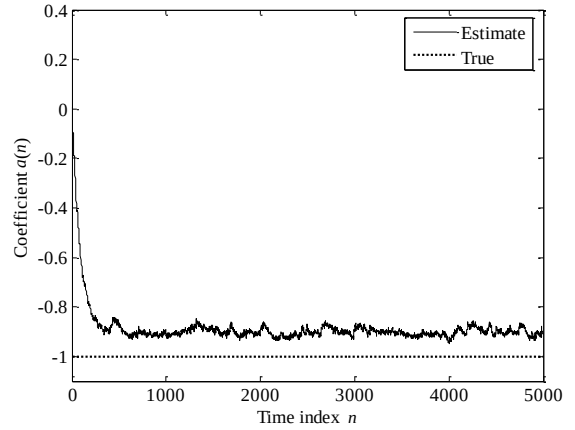
$$J_1(a) = J(a) - \sigma_v^2(2 + a^2) \quad (26)$$

ในทางคณิตศาสตร์พบว่า $J_1(a)$ จะไม่ได้รับผลกระทบจากสัญญาณรบกวนที่อินพุตเลย ทั้งนี้เพราะพจน์ $\sigma_v^2(2 + a^2)$ ถูกหักล้างออกไป จากนั้นเราจะแทนค่าในสมการที่ (26) ด้วยค่าชั่วขณะของมัน ซึ่งจะได้ออกเป็น

$$J_1(a(n)) = y^2(n) - \sigma_v^2(n)(2 + a^2(n)) \quad (27)$$

เมื่อ $\sigma_v^2(n)$ คือค่าชั่วขณะของ σ_v^2 จากนั้นแทนค่าในสมการที่ (27) ลงในสมการที่ (24) ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} a(n+1) &= a(n) \\ &\quad - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial a(n)} y^2(n) - \sigma_v^2(n)(2 + a^2(n)) \\ &= a(n) - \mu y(n)x(n-1) - \sigma_v^2(n)a(n) \end{aligned} \quad (28)$$



รูปที่ 5 ผลการประมาณค่าความถี่โดยอ้อมด้วยตัวกรอง FIR ทำงานร่วมกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดา

และเราจะเรียกสมการที่ (28) ว่า อัลกอริทึมเกรเดียนต์ไบแอสแบบโดยอ้อม (indirect unbiased gradient algorithm) จากสมการที่ (28) เราจะพบปัญหาในทางปฏิบัติคือ เราไม่สามารถทราบค่า $\sigma_v^2(n)$ ได้หากไม่ได้มีการกำหนดไว้ก่อนล่วงหน้า ดังนั้น จึงมีความจำเป็นต้องประมาณค่า $\sigma_v^2(n)$ จากสัญญาณที่พอจะสามารถหาได้ที่เวลาใดๆ จากการสังเกตจะพบว่า สัญญาณที่มีองค์ประกอบสัญญาณรบกวน $v(n)$ รวมอยู่นั้น ประกอบด้วย $x(n)$, $x(n-i)$, $i=1,2$ และ $y(n)$ แต่จากการสำรวจเราพบว่า ค่าที่เหมาะสมที่สามารถนำไปใช้เพื่อการนี้คือ [19]

$$\sigma_v^2(n) \approx x(n)y(n) \quad (29)$$

การพิสูจน์ความจริงของสมการที่ (29) จะใช้สมมติฐานและหลักการทางสถิติเข้ามาช่วย ดังนี้ หากค่าคาดหวังทางสถิติต่อสมการที่ (29) จะได้

$$E[\sigma_v^2(n)] = E[x(n)y(n)] \quad (30)$$

ค่าคาดหวังของสัญญาณในสมการที่ (29) ทางด้านขวาจะสามารถหาได้ก็ต่อเมื่อ $y(n)$ เข้าสู่สถานะอยู่ตัว (steady-state) ดังนั้นเราจึงต้องสมมติว่าในขณะนี้ อัลกอริทึมสามารถค้นหาค่าคอบและตัวกรองนอตช์สามารถกำจัดองค์ประกอบสัญญาณรูปคลื่นไซน์ได้อย่างสมบูรณ์ ทำให้ $y(n)$ เหลือเฉพาะองค์ประกอบสัญญาณรบกวน $v_1(n)$ ที่เป็นผลมาจากสัญญาณรบกวนที่อินพุต $v(n)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[x(n)y(n)] &= E[A \cos \omega_0 n + \phi + v(n) v_1(n)] \\ &= E[A \cos \omega_0 n + \phi v_1(n)] + E[v(n)v_1(n)] \quad (31) \end{aligned}$$

เนื่องจากสัญญาณสองสัญญาณในพจน์แรกทางด้านขวาของสมการที่ (31) ไม่มีความเกี่ยวข้องกันทางสถิติ จึงทำให้พจน์แรกมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการที่ (31) จึงกลายเป็น

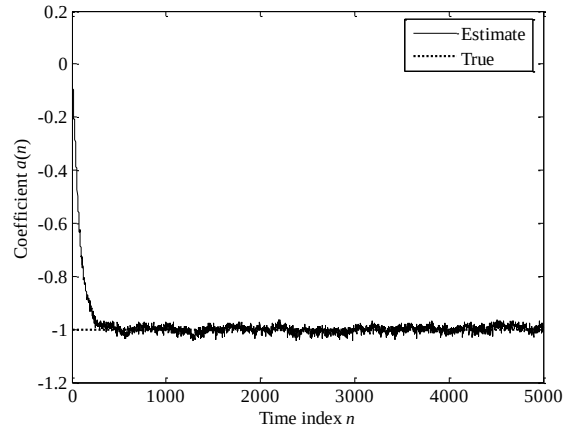
$$\begin{aligned} E[x(n)y(n)] &= E[v(n)v_1(n)] \\ &= \frac{\sigma_v^2}{2\pi j} \oint_C H(z)z^{-1} dz \\ &= \sigma_v^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^2 + az + 1}{z} dz \\ &= \sigma_v^2 \text{Res}(0) \quad (32) \end{aligned}$$

โดยที่ $\oint_C$ แทนการทำปริพันธ์ไปตามเส้นทางปิด C ภายในระนาบเชิงซ้อน z และ $\text{Res} = \text{residue}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\text{Res}(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^2 + az + 1}{z} dz \quad (33)$$

และสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Res}(0) &= \frac{z^2 + az + 1}{z} \Big|_{z=0} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (34)$$



รูปที่ 6 ผลการประมาณค่าความถี่โดยใช้อ้อมด้วยตัวกรอง FIR ทำงานร่วมกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ไโรไบแอส

ดังนั้นสมการที่ (32) จึงกลายเป็น

$$E[x(n)y(n)] = \sigma_v^2 \quad (35)$$

ดังนั้นค่าช่วงของ σ_v^2 จึงมีค่าตามสมการที่ (29) และเมื่อแทนค่าในสมการที่ (29) ลงในสมการที่ (28) จะได้

$$a(n+1) = a(n) - \mu y(n) x(n-1) - x(n)a(n) \quad (36)$$

ต่อไปเราจะนำอัลกอริทึมในสมการที่ (36) ไปทำงานร่วมกับตัวกรองนอตช์ FIR ในสมการที่ (1) โดยจะกำหนดค่าตัวแปรต่างๆ ให้เหมือนกับการทดลองที่ผ่านมา ผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 6 จากรูป

จะพบว่า อัลกอริธึมสามารถกำจัดค่าไบแอสให้หมดไปได้ ทำให้ได้ค่าคำตอบที่ถูกต้องหลังจากที่อัลกอริธึมได้รู้เข้าแล้ว

2.2 ตัวกรองนอตช์ FIR แบบการประมาณค่าความถี่โดยตรง

ตัวกรองนอตช์ FIR อันดับสองแบบการประมาณค่าความถี่โดยตรงมีฟังก์ชันของระบบดังนี้ [20]

$$H(z, \Omega) = 1 - 2 \cos \Omega z^{-1} + z^{-2} \quad (37)$$

เมื่อ Ω คือสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่จะถูกปรับด้วยอัลกอริธึมแบบเกรเดียนต์ ถ้านำสมการที่ (37) ไปสู่การปฏิบัติจริงโดยอาศัยโครงสร้างโดยตรง จะได้ดังรูปที่ 7 จากรูปพบว่าตัวกรองนี้ต้องการตัวประวิง (delay) 2 ตัว ตัวบวก 2 ตัว ตัวคูณ 1 ตัว และต้องใช้ตาราง (lookup table) เพื่อเก็บค่า $2 \cos \Omega$ ที่ทราบค่าไว้ก่อนล่วงหน้า ทั้งนี้เพื่อให้ระบบต้องคำนวณค่าฟังก์ชัน $\cos()$ เพื่อที่จะคูณผลตอบแทนทางความถี่และเฟสของตัวกรอง เราจะจัดรูปสมการที่ (37) ใหม่และแทน z ด้วย $e^{j\omega}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} H(z, \Omega) &= 1 - 2 \cos \Omega z^{-1} + z^{-2} \frac{z}{z} \\ &= z - 2 \cos \Omega + z^{-1} z^{-1} \end{aligned} \quad (38)$$

เมื่อแทน $z = e^{j\omega}$ จะได้

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}, \Omega) &= e^{j\omega} - 2 \cos \Omega + e^{-j\omega} e^{-j\omega} \\ &= 2 \cos \omega - 2 \cos \Omega e^{-j\omega} \end{aligned} \quad (39)$$

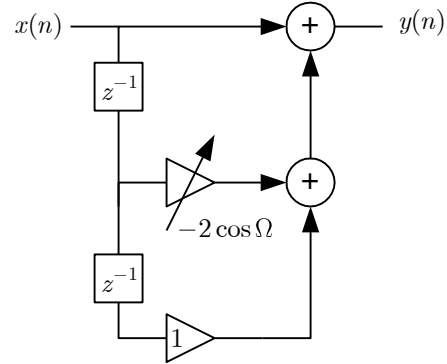
จากสมการที่ (39) ทำให้เราได้ผลตอบแทนทางขนาดและเฟสต่อความถี่ตามลำดับ ดังนี้

$$|H(e^{j\omega}, \Omega)| = |2 \cos \omega - 2 \cos \Omega| \quad (40.1)$$

$$\angle H(e^{j\omega}, \Omega) = -\omega \quad (40.2)$$

จากสมการที่ (40.1) พบว่าสมการจะเท่ากับศูนย์มีเพียงกรณีเดียวคือเมื่อ $\omega = \Omega$ ดังนั้นถ้าอินพุตของตัวกรองเป็นสัญญาณรูปคลื่นไซน์ที่มีค่าดังสมการที่ (5) แล้วเราจะได้ความสัมพันธ์

$$\Omega_0 = \omega_0 \quad (41)$$



รูปที่ 7 โครงสร้างแบบโดยตรงของตัวกรองนอตช์ FIR อันดับสองแบบการประมาณค่าความถี่โดยตรง

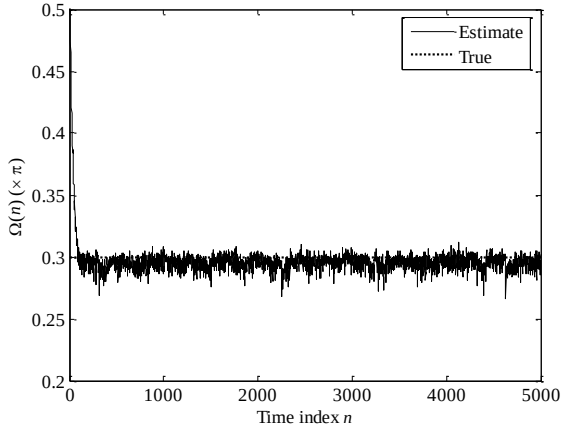
เนื่องจาก $\omega \in [0, \pi]$ ทำให้ $\Omega \in [0, \pi]$ ด้วยเช่นกัน ในกรณีที่ความถี่ของสัญญาณรูปคลื่นไซน์มีการแปรตามเวลาซึ่งมีค่าดังสมการที่ (9) แล้วสมการที่ (41) จะกลายเป็น

$$\Omega_0(n) = \omega_0(n) \quad (42)$$

ในกรณีเช่นนี้ จึงมีความจำเป็นต้องนำอัลกอริธึมแบบปรับตัวมาทำงานร่วมกับตัวกรองนอตช์เพื่อปรับสัมประสิทธิ์ $\Omega_0(n)$ สำหรับติดตามค่าความถี่ $\omega_0(n)$ ของสัญญาณที่อินพุต จากการที่ตัวกรองชนิดนี้ได้ติดตามค่าถี่ผ่านทางสัมประสิทธิ์ $\Omega_0(n)$ โดยตรง จึงเรียกการประมาณค่าความถี่แบบนี้ว่า การประมาณค่าความถี่โดยตรง

โดยอาศัยหลักการจากหัวข้อที่ 2.1 เราจะได้อัลกอริธึมเกรเดียนต์ไร้ไบแอสแบบโดยตรง (direct unbiased gradient algorithm) สำหรับตัวกรองนอตช์ FIR ในสมการที่ (37) ดังนี้ [20]

$$\Omega(n+1) = \Omega(n) - \mu y(n) x(n-1) + 2x(n) \sin 2\Omega(n) \quad (43)$$



รูปที่ 8 ผลการประมาณค่าความถี่โดยตรงด้วยตัวกรอง FIR ทำงานร่วมกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ไวยาสแบบโดยตรง

ต่อไปเราจะนำอัลกอริทึมในสมการที่ (43) ไปทำงานร่วมกับตัวกรองนอซ์ FIR ในสมการที่ (37) โดยจะกำหนดค่าตัวแปรต่างๆให้เหมือนกับการทดลองในหัวข้อที่ 2.1 ยกเว้นค่าความถี่จะกำหนดให้เท่ากับ $\omega_0 = 0.3\pi$ และ $\Omega(0) = \pi/2$ ผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 8 จากรูปจะพบว่า อัลกอริทึมสามารถกำจัดค่าไบแอสให้หมดไปได้ ทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องภายหลังจากที่อัลกอริทึมได้รู้ค่าแล้ว

2.3 ตัวกรองนอซ์ IIR แบบการประมาณค่าความถี่โดยอ้อม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวกรองนอซ์แบบ IIR อันดับสองแบบการประมาณค่าความถี่โดยอ้อม โดยเราจะสนใจโครงสร้างแบบบังคับโพลและซีโรว์ [41] เท่านั้น ซึ่งมีค่าฟังก์ชันของระบบดังนี้

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1} + z^{-2}}{1 + \rho az^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (44)$$

เมื่อ $0 \ll \rho < 1$ เป็นรัศมีของโพลโดยจะกำหนดให้เป็นค่าคงที่ส่วน $-2 < a < 2$ คือสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่จะถูกปรับด้วยอัลกอริทึมเกรเดียนต์ ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบในสมการที่ (44) จะมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + az^{-1} + z^{-2}}{1 + \rho az^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \frac{z}{z} \\ &= \frac{z + a + z^{-1}}{z + \rho a + \rho^2 z^{-1}} \end{aligned} \quad (45)$$

เมื่อแทน $z = e^{j\omega}$ ลงในสมการที่ (45) ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{e^{j\omega} + a + e^{-j\omega}}{e^{j\omega} + \rho a + \rho^2 e^{-j\omega}} \\ &= \frac{2 \cos \omega + a}{e^{j\omega} + \rho a + \rho^2 e^{-j\omega}} \end{aligned} \quad (46)$$

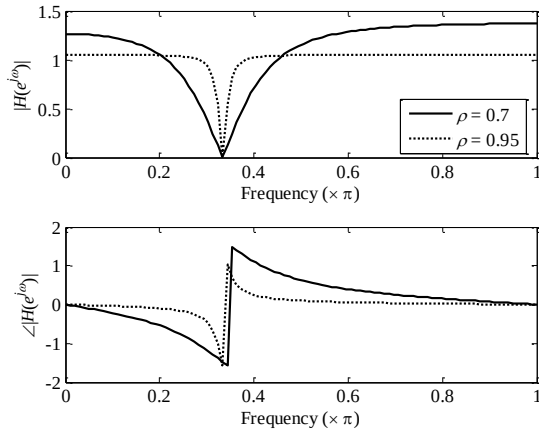
จากสมการที่ (46) เราจะได้ค่าผลตอบสนองทางขนาดและเฟสต่อความถี่ของตัวกรองนอซ์ IIR อันดับสองตามลำดับดังนี้

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \frac{|2 \cos \omega + a|}{|e^{j\omega} + \rho a + \rho^2 e^{-j\omega}|} \\ &= \frac{|2 \cos \omega + a|}{\sqrt{[(1 + \rho^2) \cos \omega + \rho a]^2 + 1 - \rho^2}^2 \sin^2 \omega} \end{aligned} \quad (47.1)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\arctan \frac{1 - \rho^2 \sin \omega}{(1 + \rho^2) \cos \omega + \rho a} \quad (47.2)$$

จากสมการที่ (47.1) พบว่า $|H(e^{j\omega})| = 0$ เมื่อ $a = 2 \cos \omega$ โดยที่ $-2 < a < 2$ ผลตอบสนองทางขนาดและเฟสต่อความถี่ตามสมการที่ (47) ที่ค่า $\rho = \{0.7, 0.95\}$ และ $a = -1$ ($\omega_0 = \pi/3$) แสดงดังรูปที่ 9 จากรูปจะสังเกตพบว่าเมื่อ $\rho \rightarrow 1$ จะทำให้แบนด์วิดท์ของตัวกรองมีค่าลดลงโดยให้ผลตอบสนองทางขนาดต่อ

ความถี่ต้องประกอบของสัญญาณที่มีความถี่อยู่ภายนอกช่วงความถี่ที่ถูกกำจัดมีความราบเรียบและมีค่าเข้าใกล้ 1



รูปที่ 9 ผลตอบสนองทางขนาด (บน) และเฟส (ล่าง) ของตัวกรองนอค์แบบ IIR อันดับสองแบบประมาณความถี่โดยอ้อม

สำหรับแนวความคิดในการพัฒนาอัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดาสำหรับปรับสัมประสิทธิ์ a ของตัวกรอง IIR จะใช้แนวทางเดียวกับการพัฒนาอัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดาสำหรับตัวกรอง FIR โดยเราสามารถมองได้ว่าสัญญาณเอาต์พุต $y(n)$ ของตัวกรอง IIR ในสมการที่ (44) ซึ่งมีค่าเป็น

$$y(n) = x(n) + ax(n-1) + x(n-2) - \rho ay(n-1) - \rho^2 y(n-2) \quad (48)$$

เป็นสัญญาณค่าคลาดเคลื่อน ดังนั้นจากหลักการในสมการที่ (15) เราจะได้ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนสำหรับตัวกรอง IIR นี้ดังนี้

$$J(a) = \frac{A^2}{2} |H(e^{j\omega_0})|^2 + \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (49)$$

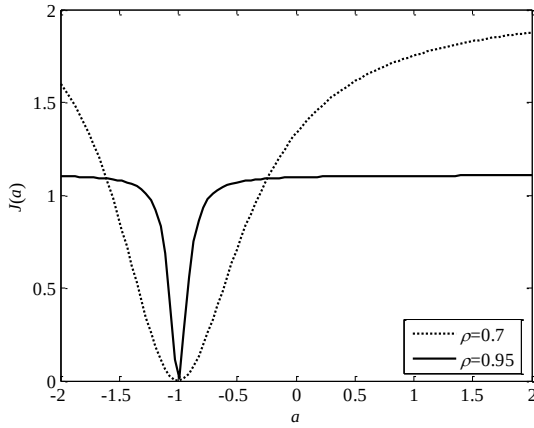
โดยที่ $|H(e^{j\omega})|$ มีค่าดังสมการที่ (47.1) และ $|H(e^{j\omega_0})|$ ก็คือ $|H(e^{j\omega})|$ ที่ $\omega = \omega_0$ อนึ่ง ในบทความนี้ได้ใช้ตัวแปรบางตัวร่วมกันทั้งนี้เพื่อไม่ให้ตัวแปรในบทความมีมากเกินไป ดังนั้นจะพบว่า บางครั้งตัวแปรเดียวกันที่ถูกกล่าวถึงในหัวข้อหนึ่งเช่น $J(a)$ จะถูกนำไปใช้ซ้ำในอีกหัวข้อหนึ่งและให้ความหมายที่แตกต่างกันออกไป อย่างไรก็ตาม มีตัวแปรบางตัว เช่น $x(n)$ เป็นตัวแปรร่วมที่ถูกอ้างถึงในทุกหัวข้อ เป็นต้น จากบทความ [37] Xiao และคณะได้คำนวณค่าในพจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการที่ (49) ไว้ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{\sigma_v^2}{2\pi j} \oint_C H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz \\ &= \frac{\sigma_v^2}{\rho^2} - \frac{1-\rho}{1+\rho} \frac{1+\rho^2}{\rho^2} \frac{1+\rho^2-2\rho^2a^2}{1+\rho^2-2\rho^2a^2} \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (50)$$

จะพบว่าค่าตามสมการที่ (50) ซึ่งเป็นผลมาจากสัญญาณรบกวนที่อินพุตของตัวกรองเป็นฟังก์ชันของสัมประสิทธิ์ a ด้วย ดังนั้นเมื่อทำอนุพันธ์สมการที่ (49) เทียบกับ a และแก้สมการเพื่อค่า a_{opt} ณ จุดต่ำสุดของ $J(a)$ ทำให้คำตอบที่ได้ยังคงมีค่าไบแอสเกิดขึ้น อย่างไรก็ตาม เราจะสามารถลดผลกระทบจากค่าไบแอสสำหรับตัวกรอง IIR โดยการกำหนดให้ $\rho \rightarrow 1$ แต่การกำหนดเช่นนี้จะส่งผลให้ผลตอบสนองชั่วคราว (transient response) ของตัวกรองมีค่ามากและความเร็วของอัลกอริธึมมีค่าต่ำอย่างมีนัยสำคัญ ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงต้องเลือกเอาระหว่างไบแอสสูงและความเร็วในการลู่เข้าต่ำ เพื่อจะดูรูปร่างของ $J(a)$ เราจะกำหนดให้ $A = \sqrt{2}$ $\sigma_v^2 = 0$ $\omega_0 = \pi/3$ และ $\rho = \{0.7, 0.95\}$ เมื่อไปวาดกราฟจะได้ผลดังรูปที่ 10 จากรูปจะสังเกตเห็นว่าเมื่อ $\rho \rightarrow 1$ จะทำใหรูปร่างของฟังก์ชันมีความราบเรียบในบริเวณที่อยู่ห่างจากจุดต่ำสุดของฟังก์ชัน ด้วยเหตุนี้เองที่ทำให้อัลกอริธึมเกรเดียนต์ทำงานได้ช้าในทางกลับกันเมื่อ ρ มีค่าน้อยจะทำให้ปากของฟังก์ชันมีขนาดกว้าง ทำให้อัลกอริธึมทำงานได้เร็ว แต่ขณะเดียวกันก็ให้ค่าไบแอสที่สูงตามไปด้วย

ในการปรับสัมประสิทธิ์ a ของตัวกรอง IIR นั้นเราจะใช้ความสัมพัทธ์ดังนี้

$$a(n+1) = a(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial J(a)}{\partial a(n)} \quad (51)$$



รูปที่ 10 ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนสำหรับตัวกรอง IIR แบบการประมาณค่าโดยอ้อม

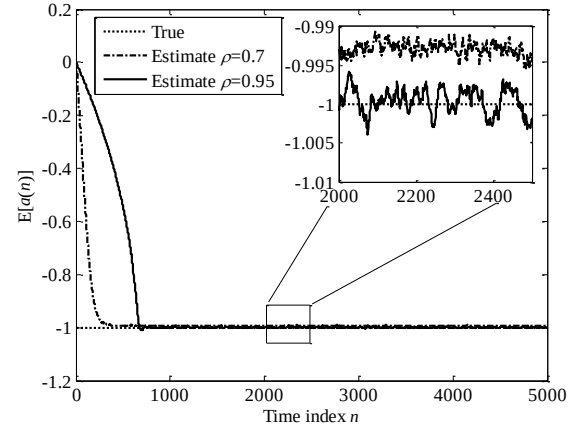
แทน $J(a)$ ด้วยค่าชั่วขณะ $y^2(n)$ และแทนลงในสมการที่ (51) จะได้

$$\begin{aligned} a(n+1) &= a(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial y^2(n)}{\partial a(n)} \\ &= a(n) - \mu y(n) x(n-1) - \rho y(n-1) \end{aligned} \quad (52)$$

สมการที่ (52) เรียกว่าอัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดาสำหรับตัวกรอง IIR อันดับสองแบบบังคับโพลและซีโร

เพื่อที่จะศึกษาพฤติกรรมของอัลกอริธึมนี้ เราจะทำการจำลองการทำงานโดยการกำหนดให้สัญญาณอินพุตมีค่าตามสมการที่ (11) โดยจะกำหนดให้ $A = \sqrt{2}$ $\omega_0 = \pi/3$ $\phi = \pi/6$ $\mu = 0.01$ $a(0) = 0$ $\rho = \{0.7, 0.95\}$ และ $\sigma_v^2 = 0.1$ นอกจากนี้จะกำหนดให้ข้อมูลมีความยาวเป็น 5000 ตัวอย่างและให้อัลกอริธึมทำงาน 50 รอบ และนำค่า $a_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, 50$ ไปหาค่าเฉลี่ยและนำไปวาดกราฟซึ่งจะให้ผลดังรูปที่ 11 จากรูปจะพบว่าเมื่อ

$\rho = 0.7$ จะทำให้ $E[a(n)]$ (เป็นค่าเฉลี่ยโดยประมาณ ส่วนสัญลักษณ์ $E[\cdot]$ ได้นำมาใช้เพื่อสื่อความหมายว่าเป็นค่าเฉลี่ยเท่านั้น) มีค่าไบแอสเกิดรวมอยู่ด้วยอย่างมีนัยสำคัญ แต่ $E[a(n)]$ ลู่เข้าเร็วกว่าในกรณีที่กำหนดให้ $\rho = 0.7$



รูปที่ 11 ผลการประมาณค่าความถี่โดยอ้อมด้วยตัวกรอง IIR ที่ทำงานร่วมกับอัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดา

จากผลกระทบของค่าไบแอสต่ออัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดา ดังกล่าว ผู้เขียนได้นำเสนอวิธีการลดค่าไบแอสให้เหลือน้อยที่สุดสำหรับอัลกอริธึมชนิดนี้ไว้ในบทความ [27] ดังจะได้กล่าวต่อไป

จากบทความ [37] Xiao และคณะได้ศึกษาวิเคราะห์อัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดาในสมการที่ (52) ไว้เกือบทุกแง่มุม และมีแง่มุมหนึ่งที่ที่น่าสนใจและผู้เขียนได้นำมาใช้ในการปรับปรุงอัลกอริธึมชนิดนี้ กล่าวคือ จากบทความ [37] สมการที่ (14)

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \frac{(1-\rho)\rho}{1+\rho} a_0 \sigma_v^2 \\ &+ \frac{(1-\rho)^3}{1+\rho \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\omega_0 + 1} a_0 \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (53)$$

ซึ่งต่อมาพบว่ามันคือค่าไบแอสของอัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดา นั่นเอง จากสมการที่ (53) ถ้าสมมติว่า $\rho \rightarrow 1$ เราอาจจะเลยพจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการที่ (53) ได้ ดังนั้น จากสมมติฐานดังกล่าวเราจะได้ว่า [27]

$$\tilde{R} = R_{1,2}|_{\rho \rightarrow 1} = \frac{(1-\rho)\rho}{1+\rho} a_0 \sigma_v^2 \quad (54)$$

แทนสมการที่ (54) ด้วยค่าชั่วขณะจะได้

$$\tilde{R}(n) = \frac{(1-\rho)\rho}{1+\rho} a(n) \sigma_v^2(n) \quad (55)$$

นำค่าในสมการที่ (55) ไปบวกทางด้านขวาของสมการที่ (52) ผลที่ได้คือ

$$a(n+1) = a(n) - \mu y(n) x(n-1) - \rho y(n-1) + \mu \tilde{R}(n) \quad (56)$$

แต่ปัญหาในทางปฏิบัติของอัลกอริทึมในสมการที่ (56) คือถ้าหากไม่ได้กำหนดค่า $\sigma_v^2(n)$ ล่วงหน้าแล้วจะไม่สามารถนำมาใช้ทำงานได้ ดังนั้นเราจึงต้องประมาณค่า $\sigma_v^2(n)$ จากสัญญาณที่เรามี ซึ่งจากบทความ [27] เราจะได้

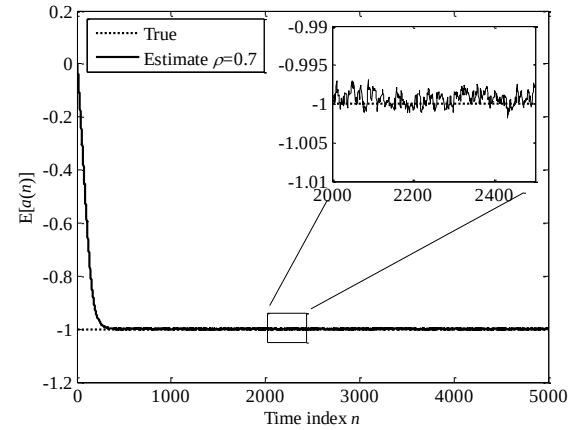
$$\sigma_v^2(n) \approx x(n)y(n) \quad (57)$$

เมื่อแทนลงในสมการที่ (56) จะได้ผลเป็น

$$a(n+1) = a(n) - \mu y(n) \times [x(n-1) - \rho y(n-1) - Ca(n)x(n)] \quad (58)$$

และเรียกว่าอัลกอริทึมเกรเดียนต์ไรโบแอส เมื่อนำอัลกอริทึมนี้ไปทำงานร่วมกับตัวกรอง IIR นอกรีต โดยกำหนดให้ $A = \sqrt{2}$ $\omega_0 = \pi/3$ $\phi = \pi/6$ $\mu = 0.01$ $a(0) = 0$ $\rho = 0.7$ และ $\sigma_v^2 = 0.1$ นอกจากนั้นจะกำหนดให้ข้อมูลมีความยาวเป็น 5000 ตัวอย่างและให้อัลกอริทึมทำงาน 50 รอบ และนำค่า

$a_i(n), i = 1, 2, \dots, 50$ ไปหาค่าเฉลี่ยและนำไปวาดกราฟซึ่งจะให้ผลดังรูปที่ 12 เมื่อเทียบกับรูปที่ 11 ที่ค่า $\rho = 0.7$ เท่ากันจะพบว่าค่าไบแอสใน $E[a(n)]$ ได้ถูกขจัดเซยหายไปแล้ว



รูปที่ 12 ผลการประมาณค่าความถี่โดยอ้อมด้วยตัวกรอง IIR ที่ทำงานร่วมกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ไรโบแอส

2.4 ตัวกรองนอกรีต IIR แบบการประมาณค่าความถี่โดยตรง

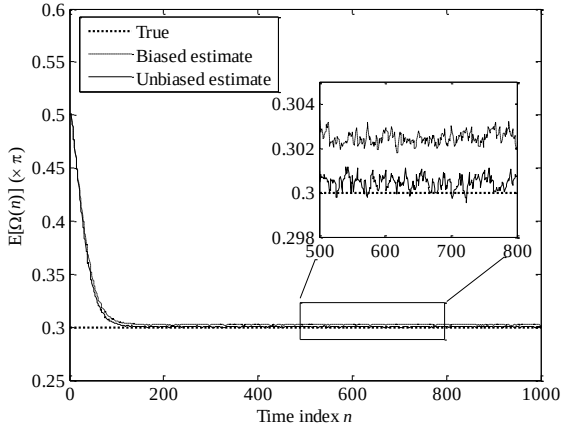
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวกรองนอกรีตแบบ IIR อันดับสองแบบการประมาณค่าความถี่โดยตรง โดยเราจะสนใจโครงสร้างแบบบังคับโพลและซีโร [46] เช่นเคย แต่ในที่นี้เราจะกำหนดให้ $a = -2 \cos \Omega$ ดังนั้นจะพบว่า

$$H(z, \Omega) = \frac{1 - 2 \cos \Omega z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2 \rho \cos \Omega z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (59)$$

เมื่อ $0 \ll \rho < 1$ เป็นรัศมีของโพลโดยจะกำหนดให้เป็นค่าคงที่ส่วน $0 < \Omega < \pi$ คือสัมประสิทธิ์ ในบทความ [46] Zhou และคณะได้นำเสนออัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดาสำหรับการประมาณค่าความถี่โดยตรงเพื่อปรับสัมประสิทธิ์ Ω ไว้ดังนี้

$$\Omega(n+1) = \Omega(n) - \mu y(n) \times 2 \sin \Omega(n) x(n-1) - \rho y(n-1) \quad (60)$$

อัลกอริทึมนี้มีคุณสมบัติเหมือนกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดา
แบบการประมาณค่าความถี่โดยอ้อมในสมการที่ (52) แต่มีการดูเิน



รูปที่ 13 เปรียบเทียบผลการประมาณค่าความถี่โดยตรงด้วยตัว
กรอง IIR ที่ทำงานร่วมกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดาและไร
ไบแอส

เร็วกว่าเมื่อกำหนดให้ค่า μ มีค่าเท่ากัน ค่าไบแอสยังคงเป็นปัญหา
ของอัลกอริทึมนี้ โดยเฉพาะเมื่อไม่สามารถกำหนดให้ตัวกรองมีค่า
 $\rho \rightarrow 1$ ได้ ดังนั้น ผู้เขียนจึงได้นำเสนอวิธีการลดค่าไบแอส
สำหรับอัลกอริทึมชนิดนี้ไว้ในบทความ [32] ดังนี้

$$\begin{aligned} \Omega(n+1) &= \Omega(n) - \mu y(n) \\ &\quad \times 2 \sin \Omega(n) x(n-1) - \rho y(n-1) \\ &\quad + \mu C x(n) y(n) \sin 2\Omega(n) \end{aligned} \quad (61)$$

โดยที่ $C = -2\rho(1-\rho)/(1+\rho)$ เมื่อนำสมการที่ (60) และ
(61) ไปจำลองการทำงานร่วมกับตัวกรอง IIR แบบการประมาณ
ค่าความถี่โดยตรงโดยกำหนดให้ $A = \sqrt{2}$ $\omega_0 = 0.3\pi$
 $\phi = 0.1\pi$ $\mu = 0.01$ $\Omega(0) = 0.5\pi$ $\rho = 0.6$ (กำหนดเช่นนี้
เพื่อให้เห็นผลของไบแอสชัดเจนขึ้น) $\sigma_v^2 = 0.1$ ความยาวข้อมูล
เท่ากับ 1000 ตัวอย่าง และให้ระบบทำงานซ้ำ 100 ครั้ง เมื่อนำ
สัมประสิทธิ์ที่ปรับได้มาหาค่าเฉลี่ยจะได้ผลดังรูปที่ 13 จากรูปจะ
เห็นได้ว่า อัลกอริทึมแบบไรไบแอสจะให้ความถูกต้องของคำตอบ

สูงกว่าอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดา ทั้งนี้เนื่องจากค่าไบแอสได้ถูก
ชดเชยจนเกือบหมดแม้ว่าเราได้กำหนดให้ ρ มีค่าน้อยๆ ก็ตาม

2.5 ตัวกรองนอตช์ IIR แบบการประมาณค่าความถี่โดยอ้อมที่ใช้ เกณฑ์วัดค่าคลาดเคลื่อนแบบใหม่

จากปัญหาเรื่องการดูเินที่ซ้ำของอัลกอริทึมเกรเดียนต์
ธรรมดาทั้งแบบการประมาณค่าความถี่โดยตรงและโดยอ้อมใน
กรณีที่ใช้ค่า ρ สูง ทำให้ผู้เขียนเกิดแนวคิดในการพัฒนาอัลกอริทึม
เกรเดียนต์ธรรมดาให้สามารถค้นหาคำตอบได้เร็วขึ้น โดยที่ไม่ต้อง
เพิ่มการคำนวณ ผลจากการวิจัยทำให้ได้เกณฑ์วัดค่าคลาดเคลื่อน
แบบใหม่และได้นำเสนอหลักการนี้ไว้ในบทความ [21] โดยมี
รายละเอียดดังนี้ จากสมการที่ (48) เราสามารถจัดรูปและเขียนใหม่
ได้ว่า

$$y_2(n) = y_1(n) - \rho a y_2(n-1) - \rho^2 y_2(n-2) \quad (62)$$

โดยที่

$$y_1(n) = x(n) + a x(n-1) + x(n-2) \quad (63)$$

ต่อไปจะนิยามเกณฑ์แบบใหม่ดังนี้

$$J_{new}(a) = E[y_1(n)y_2(n)] \quad (64)$$

กำหนดให้สัญญาณอินพุตมีค่าตามสมการที่ (11) เมื่อสัญญาณนี้เดิน
ทางผ่านตัวกรอง IIR นอตช์ในสมการที่ (44) จะได้สัญญาณ $y_1(n)$
และ $y_2(n)$ ที่สถานะอยู่ตัว (steady-state) ดังนี้

$$y_1(n) = AB_1(a) \cos(\omega_0 n + \phi + \phi_1) + v_1(n) \quad (65)$$

และ

$$E v_1(n)v_2(n) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi j} \oint_C N(z)H(z^{-1})z^{-1}dz \quad (72)$$

$$y_2(n) = AB_2(a)\cos(\omega_0 n + \phi + \phi_2) + v_2(n) \quad (66)$$

เมื่อ

โดยที่

$$N(z) = z^2 + az + 1 \quad (73)$$

$$B_1(a) = |2\cos\omega_0 + a| \quad (67)$$

และ

$$B_2(a) = \frac{2\cos\omega_0 + a}{\sqrt{[(1+\rho^2)\cos\omega_0 + \rho a]^2 + 1 - \rho^2 \sin^2\omega_0}} \quad (68)$$

$$H(z^{-1}) = \frac{1 + az + z^2}{1 + \rho az + \rho^2 z} \quad (74)$$

$$\phi_1 = -\omega_0 \quad (69)$$

เมื่อแทนค่าในสมการที่ (73) และ (74) ลงในสมการที่ (72) จะได้

$$\phi_2 = -\arctan \frac{1 - \rho^2 \sin\omega_0}{(1 + \rho^2)\cos\omega_0 + \rho a} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} E v_1(n)v_2(n) &= \frac{\sigma_v^2}{2\pi j} \oint_C \frac{z^2 + az + 1}{1 + \rho az + \rho^2 z} z^{-1} dz \\ &= \sigma_v^2 \frac{a^2(\rho - 1)^2 + 2 - \rho^2}{2} \end{aligned} \quad (75)$$

เมื่อแทนค่าในสมการที่ (65) และ (66) ลงในสมการที่ (64) จะได้ผลลัพธ์เป็น

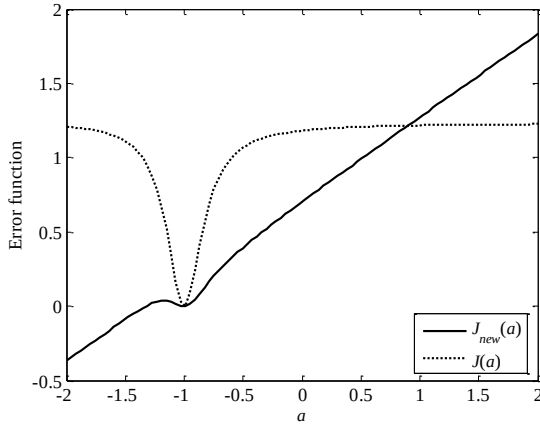
$$\begin{aligned} J_{new}(a) &= \frac{A^2}{2} B_1(a)B_2(a)\cos\phi_1 - \phi_2 \\ &\quad + E v_1(n)v_2(n) \end{aligned} \quad (71)$$

สมมติฐานที่ใช้สำหรับการได้มาซึ่งสมการที่ (71) คือได้สมมติว่าสัญญาณรูปคลื่นไซน์ไม่มีความเกี่ยวข้องกันทางสถิติกับสัญญาณรบกวน $v_1(n)$ และ $v_2(n)$ จึงทำให้ค่าคาดหวังทางสถิติระหว่างสัญญาณทั้งสองมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับพจน์ $E v_1(n)v_2(n)$ สามารถคำนวณได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ [23]

เพื่อจะศึกษาฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนที่น่าเสนอ เราจะวาดกราฟฟังก์ชันนี้โดยการกำหนดให้ $\sigma_v^2 = 0$ $A = \sqrt{2}$ $\omega_0 = \pi/3$ $\rho = 0.9$ และ $-2 < a < 2$ ผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 14 ในรูปเราได้วาดกราฟของฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองเฉลี่ยไว้ด้วยเพื่อเปรียบเทียบกับค่าคลาดเคลื่อนแบบใหม่ จากรูปจะพบว่าฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนแบบใหม่จะมีค่าความชันมากในบริเวณที่อยู่ห่างจากค่าคำตอบ (-1) ที่เราต้องการ ส่วนฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนแบบดั้งเดิมจะให้ค่าความชันสูงเฉพาะในบริเวณที่อยู่ใกล้กับคำตอบ ดังนั้นเมื่อนำฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนแบบใหม่ไปใช้เป็นเกณฑ์ให้กับอัลกอริทึมเกรเดียนต์จะทำให้อัลกอริทึมสามารถเข้าสู่คำตอบได้เร็วกว่าเดิม แต่อย่างไรก็ตาม จะมีปัญหาดรามมาคือ ถ้า

หากกำหนดค่าเริ่มต้นการปรับ $a(0)$ ไม่เหมาะสม จะทำให้ อัลกอริทึมไม่สามารถเข้าสู่ค่าตอบที่ต้องการ

สำหรับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ที่ใช้เกณฑ์แบบใหม่ที่กำลังกล่าวถึงนี้ จะสามารถหาได้ดังนี้ ทำการแทน $J(a)$ ด้วย $J_{new}(a)$ ลงใน สมการที่ (51) จากนั้นแทน $J_{new}(a)$ ด้วยค่าชั่วขณะ $y_1(n)y_2(n)$ ผลที่ได้คือ



รูปที่ 14 เปรียบเทียบฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองเฉลี่ยกับ ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนแบบใหม่

$$\begin{aligned}
 a(n+1) &= a(n) - \mu \frac{\partial}{\partial a(n)} y_1(n)y_2(n) \\
 &= a(n) - \mu \left(y_1(n) \frac{\partial}{\partial a(n)} y_2(n) + y_2(n) \frac{\partial}{\partial a(n)} y_1(n) \right) \\
 &= a(n) - \mu y_1(n)s_2(n) + y_2(n)s_1(n)
 \end{aligned} \tag{76}$$

เมื่อ

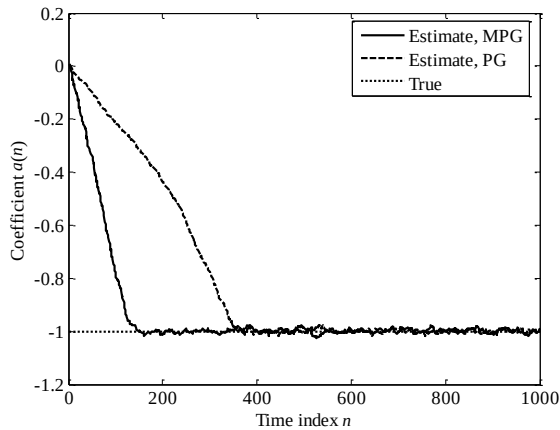
$$s_1(n) = x(n-1) \tag{77}$$

$$s_2(n) = x(n-1) - \rho y_2(n-1) \tag{78}$$

ในบทความ [21] ผู้เขียนได้ใช้หลักการทางสถิติเพื่อหาค่าคาดหวังทางสถิติที่สถานะอยู่ตัวของพจน์ $y_1(n)s_2(n)$ และ $y_2(n)s_1(n)$ ซึ่งพบว่า $E y_1(n)s_2(n) \ll E y_2(n)s_1(n)$ จึงทำให้สามารถละเลยพจน์ $y_1(n)s_2(n)$ ในสมการที่ (76) ได้ ดังนั้น สมการที่ (76) จะกลายเป็น

$$a(n+1) = a(n) - \mu y_2(n)s_1(n) \tag{79}$$

และเรียกสมการที่ (79) ว่าอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดาที่ถูกปรับปรุง (modified plain gradient (MPG) algorithm) เมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ (52) พบว่าอัลกอริทึมเกรเดียนต์ที่ถูกปรับปรุงนี้จะลดการบวกและคูณอย่างละหนึ่งครั้งต่อหนึ่งรอบ (iteration) ของการทำงาน โดยอัลกอริทึมนี้มีความเร็วในการลู่เข้าสู่สูงเมื่อเทียบกับอัลกอริทึมดั้งเดิมโดยไม่ต้องเพิ่มความซับซ้อนในการคำนวณแถมยังสามารถลดการคำนวณลงได้อีกด้วย เพื่อพิสูจน์ค่ากล่าวนี้ เราจะนำอัลกอริทึมที่ถูกปรับนี้ไปทำงานร่วมกับตัวกรองนอตช์ IIR และจะเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมแบบเกรเดียนต์ธรรมดา ซึ่งการจำลองจะกำหนดให้ $A = \sqrt{2}$ $\omega_0 = \pi/3$ $\phi = 0$ $\mu = 0.01$ $\rho = 0.9$ $a(0) = 0$ ความยาวข้อมูลเป็น 1000 ตัวอย่าง ผลการจำลองการทำงานแสดงดังรูปที่ 15 จากรูปพบว่าอัลกอริทึม MPG ลู่เข้าสู่ค่าตอบได้เร็วกว่า PG อย่างเห็นได้ชัด ดังนั้น ถ้ามองในแง่ของของการลู่เข้า อัลกอริทึม MPG จะมีความสามารถเหนือกว่าอัลกอริทึมแบบ PG หลังจากที่อัลกอริทึมนี้ได้ถูกนำเสนอ Loetwassana ผู้เขียน และคณะได้นำเสนอวิธีการกำจัดค่าไบแอสของอัลกอริทึม MPG ซึ่งรายละเอียดผู้อ่านสามารถสืบค้นได้จากบทความ [23] โดยอาศัยหลักการการกำจัดไบแอสเดียวกันกับที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 2.3 และ 2.4



รูปที่ 15 เปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ที่ถูกปรับโดยอัลกอริธึม MPG และ PG

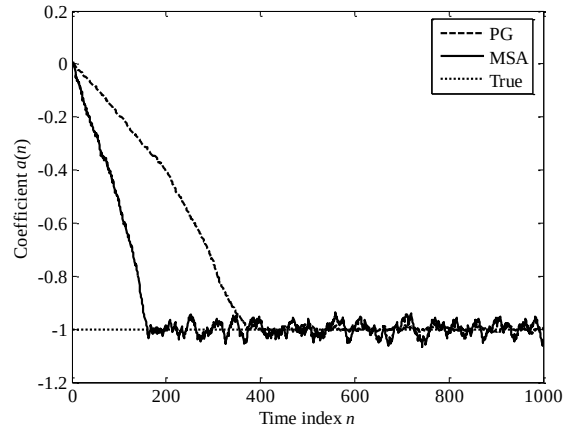
2.6 อัลกอริธึมเครื่องหมายแบบใช้เกณฑ์แบบใหม่

ผู้เขียนได้นำเสนออัลกอริธึมเครื่องหมายแบบใช้เกณฑ์แบบใหม่ไว้ในบทความ [22] ซึ่งได้พัฒนามาจากอัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดาแบบใช้เกณฑ์แบบใหม่หรือเรียกสั้นๆว่าอัลกอริธึม MPG ดังที่กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 2.5 อัลกอริธึมเครื่องหมายจะมีรูปแบบดังนี้

$$a(n+1) = a(n) - \mu \operatorname{sgn} y_2(n) s_1(n) \quad (80)$$

โดยที่ $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ เป้าหมายของอัลกอริธึมนี้คือต้องการลดความซ้ำซ้อนในการคำนวณลงอีก ซึ่งจากสมการที่ (80) พบว่า $\operatorname{sgn} y_2(n) \in \{-1, 1\}$ ดังนั้นเมื่อ $\operatorname{sgn} y_2(n) = 1$ เราจะกำหนดให้ μ เป็นค่าบวก ในทางกลับกันเมื่อ $\operatorname{sgn} y_2(n) = -1$ จะกำหนดให้ μ เป็นค่าลบ ทั้งนี้เพื่อบังคับทิศทางของเกรเดียนต์ให้มีค่าลบ (ลง) เพียงอย่างเดียว ผลพลอยได้ของอัลกอริธึมเครื่องหมายคือ ทำให้อัตราการลู่เข้าเร็วมากขึ้น อย่างไรก็ตาม ประเด็นการลู่เข้าที่เพิ่มขึ้นไม่ได้เป็นเป้าหมายของอัลกอริธึมนี้จึงไม่ขอกล่าวในรายละเอียดในที่นี้ ผลการจำลองการทำงานของอัลกอริธึมเครื่องหมายเมื่อเทียบกับอัลกอริธึม PG แสดงดังรูปที่ 16 โดยได้กำหนดตัวแปรต่างๆเหมือนกับในหัวข้อที่ 2.5

จากรูป ตัวข้อ MSA คือ modified sign algorithm ซึ่งเป็นชื่อเรียกอัลกอริธึมที่กล่าวถึงในหัวข้อนี้



รูปที่ 16 เปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ที่ถูกปรับโดยอัลกอริธึม MSA และ PG

2.7 อัลกอริธึมเกรเดียนต์แบบปรับสแต็ปไชส์

อัลกอริธึมที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้ผู้เขียนได้นำเสนอไว้ในบทความ [30] ซึ่งมีหลักการดังนี้ อัลกอริธึมแบบปรับสแต็ปไชส์ถูกพัฒนามาจากอัลกอริธึมเกรเดียนต์ธรรมดาที่แสดงไว้ในสมการที่ (52) แนวความคิดของอัลกอริธึมแบบปรับสแต็ปไชส์คือ ต้องการให้ค่าสแต็ปไชส์มีค่ามากในช่วงเริ่มต้นการปรับและให้มีขนาดเล็กเมื่ออัลกอริธึมลู่เข้าสู่ค่าตอบและเนื่องจากสัญญาณเอาต์พุต $y(n)$ ของตัวกรองนอกรีตมีค่าเกือบจะเท่ากับอินพุตก่อนที่จะปรับสแต็ปไชส์ที่เหมาะสมแล้ว ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่จะนำค่าพลังงานของสัญญาณเอาต์พุตมาใช้เป็นเกณฑ์สำหรับปรับค่าสแต็ปไชส์ ดังนั้นจากสมการที่ (52) เราสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$a(n+1) = a(n) - \mu n y(n)s(n) \quad (81)$$

โดยที่ $s(n) = x(n-1) - \rho y(n-1)$ และ $\mu(n)$ คือสแต็ปไชส์แปรตามเวลา ต่อไปจะนิยามค่าพลังงานของสัญญาณเอาต์พุตของตัวกรองดังนี้

$$r_y = E[y^2(n)] \quad (82)$$

แต่เนื่องจากเราไม่สามารถหาค่าตามสมการที่ (82) ได้ในทางปฏิบัติ ดังนั้นจึงต้องใช้ค่าชั่วขณะของสมการที่ (82) มาแทน คือ

$$r_y(n) = y^2(n) \quad (83)$$

แต่เนื่องจากสัญญาณในสมการที่ (83) ประกอบด้วยองค์ประกอบความถี่ต่ำและความถี่สูง แต่เราต้องการเพียงแค่องค์ประกอบความถี่ต่ำเท่านั้น ดังนั้นจึงต้องใช้ตัวกรองผ่านต่ำมากรองเอาเฉพาะองค์ประกอบความถี่ต่ำไปใช้งาน ซึ่งตัวกรองผ่านต่ำที่จะนำมาใช้นั้นจะเป็นตัวกรองผ่านต่ำอันดับหนึ่ง ทั้งนี้เพื่อให้ระบบมีความซับซ้อนในการคำนวณน้อยที่สุด ซึ่งตัวกรองดังกล่าวมีค่าฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$\begin{aligned} H_{lp}(z) &= \frac{\Psi(z)}{R_y(z)} \\ &= \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \end{aligned} \quad (84)$$

เมื่อ lp คือ lowpass $0 \ll \alpha < 1$ เป็นค่าคงที่ $\Psi(z)$ คือค่าการแปลงแซด (z -transform) ของ $\psi(n)$ ซึ่งเป็นเอาต์พุตของตัวกรองผ่านต่ำ และ $R_y(z)$ คือค่าการแปลงแซดของ $y^2(n)$ ซึ่งเป็นอินพุตของตัวกรอง เมื่อแปลงแซดผกผันต่อสมการที่ (84) จะได้

$$\psi(n) = (1 - \alpha)r_y(n) + \alpha\psi(n-1) \quad (85)$$

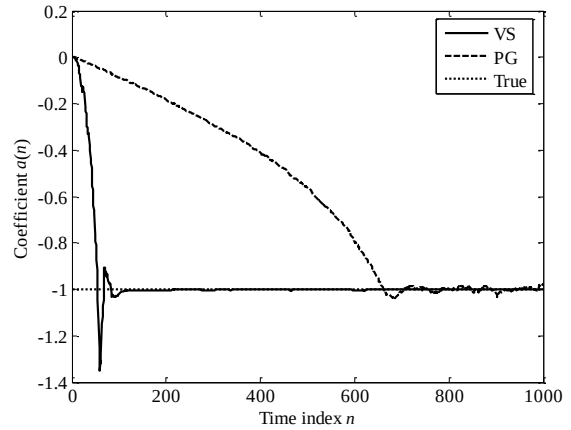
และเพื่อให้แน่ใจว่าสมการที่ (85) ไม่มีองค์ประกอบความถี่สูงอีก เราจะนำสัญญาณ $\psi^2(n)$ ไปผ่านตัวกรองผ่านต่ำอีกครั้งหนึ่ง และกำหนดให้เอาต์พุตของตัวกรองผ่านต่ำนี้เป็นค่าสแอมพลิงที่ต่ำที่สุด ซึ่งตัวกรองผ่านต่ำดังกล่าวนี้จะถูกกำหนดให้มีฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$\begin{aligned} H_\mu(z) &= \frac{U(z)}{R_\psi(z)} \\ &= \frac{\beta z^{-1}}{1 - \kappa z^{-1}} \end{aligned} \quad (86)$$

โดยที่ $U(z)$ คือค่าการแปลงแซดของ $\mu(n)$ และ $R_\psi(z)$ คือค่าการแปลงแซดของ $\psi^2(n)$ $\beta > 1$ และ $0 < \kappa < 1$ ดังนั้นสแตปีไซส์ที่ต้องการสามารถหาได้จากการแปลงแซดผกผัน (inverse z -transform) ต่อสมการที่ (86) ดังนี้

$$\mu(n+1) = \beta\psi^2(n) + \kappa\mu(n) \quad (87)$$

ในบทความ [30] ผู้เขียนได้ดัดแปลงสมการที่ (85) ใหม่โดยการนำค่า $r_{y_{\text{avg}}} = y(n)y(n-1)$ มาใช้แทน การกระทำเช่นนี้จะสามารถลดผลกระทบจากสัญญาณรบกวน $v(n)$ จากอินพุตของตัวกรอง



รูปที่ 17 เปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองนอตช์ IIR ที่ได้จากอัลกอริทึม VS และ PG

นอตช์ที่จะเข้าไปรบกวนการปรับค่าสแตปีไซส์ ดังนั้น สมการที่ (85) จึงกลายเป็น

$$\psi(n) = (1 - \alpha)r_{y_{\text{avg}}}(n) + \alpha\psi(n-1) \quad (88)$$

จะเห็นได้ว่าอัลกอริทึมเกรเดียนต์แบบปรับค่าสเกลไชนั้นมีความซับซ้อนสูงเมื่อเทียบกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดา ต่อไปจะแสดงผลจำลองการทำงานเมื่อนำอัลกอริทึมแบบปรับค่าสเกลไปทำงานร่วมกับตัวกรองนอตช์ IIR โดยจะเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดา ในการจำลองการทำงานจะกำหนดให้ $A = \sqrt{2}$ $\omega_0 = \pi/3$ $\phi = 0$ $\sigma_v^2 = 0.1$ $a(0) = 0$ $\mu(0) = 0.001$ $\rho = 0.95$ $\alpha = 0.9$ $\beta = 0.1$ $\kappa = 0.9$

$\mu_{pg} = 0.01$ และให้ข้อมูลมีความยาว 1000 ตัวอย่าง ผลการจำลองแสดงดังรูปที่ 17 ซึ่งจากรูปตัวย่อ VS คือ variable stepsize และจากรูปจะเห็นได้ว่า อัลกอริทึมแบบ VS มีความเร็วในการลู่เข้าสูงและยังให้ค่าการแกว่ง (fluctuation) ของสัมประสิทธิ์ภายหลังจากลู่เข้าแล้วมีค่าอีกด้วย

2.8 ตัวกรอง IIR นอตช์แบบปรับตัวที่ใช้โครงสร้างแบบปริภูมิสถานะ

โครงสร้างของตัวกรองแบบปริภูมิสถานะ (state space) จะมีข้อดีในแง่ที่สามารถทนต่อผลกระทบจากความยาวคำจำกัด (finite word length effect) และสามารถไปสร้างเป็นระบบแบบหลายอินพุตหลายเอาต์พุต (multiple inputs multiple outputs systems : MIMO systems) ง่ายและสะดวกกว่าโครงสร้างแบบอื่น อย่างไรก็ตาม โครงสร้างแบบนี้มีข้อเสียในเรื่องที่ต้องใช้การคำนวณที่สูง การนำตัวกรองนอตช์ IIR ไปสู่การปฏิบัติจริงด้วยโครงสร้างปริภูมิสถานะจะเริ่มจากโครงสร้างแบบโดยตรงประเภทสอง (direct form II) ซึ่งมีรายละเอียดดังรูปที่ 18 จากรูปเราจะได้ความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ดังนี้

$$v_1(n) = v_2(n-1) \quad (89)$$

$$v_2(n) = -\rho^2 v_1(n-1) - \rho a v_2(n-1) + x(n) \quad (90)$$

และ

$$y(n) = (1 - \rho^2) v_1(n-1) + (1 - \rho) a v_2(n-1) + x(n) \quad (91)$$

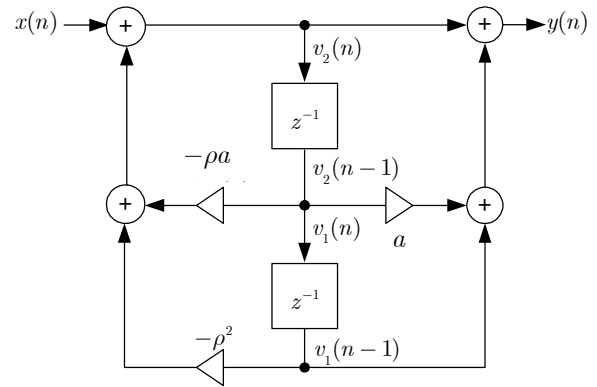
เมื่อนำสมการที่ (89)-(91) ไปเขียนในรูปของเมตริกจะได้

$$\begin{bmatrix} v_2(n) \\ v_1(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho a & -\rho^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(n-1) \\ v_1(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n) \quad (92)$$

และ

$$y(n) = \begin{bmatrix} a(1 - \rho) & (1 - \rho^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(n-1) \\ v_1(n-1) \end{bmatrix} + x(n) \quad (93)$$

สมการที่ (92) และ (93) เป็นแบบจำลองของระบบด้วยโครงสร้างแบบปริภูมิสถานะที่สมบูรณโดยที่ $v_1(n)$ และ $v_2(n)$ คือตัวแปรสถานะ (state variables) เพื่อให้สมการดูกระชับ สมการที่ (92)



รูปที่ 18 โครงสร้างแบบโดยตรงประเภทสอง

สามารถเขียนได้ใหม่นี้

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{f}\mathbf{v}(n-1) + \mathbf{q}x(n) \quad (94)$$

เรียกว่า สมการสถานะ (state equation) และ

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{v}(n-1) + x(n) \quad (95)$$

เรียกว่า สมการเอาต์พุต (output equation) เมื่อ

$$\mathbf{v}(n) = \begin{bmatrix} v_2(n) \\ v_1(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\rho a & -\rho^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} a(1-\rho) \\ 1-\rho^2 \end{bmatrix}$$

เมื่อทำการแปลงแซดสมการที่ (94) และ (95) ผลที่ได้คือ

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{FV}(z)z^{-1} + \mathbf{q}X(z) \quad (96)$$

และ

$$Y(z) = \mathbf{G}^T \mathbf{V}(z)z^{-1} + X(z) \quad (97)$$

เมื่อจัดรูปสมการที่ (96) และ (97) ใหม่จะได้

$$\mathbf{V}(z) = X(z) \mathbf{q}^{-1} - \mathbf{Fq}^{-1}z^{-1} \quad (98)$$

และ

$$Y(z) = \left[\mathbf{G}^T \mathbf{q}^{-1} - \mathbf{Fq}^{-1}z^{-1} \right] X(z) \quad (99)$$

จากสมการที่ (99) เราจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับตัวกรองนอตช์ IIR ที่ใช้โครงสร้างแบบปริภูมิสถานะดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left[\mathbf{G}^T \mathbf{q}^{-1} - \mathbf{Fq}^{-1}z^{-1} + 1 \right] \quad (100)$$

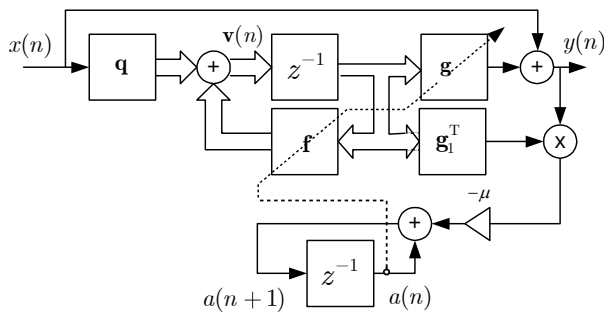
ต่อไปจะกล่าวถึงอัลกอริทึมเกรเดียนต์ธรรมดาที่ใช้สำหรับปรับสัมประสิทธิ์ a ของตัวกรอง ดังนี้

$$a(n+1) = a(n) - \mu y(n)s(n) \quad (101)$$

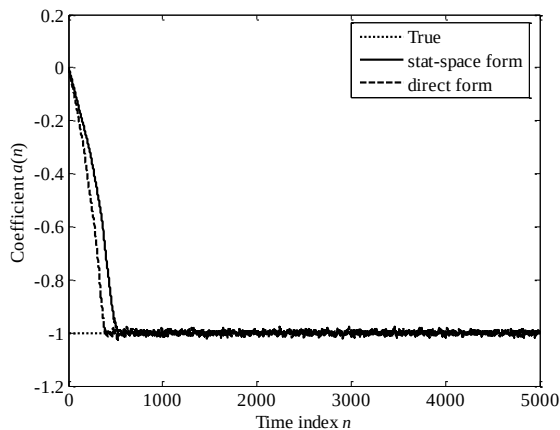
เมื่อ

$$s(n) = \frac{\partial y(n)}{\partial a(n)} = \frac{\partial [\mathbf{g}^T \mathbf{v}(n-1) + x(n)]}{\partial a(n)} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}(n-1) \quad (102)$$

โดยที่ $\mathbf{g}_1^T = \begin{bmatrix} 1-\rho \\ 0 \end{bmatrix}$ โครงสร้างแบบปริภูมิสถานะที่สมบูรณ์ของตัวกรองนอตช์ IIR อันดับสองแบบปรับตัวแสดงดังรูปที่ 19 เมื่อนำไปจำลองการทำงานโดยเปรียบเทียบกับโครงสร้างแบบโดยตรงประเภท I (direct form I) ที่ใช้อัลกอริทึม PG โดยกำหนดให้ $A = \sqrt{2}$ $\omega_0 = \pi/3$ $\phi = 0$ $\mu = 0.01$ $a(0) = 0$ $\sigma_v^2 = 0.1$ $\rho = 0.9$ ความยาวข้อมูลอินพุตเป็น 5000 ตัวอย่าง ผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 20 จากรูปจะเห็นว่าโครงสร้างแบบปริภูมิสถานะจะส่งผลให้อัตราการลู่เข้ามีค่าลดลงเล็กน้อยเมื่อเทียบกับโครงสร้างแบบโดยตรงประเภทหนึ่ง (direct form I) แต่โครงสร้างแบบปริภูมิสถานะจะคงทนเมื่อนำตัวกรองไปสู่การปฏิบัติจริงด้วยตัวประมวลผลสัญญาณดิจิทัลแบบเลขจำนวนเต็ม (fixed point number)



รูปที่ 19 โครงสร้างแบบปริภูมิสถานะของตัวกรองแบบปรับตัว
นอค์ IIR อันดับสองที่ใช้อัลกอริทึมแบบเกรเดียนต์ธรรมดา



รูปที่ 20 เปรียบเทียบผลการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง
นอค์ IIR ที่ใช้โครงสร้างแบบโดยตรงและแบบปริภูมิสถานะ

3. สรุป

บทความนี้ได้กล่าวถึงบางส่วนของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองนอค์แบบปรับตัวที่ผู้เขียนได้พัฒนาขึ้น โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้เป็นแนวทางให้แก่นักวิจัยรุ่นใหม่ที่มีความสนใจในตัวกรองนอค์แบบปรับตัวนำไปพัฒนาให้ตัวกรองชนิดนี้ทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพมากที่สุด ทั้งนี้เนื่องจากตัวกรองนอค์สามารถนำไปใช้งานได้หลายประเภทดังที่ได้กล่าวไว้ในบทนำของบทความนี้ เนื่องจากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองประเภทนี้นับตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันมีมากมาย ซึ่งได้รับการตีพิมพ์ทั้งในงานประชุมวิชาการทั่วโลกและวารสารต่างๆ ซึ่งผู้เขียนไม่สามารถนำมากล่าวได้หมดในบทความนี้ ดังนั้น ตัวกรองที่กล่าวถึงในบทความนี้จึงมีเฉพาะในส่วนที่ผู้เขียนได้พัฒนาขึ้นมาเท่านั้น

เนื้อหาในบางหัวข้อในบทความอาจมีเนื้อหาไม่ครบถ้วนสมบูรณ์
ดังนั้นผู้อ่านที่มีความสนใจควรไปสืบค้นจากเอกสารที่ได้อ้างอิงไว้
ในบทความ

เอกสารอ้างอิง

- [1] M. Ferdjallah and R. E. Barr, "Adaptive digital notch filter desing on the unit circle for removal of powerline noise from biomedical signals," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 41, no. 6, pp. 529-536, Jun. 1994.
- [2] A. K. Ziarani and A. Konrad, "A nonlinear adaptive method of elimination of power line interference in ECG signals," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 49, no. 6, pp. 540-547, Jun. 2002.
- [3] P. S. Hamilton, "A comparison of adaptive and nonadaptive filters for reduction of powerline interference in the ECG," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 43, no. 1, pp. 105-109, Jan. 1996.
- [4] N. V. Thakor and Y. S. Zhu, "Application of adaptive filtering to ECG analysis: Noise cancellation and arrhythmia detection," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 38, no. 8, pp. 785-794, Aug. 1991.
- [5] W. K. Ma, Y. T. Zhang, and F. S. Yang, "A fast recursive-least-squares adaptive notch filter and its applications to biomedical signals," *Med. Biol. Eng. Comput.*, vol. 37, no. 1, pp. 99-103, Jan. 1999.
- [6] S.-C. Pei and C.-C. Tseng, "Elimination of AC interference in electrocardiogram using IIR notch filter with transient suppression," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 42, no. 11, pp. 1128-1132, Nov. 1995.
- [7] J. W. Choi and N. I. Cho, "Suppression of narrow-band interference in DS-spread spectrum systems using adaptive IIR notch filter," *Signal processing*, vol. 82, no. 12, pp. 2003-2013, Dec. 2002.
- [8] I. Claesson and A. Rossholm, "Notch filtering of humming GSM mobile telephone noise," in *Proc. Int. Conf. Inf., Commun. Signal Process.*, 2005, pp. 1320-1323.
- [9] M. Mojiri, M. Karimi-Ghartemani, and A. Bakhshai, "Estimation of power system frequency using an adaptive notch filter," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 56, no. 6, pp. 2470-2477, Dec. 2007.
- [10] W. Loetwassana, R. Puchalard, and W. Silaphan, "Adaptive howling canceller using adaptive IIR notch filter: simulation and implementation," in *Proc. 2003 IEEE Int. Neural Networks and Signal Process. (ICNNSP' 03)*, Nanjing, China, Dec. 2003, pp. 848-851.
- [11] W. Loetwassana, R. Puchalard, A. Lorsawatsiri, J. Koseeyaporn, and P. Wardkeing, "Adaptive howling suppressor in an audio amplifier system," in *Proc. 2007 Asia-Pacific Conf. Commun. (APCC'07)*, Bangkok, Thailand, Oct. 2007, pp. 445-448.
- [12] S. M. Kuo and J. Chen, "New adaptive IIR notch filter and its application to howling control in speakerphone system," *IEE Electronics Lett.*, vol. 28, no. 8, pp. 764-766, Apr. 1992.
- [13] J. Wei, L. Du, Z. Chen, and F. Yin, "A new algorithm for howling detection," in *Proc. 2003 IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS'03)*, vol. 4, Bangkok, Thailand, May 2003, pp. 409-411.
- [14] M. Vlcek and P. Zahradnik, "Fast analytical design algorithms for FIR notch filters," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 51, no. 3, pp. 608-623, Mar. 2004.
- [15] S. C. Dutta Roy, B. Kumar, and S. B. Jain, "FIR notch filter design-A review," *Facta Universitatis*, vol. 14, no. 3, pp. 295-327, Dec. 2001.

- [16] Y. V. Joshi and S. C. Dutta Roy, "Design of IIR digital notch filters," *Circuits, Syst., Signal Process.*, vol. 16, no. 4, pp. 4185-427, Jul. 1997.
- [17] M. Makundi, T. I. Laakso, and L. Yaohui, "Asynchronous implementation of transient suppression in tunable IIR filters," in *Proc. Int. Conf. Digital Signal Process.*, 2002, vol. 2, pp. 815-818.
- [18] Y. Prudat, J.-M. Vesin, "Multi-signal extension of adaptive frequency tracking algorithms," *Signal Processing*, vol. 89, pp. 963-973, 2009.
- [19] R. Punchalard, J. Koseeyaporn, P. Wardkein, "Indirect frequency estimation based on second-order adaptive FIR notch filter," *Signal Processing*, vol. 89, no. 7, pp. 1428-1435, Jul. 2009.
- [20] R. Punchalard et al., "Direct frequency estimation based adaptive algorithm for a second-order adaptive FIR notch filter," *Signal Processing*, vol. 88, no. 2, pp. 315-325, Feb. 2008.
- [21] R. Punchalard et al., "Adaptive IIR notch filter based on new error criteria," *Signal Processing*, vol. 88, no. 3, pp. 685-703, Mar. 2008.
- [22] R. Punchalard, J. Koseeyaporn, P. Wardkein, "Adaptive IIR notch filter using a modified sign algorithm," *Signal Processing*, vol. 89, no. 2, pp. 239-243, Feb. 2009.
- [23] W. Loetwassana, R. Punchalard, J. Koseeyaporn, P. Wardkein, "Unbiased plain gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros," *Signal Processing*, vol. 90, no. 8, pp. 2513-2520, Aug. 2010.
- [24] R. Punchalard et al., "Unbiased equation error adaptive IIR notch filter," in *Proc. 2007 IEEE Region 10 Conf. (TENCON'07)*, 2007, pp. 1-3.
- [25] R. Punchalard et al., "Direct frequency estimation based Kalman adaptive IIR notch filter : State-Space Approach," in *Proc. 2006 IEEE Region 10 Conf. (TENCON'06)*, 2007, pp. 1-4.
- [26] R. Punchalard et al., "Convergence speed improvement for a variable step-size plain gradient algorithm by using variable notch bandwidth technique," in *Proc. 2003 Int. Symp. On Image and signal process. and analysis (ISPA'03)*, 2003, pp. 788-792.
- [27] R. Punchalard et al., "Unbiased plain gradient algorithm for adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros," in *Proc. 2007 IEEE Region 10 Conf. (TENCON'07)*, 2007, pp. 1-4.
- [28] R. Punchalard et al., "Inverse tangent based algorithm for constrained adaptive IIR notch filter," in *Proc. 2006 IEEE Region 10 Conf. (TENCON'06)*, 2006, pp. 1-4.
- [29] R. Punchalard et al., "Mean square error analysis of the PG algorithm for adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros using power spectral density method," in *Proc. 2008 IEEE Asia pacific Conf. on circuit. sys. (APCCAS'08)*, 2008, pp. 193-196.
- [30] R. Punchalard, "On adaptive IIR lattice notch filter using a robust variable step-size for the detection of sinusoid," in *Proc. 2002 IEEE int. Conf. Com. Sys. (ICCS'02)*, 2002, vol. 2, pp. 800-804.
- [31] R. Punchalard et al., "Statistical analysis of an unbiased plain gradient algorithm for a constrained adaptive IIR notch filter," in *Proc. 2008 Asia Pacific Conf. Comm. (APCC'08)*, 2008, pp. 1-5.
- [32] R. Punchalard et al., "Unbiased constrained adaptive IIR notch filter using direct frequency estimation algorithm," in *Proc. 2007 Asia Pacific Conf. Comm. (APCC'07)*, 2007, pp. 453-456.
- [33] R. Punchalard et al., "Inverse tangent based adaptive IIR notch filter," in *Proc. 2006 IEEE Asia pacific Conf. on circuit. sys. (APCCAS'06)*, 2006, pp. 1208-1211.
- [34] R. Punchalard et al., "The reduction of gradient noise in gradient-based algorithm by using variable step-size technique," in *Proc. 2000 IEEE Asia pacific Conf. on circuit. sys. (APCCAS'00)*, 2000, pp. 415-418.
- [35] R. Punchalard et al., "Modified adaptive IIR notch filter based on direct frequency estimation algorithm," in *Proc. 2006 IEEE int. Conf. Com. Sys. (ICCS'06)*, 2006, pp. 1-4.
- [36] J. F. Chicharo and T. S. Ng, "Gradient-based adaptive IIR notch filtering for frequency estimation," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, pp. 769-777, May 1990.
- [37] Y. Xiao, Y. Takeshita, and K. Shida, "Steady-state analysis of a plain gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros," *IEEE Trans. Circuits Syst. II.*, vol. 48, pp. 733-740, July 2001.
- [38] Y. Xiao, Y. Takeshita, and K. Shida, "Tracking properties of a gradient based second-order adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, pp. 878-888, Apr. 2002.
- [39] N. I. Cho, C. H. Choi, and S. U. Lee, "Adaptive line enhancement by using and IIR lattice notch filter," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 37, no. 4, pp. 585-589, Apr. 1989.
- [40] K. Martin and M. T. Sun, "Adaptive filters suitable for real-time spectral analysis," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-33, no. 2, pp. 218-229, Feb. 1996.
- [41] A. Nehorai, "A minimal parameter adaptive notch filter with constrained poles and zeros," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-33, no. 4, pp. 983-996, Jul. 1985.
- [42] S.-C. Pei and C.-C. Tseng, "Adaptive IIR notch filter based on least mean p-power error criterion," *IEEE Trans. Circuit, Syst.*, vol. 40, no. 8, pp. 525-529, Aug. 1993.
- [43] Y. Xiao, Y. Tadokoro, and Y. Kobayashi, "A new memoryless nonlinear gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter and its performance analysis," *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process.*, vol. 45, no. 4, pp. 462-472, Apr. 1998.
- [44] A. V. Oppenheim and W. R. Schaffer, *Digital signal processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [45] Simon Haykin, *Adaptive filter theory*, Fourth edition, Prentice Hall, 2002.
- [46] J. Zhou and G. Li, "Plain gradient based direct frequency estimation using second-order constrained adaptive IIR notch filter," *Electron. Lett.*, vol. 40, no. 5, 2002.
- [47] G. G. Proakis, and D. G. Manolakis, *Digital signal processing: principles, algorithms, and applications*, Macmillan Publishing Company, 1992.



ราชบัณฑิตยสถาน สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาเทคโนโลยีโทรคมนาคม จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าคุณทหารลาดกระบังในปี พ.ศ. 2540 ระดับปริญญาโท สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จากสถาบันเดียวกันในปี พ.ศ. 2543 และระดับปริญญาเอก สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม จาก

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ในปี 2550 ปัจจุบันทำงานเป็นอาจารย์ประจำ ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ สังกัด ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร หัวข้องานวิจัยที่สนใจได้แก่ การประมวลผล สัญญาณแอนะล็อกและดิจิทัล ทฤษฎีข่าวสาร การสื่อสารแอนะล็อกและดิจิทัล