

# ระเบียบวิธีการสำหรับการกำจัดสัญญาณแทรกสอดรูปคลื่นไซน์ และสมรรถนะทางสถิติ

## Sinusoidal Interference Cancellation Algorithm and Statistical Performance

ราชู พันธุ์ฉลาด

ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

140 ถ.เชื่อมสัมพันธ์ หนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: rachu@mut.ac.th

Manuscript received :September 13, 2011

Revised: October 5, 2011

### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอระเบียบวิธีแบบกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดสำหรับกำจัดสัญญาณแทรกสอดรูปคลื่นไซน์ ระบบที่นำเสนอได้นำตัวกำเนิดสัญญาณแบบคัมเบิลมาใช้สร้างสัญญาณอ้างอิงให้แก่ระบบแทนการสร้างสัญญาณในรูปแบบตาราง ทำให้สามารถลดการใช้หน่วยความจำเพื่อเก็บข้อมูลลงได้ นอกจากนี้ ยังได้นำเสนอผลการวิเคราะห์สมรรถนะทางสถิติของระบบในรูปแบบของค่าไบแอส ค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองเฉลี่ย ค่าขอบเขตสเตรปไซส์ และ ค่าเวลาคงตัว การเปรียบเทียบระหว่างผลทางทฤษฎีและปฏิบัติพบว่ามี

ความสอดคล้องกัน

คำสำคัญ: สัญญาณแทรกสอด, สัญญาณ ECG, ระเบียบวิธีแบบกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด

### ABSTRACT

*This paper presents the least mean square algorithm for sinusoidal interference cancellation. The proposed method employs the couple-oscillator to provide the reference signals instead of lookup table. This can reduce the requirement of memory to contain the data. Moreover, statistical performance analysis of*

*the proposed algorithm is carried out in terms of bias, mean square error (MSE), step size bound, and system time constant. The comparisons between theoretical and simulation results have shown that they are agreeable.*

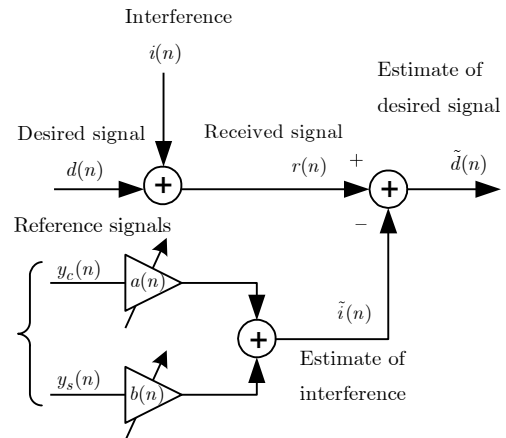
**Keywords:** Interference, ECG signal, Least means square algorithm

### 1. บทนำ

ปัญหาสัญญาณแทรกสอดรูปคลื่นไซน์จะพบได้บ่อยในระบบสื่อสาร ระบบควบคุม และวิศวกรรมชีวการแพทย์ เป็นต้น [1] – [2] ปัญหาหนึ่งในวิศวกรรมชีวการแพทย์คือ การที่สัญญาณ 50 Hz จากเพาเวอร์ไลน์เหนี่ยวนำเข้าไปรบกวนสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจของผู้ป่วยขณะบันทึก [2] วิธีการกำจัดสัญญาณแทรกสอดที่ใช้กันทั่วไปคือ ป้อนสัญญาณผ่านเข้าไปในตัวกรองดิจิทัลที่ มีความถี่กลางที่ 50 Hz [2] ต่อมา วิดโดว (Widrow) และคณะ [3] ได้เสนอระเบียบวิธีการกำจัดสัญญาณแทรกสอดโดยอาศัยหลักการ อันประกอบด้วย สัญญาณอ้างอิง วงจรเลื่อนเฟส 90 องศาและตัวกรองแบบปรับที่ใช้สัมประสิทธิ์สองตัว สัมประสิทธิ์ของตัวกรอง จะถูกปรับอย่างต่อเนื่องและเหมาะสมเพื่อปรับขนาดและเฟสของ

สัญญาณอ้างอิงให้มีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณแทรกสอดให้มากที่สุด จากนั้น นำสัญญาณที่ได้ไปลบออกจากสัญญาณที่ได้รับ ผลที่ได้จะเหลือเฉพาะสัญญาณที่ต้องการ โดยอาศัยหลักการใน [3] โซ (So) [4] ได้นำเสนอระเบียบวิธีในการกำจัดสัญญาณแทรกสอดโดยใช้ อัลกอริทึม LMS ในการปรับขนาดและเฟสของสัญญาณอ้างอิง โดยตรงอย่างต่อเนื่อง ต่อมา ชันท์ และคณะ [5] ได้นำเสนอ ระเบียบวิธีการกำจัดสัญญาณแทรกสอดที่คัดแปลงจากหลักการใน [3] และ [4] กล่าวคือ ระบบจะสร้างสัญญาณรูปคลื่นไซน์และ โคไซน์ที่มีเฟสเป็นศูนย์แต่ไม่ทราบขนาด จากนั้นจะใช้ระเบียบ วิธีการ LMS ในการปรับขนาดของสัญญาณอ้างอิงทั้งสอง ถ้าเรา พิจารณาให้รอบคอบ ระเบียบวิธีการใน [5] จะเทียบเคียงกับ ระเบียบวิธีการใน [3] เมื่อเฟสของสัญญาณอ้างอิงถูกเลื่อนไป 90 องศาพอดี เมื่อทำการเปรียบเทียบสมรรถนะระหว่างหลักการใน [4] และ [5] พบว่า หลักการใน [5] สามารถทำงานในสิ่งแวดล้อมที่ ขนาดและเฟสของสัญญาณแทรกสอดแปรเปลี่ยนตามเวลาได้ดีกว่า หลักการใน [4] อย่างไรก็ตาม ข้อด้อยสำคัญของหลักการใน [4] และ [5] คือ ต้องสร้างเวกเตอร์สัญญาณอ้างอิงโคไซน์ความยาว  $L$  ซึ่งอยู่ในรูป  $[1 \cos(\pi/L) \dots \cos(\pi(L-1)/L)]$  ขึ้นมาและนำไปเก็บ ไว้ใน lookup table ซึ่งหากต้องการให้สัญญาณอ้างอิงมีความ ละเอียดสูงเราต้องกำหนดให้  $L$  มีค่าสูง ซึ่งจะส่งผลให้ระบบจะ ต้องการหน่วยความจำเพิ่มมากขึ้นด้วย

ในบทความนี้ได้้นำเสนอระเบียบวิธีสำหรับการกำจัดสัญญาณ แทรกสอดรูปคลื่นไซน์ที่ปรับปรุงมาจากหลักการใน [5] โดยได้นำ ตัวกำเนิดสัญญาณรูปคลื่น ไซน์แบบคัปเปิล (coupled-oscillator) มา เป็นแหล่งกำเนิดสัญญาณอ้างอิงแทนการใช้ lookup table ทำให้ไม่มี ปัญหาเรื่องความละเอียดของสัญญาณอ้างอิง ตัวกำเนิดสัญญาณ อ้างอิงที่นำมาใช้จะมีสองเอาต์พุตมีเฟสต่างกัน 90 องศาและมีขนาด ที่สามารถกำหนดได้จากค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ซึ่งใน บทความนี้จะกำหนดให้ขนาดมีค่าเป็นหนึ่งเท่านั้น สัญญาณเอาต์พุต ทั้งสองของตัวกำเนิดสัญญาณแบบคัปเปิลจะถูกนำไปคูณกับ สัมประสิทธิ์ที่ถูกปรับโดยระเบียบวิธีแบบ LMS เหมือนในบทความ [5] หลังจากนั้นนำสัญญาณทั้งสองมารวมกันและนำไปลบกับ สัญญาณที่ได้รับ หากระบบลู่เข้า สัญญาณแทรกสอดก็จะถูกกำจัด ทิ้งไปในที่สุด บทความนี้ยังได้แสดงผลการวิเคราะห์ทางสถิติของ



รูปที่ 1 ระเบียบวิธีการกำจัดสัญญาณแทรกสอดรูปคลื่น ไซน์

ระเบียบวิธีที่นำเสนอในรูปแบบของค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน ของสัมประสิทธิ์ ค่าขอบเขตสเตปไซส์ และ ค่าเวลาดังตัว ซึ่งพบว่า ผลที่ได้จากการวิเคราะห์สอดคล้องกับผลจำลองการทำงานด้วย คอมพิวเตอร์

## 2. ระเบียบวิธีที่นำเสนอ

แบบจำลองของระบบกำจัดสัญญาณแทรกสอดแสดงดังรูปที่ 1 จากรูปที่ 1  $d(n)$  คือสัญญาณที่ต้องการ  $i(n)$  คือสัญญาณแทรก สอดรูปคลื่น ไซน์ที่ทราบความถี่  $\omega_0$  และไม่ทราบค่าที่แน่นอน ของขนาด  $A$  และมุม  $\phi$  และมีค่าดังสมการ

$$i(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (1)$$

$$r(n) = d(n) + i(n) \quad (2)$$

คือสัญญาณที่รับได้ การกำจัดสัญญาณแทรกสอด  $i(n)$  ออกจาก สัญญาณที่รับได้  $r(n)$  ทำได้โดยการประมาณค่าสัญญาณแทรก สอดขึ้นมาโดยอาศัยแบบจำลองต่อไปนี้

$$\hat{i}(n) = a(n) \cos \omega_0 n + b(n) \sin \omega_0 n \quad (3)$$

โดยที่  $a(n)$  และ  $b(n)$  คือสัมประสิทธิ์แปรตามเวลาของระบบที่จะถูกปรับโดยระเบียบวิธีแบบ LMS สัมประสิทธิ์ทั้งสองนี้จะมีค่าสัมพัทธ์กับ  $A$  ตามสมการ

$$A = \sqrt{a^2(n) + b^2(n)} \quad (4)$$

จากสมการที่ (3) สัญญาณ  $\cos \omega_0 n$  และ  $\sin \omega_0 n$  ตามบทความ [5] จะถูกสร้างขึ้นที่ปลายทางโดยอาศัย lookup table แต่ในบทความนี้ได้นำตัวกำเนิดรูปคลื่นไซน์แบบคัปเปิล [7] มาใช้เพื่อสร้างสัญญาณอ้างอิงทั้งสองแทนการใช้ lookup table ดังนั้น จากรูปที่ 1 เราสามารถเขียนสมการที่ (3) ได้ใหม่เป็น

$$\tilde{i}(n) = a(n)y_c(n) + b(n)y_s(n) \quad (5)$$

เมื่อ  $y_c(n) = \cos \omega_0 n$  และ  $y_s(n) = \sin \omega_0 n$  คือเอาต์พุตทั้งสองของตัวกำเนิดคลื่นไซน์แบบคัปเปิล ซึ่งมีสมการของระบบดังนี้

$$y_c(n) = \cos \omega_0 y_c(n-1) - \sin \omega_0 y_s(n-1) \quad (6.1)$$

$$y_s(n) = \sin \omega_0 y_c(n-1) + \cos \omega_0 y_s(n-1) \quad (6.2)$$

เนื่องจากระบบในสมการที่ (6) ไม่มีอินพุต ดังนั้นเพื่อให้ระบบสร้างสัญญาณรูปคลื่นไซน์ออกมาเราต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบดังนี้  $y_c(-1) = \cos \omega_0$  และ  $y_s(-1) = -\sin \omega_0$  จะเห็นว่าด้วยการใช้ตัวกำเนิดสัญญาณแทน lookup table จะสามารถลดปัญหาความแม่นยำ (resolution) ของสัญญาณลงได้ นอกจากนี้ยังใช้หน่วยความจำน้อยลงด้วย กล่าวคือ ในขณะที่การใช้ lookup table ต้องการหน่วยความจำจำนวน  $L$  หน่วยแต่ตัวกำเนิดคลื่นไซน์แบบคัปเปิลตามสมการที่ (6) ต้องการหน่วยความจำเพียงแค่ 2 หน่วยเพื่อเก็บ  $y_c(n-1)$  และ  $y_s(n-1)$  เท่านั้น

สัมประสิทธิ์  $a(n)$  และ  $b(n)$  จะถูกปรับไปจนกระทั่งทำให้ค่ายกกำลังสองเฉลี่ย (mean square error) ช่วงขณะของสัญญาณ  $\tilde{d}(n)$  มีค่าต่ำสุด โดยอาศัยระเบียบวิธีแบบ LMS ดังนี้

$$a(n+1) = a(n) - \mu \tilde{d}(n) \frac{\partial \tilde{d}(n)}{\partial a(n)} \quad (7.1)$$

$$b(n+1) = b(n) - \mu \tilde{d}(n) \frac{\partial \tilde{d}(n)}{\partial b(n)} \quad (7.2)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \tilde{d}(n) &= r(n) - \tilde{i}(n) \\ &= r(n) - a(n)y_c(n) - b(n)y_s(n) \end{aligned} \quad (8)$$

และ  $\mu$  คือค่าสเตปไซส์ เป็นจำนวนจริงบวก เมื่อแทนค่าในบรรทัดที่ 2 ด้านขวาของสมการที่ (8) ลงในสมการที่ (7) ผลที่ได้คือ

$$a(n+1) = a(n) + \mu \tilde{d}(n) y_c(n) \quad (9.1)$$

$$b(n+1) = b(n) + \mu \tilde{d}(n) y_s(n) \quad (9.2)$$

อนึ่ง ระเบียบวิธีการปรับสัมประสิทธิ์  $a(n)$  และ  $b(n)$  ตามสมการที่ (9) จะเหมือนกับระเบียบวิธีใน [5] ถ้าแทน  $y_c(n) = \cos \omega_0 n$  และ  $y_s(n) = \sin \omega_0 n$

### 3. การวิเคราะห์สมรรถนะ

หัวข้อนี้นำเสนอการวิเคราะห์และผลการวิเคราะห์สมรรถนะทางสถิติของระเบียบวิธีที่นำเสนอ โดยปริมาณทางสถิติที่เราสนใจจะประกอบด้วยค่าไบแอส (bias) ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ  $a(n)$  และ  $b(n)$  (mean square error หรือ MSE) ค่าเวลาคงตัว (time constant หรือ  $\tau$ ) และค่าขอบเขตของ สเตปไซส์  $\mu$

### 3.1 ค่าไบแอส

ก่อนที่จะคำนวณหาค่าต่างๆ ดังกล่าวเราจะตั้งสมมติฐานสำหรับการวิเคราะห์สองข้อให้แก่สัญญาณคลาดเคลื่อน  $\tilde{d}(n)$  ดังนี้

ส.1 ระบบได้เข้าสู่สถานะอยู่ตัว (steady state)

ส.2 สัมประสิทธิ์แต่ละตัวเป็นอิสระจากกัน ทำให้สมมติได้ว่า

ในขณะคำนวณสัมประสิทธิ์ตัวหนึ่ง สัมประสิทธิ์ตัวอื่นได้ถูกประมาณค่าอย่างสมบูรณ์แล้ว (คือระบบสามารถประมาณค่าได้เท่ากับค่าที่แท้จริง)

จากสมมติฐานสองข้อดังกล่าว ทำให้เราสามารถเขียนสมการของสัญญาณคลาดเคลื่อนที่สถานะอยู่ตัวได้ว่า

$$\tilde{d}_s(n) = d(n) + a_0 y_c(n) + b_0 y_s(n) - \tilde{i}_s(n) \quad (10)$$

เมื่อตัวห้อย  $s$  แทน steady state และ

$$\tilde{i}_s(n) = a(n)y_c(n) + b_0 y_s(n) \quad (11)$$

จากสมการที่ (11) เราคำนึงสนใจสัมประสิทธิ์  $a(n)$  ดังนั้น จากสมมติฐาน ส.2 ทำให้เราสามารถแทน  $b(n)$  ด้วย  $b_0$  และเมื่อแทนค่าในสมการที่ (11) ลงในสมการที่ (10) ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} \tilde{d}_s(n) &= d(n) + a_0 - a(n) y_c(n) \\ &= d(n) + \delta_a(n) y_c(n) \end{aligned} \quad (12)$$

โดยที่  $\delta_a(n) = a_0 - a(n)$  คือคลาดเคลื่อนจากการประมาณของ  $a(n)$  หลังจากที่ได้ค่าสัญญาณคลาดเคลื่อนที่สถานะอยู่ตัวตามสมการที่ (12) ต่อไปจะกลับไปพิจารณาสมการที่ (9.1) และทำการคูณตลอดสมการด้วย -1 จากนั้นนำค่า  $a_0$  ไปบวกทั้งสองข้าง แทน  $\tilde{d}(n)$  ด้วย  $\tilde{d}_s(n)$  และสุดท้ายหาค่าเฉลี่ย จะได้

$$E \delta_a(n+1) = E \delta_a(n) - \mu \frac{E[\tilde{d}_s(n)y_c(n)]}{I(n)} \quad (13)$$

โดยที่  $E \bullet$  คือตัวดำเนินการหาค่าคาดหวังทางสถิติ และพบว่า

$$I(n) \simeq \frac{1}{2} E \delta_a(n) \quad (14)$$

การได้มาซึ่งสมการที่ (14) ได้สมมติว่า  $d(n)$  และ  $y_c(n)$  ไม่มีความเกี่ยวข้องกันทางสถิติ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (14) ลงในสมการที่ (13) จะได้

$$\begin{aligned} E \delta_a(n+1) &= \left(1 - \mu \frac{1}{2}\right) E \delta_a(n) \\ &= \eta E \delta_a(n) \end{aligned} \quad (15)$$

เมื่อ  $\eta = 1 - \mu/2$  ถ้าสมมติว่า  $\delta_a(n)$  เปลี่ยนตามเวลาอย่างช้าๆ เราสามารถเขียนสมการที่ (15) ได้ใหม่เป็น

$$\delta_a(n+1) = \eta \delta_a(n) \quad (16)$$

จากสมการที่ (16) พบว่ามีรูปแบบเป็นสมการผลต่างอันดับหนึ่งเอกพันธ์ ซึ่งผลเฉลยของสมการนี้จะขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้น  $\delta_a(-1)$  เท่านั้นซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\delta_a(n) = K \gamma^n \quad (17)$$

เมื่อ  $K$  เป็นค่าคงที่และสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น เมื่อแทนค่าในสมการที่ (17) ลงในสมการที่ (16) และจัดรูปใหม่จะได้

$$K \gamma^{n+1} - \eta K \gamma^n = 0 \quad (18)$$

จากสมการที่ (18) พบว่า  $\gamma = \eta$  หลังจากแทนลงในสมการที่ (17) จะได้

$$\delta_a(n) = K\eta^n \quad (19)$$

กำหนดให้ค่าเริ่มต้นของ  $\delta_a(n)$  เป็น  $\delta_a(-1)$  และคำนวณสมการที่ (19) ที่  $n = -1$  ได้ผลเป็น

$$\begin{aligned} \delta_a(-1) &= K\eta^{-1} \\ K &= \eta\delta_a(-1) \end{aligned} \quad (20)$$

แทนค่าในสมการที่ (20) ลงในสมการที่ (19) ผลที่ได้คือ

$$\delta_a(n) = \delta_a(-1)\eta^{n+1} \quad (21)$$

จากสมการที่ (21) ทำให้เราสามารถหาผลเฉลยของสมการที่ (15) ได้เป็น

$$E \delta_a(n) = \delta_a(-1)\eta^{n+1} \quad (22)$$

จากสมการที่ (15) จะพบว่า ระบบจะมีเสถียรภาพเมื่อ  $0 < \eta < 1$  ดังนั้น  $E[\delta_a(n)] \rightarrow 0$  เมื่อ  $n \rightarrow \infty$  ทำให้เราทราบว่า ระเบียบวิธีนี้ไร้ค่าไบแอสและการที่  $0 < \eta < 1$  ทำให้เราทราบค่าขอบเขตของ สเตปไซส์อีกด้วย ดังนี้

$$0 < \mu < 2 \quad (23)$$

จากสมการที่ (22) เนื่องจาก  $\eta$  จะลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ดังนั้นเราสามารถเขียนได้ว่า

$$\eta = e^{-1/\tau} \quad (24)$$

เมื่อ  $\tau$  คือค่าเวลาคงตัว เมื่อแก้สมการที่ (24) เพื่อหาค่าเวลาคงตัว  $\tau$  ได้ผลเป็น

$$\tau = -\frac{1}{\ln \eta} \quad (\text{ตัวอย่าง}) \quad (25)$$

เมื่อ  $\ln = \log_e$  จากค่าเวลาคงตัวในสมการที่ (25) ทำให้เราสามารถทำนายค่าเวลาที่ระบบจะเข้าสู่สถานะอยู่ตัวได้ กล่าวคือ โดยทั่วไปจะกำหนดให้เวลาที่คิดเป็น 5 เท่าของค่าเวลาคงตัวเป็น เวลาเริ่มต้นที่ระบบเข้าสู่สถานะอยู่ตัว

เมื่อดำเนินการคำนวณเดียวกันนี้กับสัมประสิทธิ์  $b(n)$  เราจะได้ค่าไบแอสดังนี้

$$E \delta_b(n) = \delta_b(-1)\eta^{n+1} \quad (26)$$

โดยที่  $\delta_b(n) = b_0 - b(n)$  คือคลาดเคลื่อนประมาณของ  $b(n)$  และ  $\delta_b(-1)$  คือค่าเริ่มต้นของ  $\delta_a(n)$  จากสมการที่ (26) พบว่ามีรูปแบบเดียวกับไบแอสของ  $a(n)$  ดังนั้นถ้ากำหนดให้สเตปไซส์สำหรับปรับ  $a(n)$  และ  $b(n)$  เป็นตัวเดียวกัน จะทำให้สัมประสิทธิ์ทั้งสองเข้าสู่ค่าที่แท้จริงโดยใช้เวลาที่เท่ากัน

### 3.2 ค่า MSE

ต่อไปจะหาค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ  $a(n)$  และ  $b(n)$  (ต่อไปจะเรียกสั้นๆ ว่า ค่า MSE) โดยจะสมมติว่าค่าที่แท้จริงของสัมประสิทธิ์ทั้งสองคือ  $a_0$  และ  $b_0$  ตามลำดับ ดังนั้นค่า MSE จะมีค่าเป็น

$$E[ a_0 - a(n) ]^2 = E[\delta_a^2(n)] \quad (26.1)$$

$$E[ b_0 - b(n) ]^2 = E[\delta_b^2(n)] \quad (26.2)$$

ในการคำนวณหาค่า MSE นั้นเราจะนำสมมติฐาน ๓.1 ๓.2 และสมการที่ (10) - (12) มาใช้อีกครั้งหนึ่ง

จากสมการที่ (13) ก่อนที่จะทำการหาค่าเฉลี่ย เราจะยกกำลังสองทั้งสองข้างก่อน หลังจากนั้นจึงหาค่าเฉลี่ย ผลจากการกระทำนี้คือ

$$\begin{aligned}
E[\delta_a^2(n+1)] &= E\left[\delta_a(n) - \mu \tilde{d}_s(n)y_c(n)\right]^2 \\
&= E[\delta_a^2(n)] - 2\mu \underbrace{E[\delta_a(n)\tilde{d}_s(n)y_c(n)]}_{I_1(n)} \\
&\quad + \mu^2 \underbrace{E[\tilde{d}_s^2(n)y_c^2(n)]}_{I_2(n)}
\end{aligned} \tag{27}$$

โดยที่

$$I_1(n) \simeq \frac{1}{2} E[\delta_a^2(n)] \tag{28}$$

$$I_2(n) \simeq \frac{1}{2} R_{dd}(0) + \frac{3}{8} E[\delta_a^2(n)] \tag{29}$$

เมื่อ  $R_{dd}(m) = E[d(n)d(n+m)]$  คือฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ของ  $d(n)$  ที่ผลต่างเวลา  $m$  เมื่อแทนค่าในสมการที่ (28)–(29) ลงในสมการที่ (27) ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned}
E[\delta_a^2(n+1)] &= \left(1 - \mu + \frac{3}{8}\mu^2\right) E[\delta_a^2(n)] + \frac{1}{2}\mu^2 R_{dd}(0) \\
&= \eta_{21} E[\delta_a^2(n)] + \eta_{22}
\end{aligned} \tag{30}$$

เมื่อ

$$\eta_{21} = 1 - \mu + \frac{3}{8}\mu^2$$

$$\eta_{22} = \frac{1}{2}\mu^2 R_{dd}(0)$$

สมการที่ (30) เป็นสมการผลต่างอันดับหนึ่งทั่วไปที่มีอินพุตเป็น  $\eta_{22}$  และมีเอาต์พุตเป็น  $E[\delta_a^2(n)]$  ก่อนที่จะแก้สมการเพื่อหาค่าผลเฉลย เราจะสมมติว่า  $\delta_a^2(n)$  เปลี่ยนตามเวลาอย่างช้าๆ ทำให้สามารถประมาณสมการที่ (30) ได้ว่า

$$\delta_a^2(n+1) = \eta_{21}\delta_a^2(n) + \eta_{22} \tag{31}$$

จากนั้นจะแก้สมการโดยสมมติให้ผลเฉลยมีค่าดังนี้

$$\delta_a^2(n) = y_c(n) + y_p(n) \tag{32}$$

เมื่อ  $y_c(n)$  คือผลเฉลยเติมเต็ม (complementary solution) และ  $y_p(n)$  คือผลเฉลยเฉพาะ (particular solution) โดยจะสมมติให้

$$y_c(n) = B\gamma^n \tag{33}$$

เมื่อ  $B$  เป็นค่าคงที่ ผลเฉลยนี้สามารถหาได้โดยการละเลยพจน์ที่สองด้านขวาของสมการที่ (31) เมื่อจัดรูปสมการใหม่และแทนค่าในสมการที่ (33) ลงไปจะได้ผลเป็น

$$\begin{aligned}
B\gamma^{n+1} - \eta_{21}B\gamma^n &= 0 \\
B\gamma^n (\gamma - \eta_{21}) &= 0
\end{aligned} \tag{34}$$

จากสมการที่ (34) จะพบว่า  $\gamma = \eta_{21}$  เมื่อแทนลงในสมการที่ (33) จะได้ผลเฉลยเติมเต็มดังนี้

$$y_c(n) = B\eta_{21}^n \tag{35}$$

ต่อไปจะหาค่าผลเฉลย  $y_p(n)$  จากสมการที่ (31) เราพบว่า  $\eta_{22}$  เป็นอินพุตของสมการ ดังนั้นจะสมมติว่า  $y_p(n) = C\eta_{22}$  โดยที่  $C$  เป็นค่าคงที่ จากนั้นแทนลงในสมการที่ (31) จะได้

$$\begin{aligned}
C\eta_{22} - \eta_{21}C\eta_{22} &= \eta_{22} \\
C - \eta_{21}C &= 1 \\
C &= \frac{1}{1 - \eta_{21}}
\end{aligned} \tag{36}$$

ดังนั้นจะพบว่า

$$y_p(n) = \frac{1}{1 - \eta_{21}} \eta_{22} \tag{37}$$

และจะได้ผลเฉลยรวมเป็น

$$\delta_a^2(n) = B\eta_{21}^n + \frac{1}{1-\eta_{21}}\eta_{22} \quad (38)$$

ขณะนี้เรามีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ  $B$  ซึ่งจะสามารถหาได้จากค่าเริ่มต้น  $\delta_a^2(-1)$  ผ่านทางผลตอบสนองอินพุตศูนย์ (zero input response)  $y_{zi}(n)$  ซึ่งมีค่าดังนี้

$$y_{zi}(n) = B\eta_{21}^n \quad (39)$$

กำหนดให้ค่าเริ่มต้นของ  $\delta_a^2(n)$  เป็น  $\delta_a^2(-1)$  จากนั้นคำนวณสมการที่ (39) ที่เวลา  $n = -1$  และหาค่า  $B$  ได้ผลเป็น

$$B = \delta_a^2(-1)\eta_{21} \quad (40)$$

แทนค่าในสมการที่ (40) ลงในสมการที่ (39) จะได้

$$y_{zi}(n) = \delta_a^2(-1)\eta_{21}^{n+1} \quad (41)$$

ต่อไปจะหาผลตอบสนองสถานะศูนย์ (zero state response)  $y_{zs}(n)$  ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยการคำนวณสมการที่ (38) ที่  $n = -1$  และกำหนดให้  $\delta_a^2(-1) = 0$  หลังจากนั้นแก้สมการเพื่อค่า  $B$  จะได้

$$B = -\frac{1}{1-\eta_{21}}\eta_{21}\eta_{22} \quad (42)$$

ดังนั้นผลเฉลยสถานะศูนย์คือ

$$y_{zs}(n) = -\frac{1}{1-\eta_{21}}\eta_{22}\eta_{21}^{n+1} + \frac{1}{1-\eta_{21}}\eta_{22} \quad (43)$$

สุดท้ายผลเฉลยรวมจะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \delta_a^2(n) &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \\ &= \delta_a^2(-1)\eta_{21}^{n+1} - \frac{1}{1-\eta_{21}}\eta_{22}\eta_{21}^{n+1} + \frac{1}{1-\eta_{21}}\eta_{22} \\ &= \left( \delta_a^2(-1) - \frac{1}{1-\eta_{21}}\eta_{22} \right) \eta_{21}^{n+1} + \frac{1}{1-\eta_{21}}\eta_{22} \end{aligned} \quad (44)$$

หรือ

$$\begin{aligned} \delta_a^2(n) &= \left( \delta_a^2(-1) - \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{8}\mu\right)^2} \frac{1}{2} \mu R_{dd}(0) \right) \eta_{21}^{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{8}\mu\right)^2} \frac{1}{2} \mu R_{dd}(0) \\ &= \delta_a^2(-1) - \mu DR_{dd}(0) \eta_{21}^{n+1} + \mu DR_{dd}(0) \end{aligned} \quad (45)$$

เมื่อ  $D = (1/2) / (1 - 3\mu/8)$  สุดท้ายจะได้ค่า MSE ที่ต้องการสำหรับสัมประสิทธิ์  $a(n)$  คือ

$$E[\delta_a^2(n)] = \delta_a^2(-1) - \mu DR_{dd}(0) \eta_{21}^{n+1} + \mu DR_{dd}(0) \quad (46)$$

จากสมการที่ (46) พบว่า  $\eta_{21} \rightarrow 0$  เมื่อ  $n \rightarrow \infty$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$E[\delta_a^2(\infty)] = \mu DR_{dd}(0) \quad (47)$$

จะเห็นว่า ค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอจะขึ้นตรงกับสเปกตรัมและค่าฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ของสัญญาณ  $d(n)$  ที่เวลา  $m = 0$

ประยุกต์หลักการเดียวกันนี้กับสมการที่ (9.2) เราจะได้

$$E[\delta_b^2(n)] \simeq \delta_b^2(-1) - \mu DR_{dd}(0) \eta_{21}^{n+1} + \mu DR_{dd}(0) \quad (48)$$

ที่สถานะอยู่ตัวเมื่อ  $n \rightarrow \infty$  จะได้ว่า

$$E[\hat{o}_b^2(\infty)] = \mu DR_{dd}(0) \quad (49)$$

ซึ่งพบว่า MSE ของสัมประสิทธิ์ทั้งสองตัวมีค่าเท่ากัน

#### 4. ผลจำลองการทำงาน

ในหัวข้อนี้จะเริ่มด้วยการจำลองการทำงานของระเบียบวิธีการกำจัดสัญญาณแทรกสอดรูปคลื่นไซน์เพื่อพิสูจน์ความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ โดยจะได้แสดงผลการเปรียบเทียบค่าในทางทฤษฎีและปฏิบัติของ ไบแอส MSE และความเร็วกการลู่เข้าของระบบ สุดท้ายจะแสดงการประยุกต์ใช้งานสำหรับการกำจัดสัญญาณแทรกสอดรูปคลื่นไซน์ที่เกิดขึ้นในระบบบันทึกสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (electrocardiogram หรือ ECG)

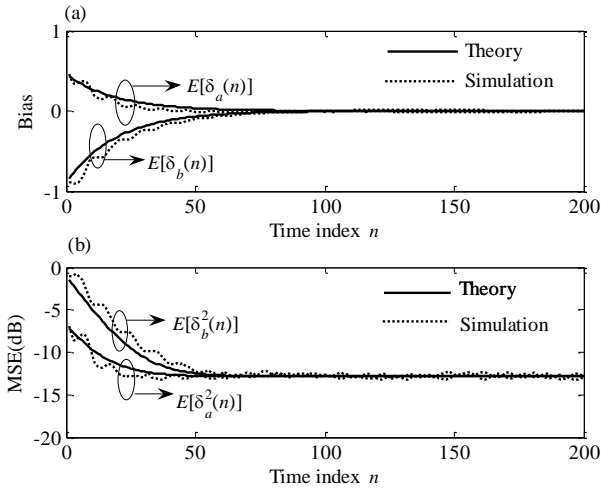
##### 4.1 ค่าไบแอสและ MSE

เพื่อที่จะเปรียบเทียบผลการศึกษาทางทฤษฎีที่วิเคราะห์ได้กับผลที่ได้จากการจำลองการทำงานของระบบ เราจะกำหนดให้สัญญาณที่ต้องการ  $d(n)$  เป็นสัญญาณรบกวนขาวแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีค่าความแปรปรวนเป็น  $\sigma^2$  การกำหนดเช่นนี้จะทำให้เราสามารถวัดสมรรถนะของระบบได้ง่ายและแม่นยำ ทั้งนี้เพราะในทางปฏิบัติ สัญญาณที่ต้องการมักมีรูปแบบที่ไม่แน่นอน เช่นสัญญาณภาพ สัญญาณเสียง สัญญาณ ECG หรือสัญญาณข้อมูลต่างๆ เป็นต้น จึงเป็นการยากที่จะทำการทดลองด้วยกับสัญญาณดังกล่าว

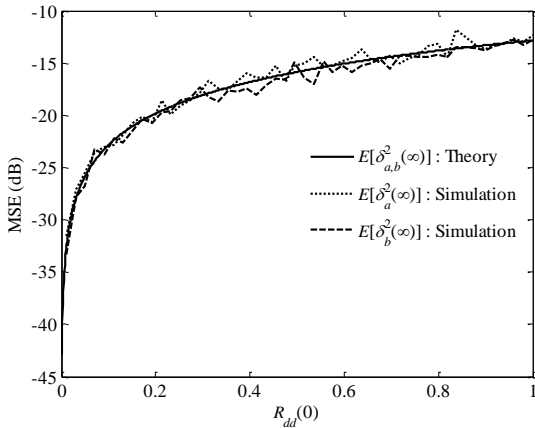
ในการทดลองได้กำหนดให้สัญญาณแทรกสอดรูปคลื่นไซน์มีความถี่ที่เป็น  $\omega_0 = 50$  Hz ขนาด  $A = 1$  มุม  $\phi = \pi/4$  ความถี่ซีกตัวอย่าง  $f_s = 1$  kHz ส่วนตัวแปรของระบบได้กำหนดให้สเตปไซส์  $\mu = 0.1$  ค่าเริ่มต้นของการปรับ  $a(-1) = b(-1) = 0$  ส่วนสัญญาณที่ต้องการ  $d(n)$  ได้กำหนดให้มีความแปรปรวนเป็น  $\sigma^2 = 1$  ด้วยกับความยาว 200 ตัวอย่าง และมีรูปแบบ (trial) แตกต่างกัน 1000 รูปแบบ ผลการทดลองที่ได้ทั้งหมดได้ถูกนำไปหาค่าเฉลี่ยแบบแอนแซมเบิล (ensemble average)

ปัญหาในการทดลองนี้คือ เราไม่สามารถหาค่าที่แท้จริงของ  $a(n)$  และ  $b(n)$  ได้ เราทราบแต่เพียงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ทั้งสองตามสมการที่ (4) เท่านั้น ทั้งนี้เนื่องจากสัมประสิทธิ์ทั้งสองไม่ได้เป็นขนาดขององค์ประกอบไซน์และโค

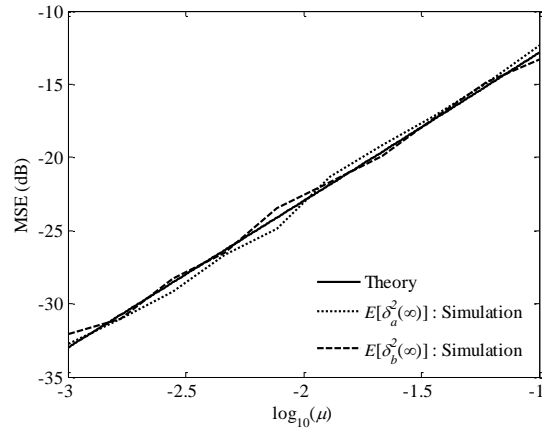
ไซน์ของสัญญาณแทรกสอดตามสมการที่ (1) แต่มันทั้งสองเป็นสัมประสิทธิ์ของระบบที่ใช้สำหรับประมาณค่าสัญญาณแทรกสอดซึ่งจะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามขนาด  $A$  และ  $\phi$  ที่แท้จริงของสัญญาณแทรกสอด ด้วยเหตุนี้ เราจึงไม่สามารถทราบค่าล่วงหน้าได้ ดังนั้นสำหรับค่า  $A$  และ  $\phi$  ค่าหนึ่งจะให้ค่าที่แท้จริงเป็น  $a(n) \rightarrow a_0$  และ  $b(n) \rightarrow b_0$  สำหรับในการทดลองนี้เราพบว่า  $a_0 = 0.45399\dots$  และ  $b_0 = -0.89100\dots$  จะเห็นว่าค่าที่ได้มีจุดทศนิยมไม่รู้จบ อย่างไรก็ตาม เราจะใช้ค่าประมาณถึงทศนิยมหลักที่สามเท่านั้น ดังนั้น จะได้ค่า  $a_0 \simeq 0.454$  และ  $b_0 \simeq -0.891$  ดังนั้นทำให้เราทราบว่า ในช่วงเริ่มต้นของการปรับ ค่าไบแอสและ MSE จะมีค่าเป็น  $\{a_0, b_0\}$  และ  $\{a_0^2, b_0^2\}$  ตามลำดับ และเราสามารถทำนายได้ว่า เมื่อ  $n \rightarrow \infty$  ค่า MSE (มีค่าเดียวตามสมการที่ (47) และ (49)) จะมีค่าเป็น  $MSE = 0.052$  ส่วนผลที่ได้จากการทดลองจะมีค่าเป็น  $MSE_a \simeq 0.056$  และ  $MSE_b \simeq 0.049$  ซึ่งคลาดเคลื่อนไปจากค่าที่วิเคราะห์ให้ไปเล็กน้อย รูปที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่เทียบกับผลการทดลองค่าไบแอส (รูป a) และ MSE (รูป b) จากรูป a พบว่าไบแอสจะลดลงไปสู่ค่าศูนย์เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น และพบว่าผลการคำนวณสามารถติดตามผลทางปฏิบัติได้แม่นยำ สำหรับรูป b แสดงค่า MSE เราจะพบว่าค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ทั้งสองจะลู่เข้าสู่ค่าจำกัดตามสมการที่ (47) และ (49) โดยผลจากการทดลองและทฤษฎีก็มีความสอดคล้องกัน จากสมการที่ (25) เราสามารถทำนายได้ว่า ระบบจะเข้าสู่สถานะอยู่ตัวที่  $n = -5/\ln(1 - \mu/2) \simeq 98$  ตัวอย่าง ซึ่งเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2a หรือ 2b จะพบว่าสอดคล้องกัน รูปที่ 3 แสดงการเปรียบเทียบค่า MSE ที่สถานะอยู่ตัวเทียบกับ  $R_{dd}(0)$  พบว่าค่าที่คำนวณได้สามารถติดตามผลที่ได้จากการทดลองได้อย่างใกล้ชิด และพบว่าเมื่อ  $R_{dd}(0)$  ลดลงน้อยกว่า 0.2 เป็นต้นไป จะส่งผลให้ MSE ลดลงอย่างรวดเร็ว ในทางกลับกัน MSE จะค่อยๆ เพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ ส่วนรูปที่ 4 แสดงการเปรียบเทียบค่า MSE ที่สถานะอยู่ตัวเทียบกับ  $\mu$  พบว่าค่าที่คำนวณได้สามารถติดตามผลที่ได้จากการทดลองได้อย่างใกล้ชิดเช่นกัน และพบว่า MSE แปรผันตามค่า  $\mu$  แบบเชิงเส้น คือเมื่อค่า  $\mu$  ลด MSE ก็ลดตาม ในทางกลับกัน MSE จะเพิ่มขึ้น



รูปที่ 2 เปรียบเทียบค่าไบแอส (a) และค่า MSE (b) ที่ได้จากการคำนวณและการทดลอง



รูปที่ 3 เปรียบเทียบค่า MSE ที่ได้จากการคำนวณและการทดลองเทียบกับ  $R_{dd}(0)$  เมื่อ  $\mu = 0.1$

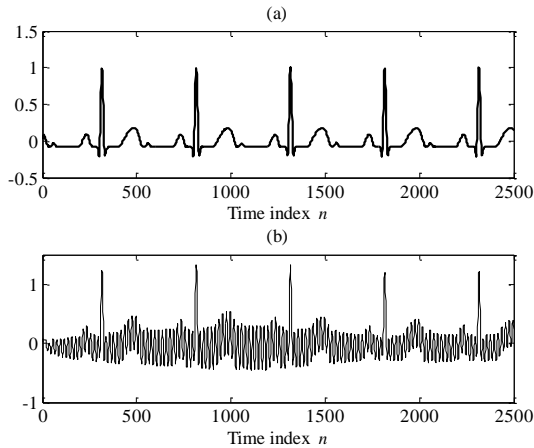


รูปที่ 4 เปรียบเทียบค่า MSE ที่ได้จากการคำนวณและการทดลองเทียบกับ  $\mu$  เมื่อ  $R_{dd}(0) = 1$

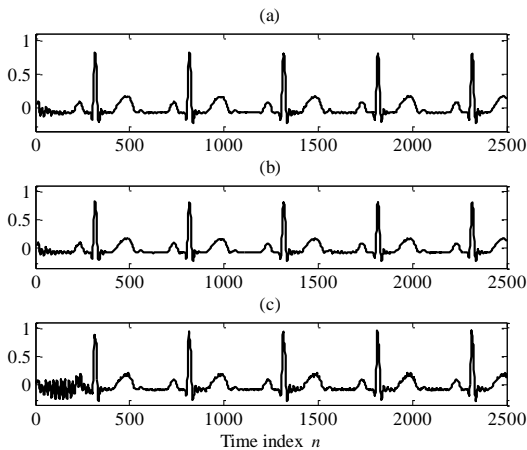
4.2 การกำจัดสัญญาณแทรกสอดในสัญญาณ ECG

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการนำระเบียบวิธีที่นำเสนอไปใช้สำหรับกำจัดสัญญาณแทรกสอดจากเพาเวอร์ไลน์ 220 โวลต์ 50 Hz ที่เหนี่ยวนำเข้าไปรบกวนสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจของผู้ป่วยขณะทำการวัดหรือบันทึก

ในการทดลองนี้เรานำสัญญาณ ECG มาตรฐานจากเครื่องกำเนิดสัญญาณขนาด 1 โวลต์ความถี่ 2 Hz ส่วนสัญญาณแทรกสอดกำหนดให้เป็นสัญญาณรูปคลื่นไซน์ความถี่คงที่ 50 Hz ขนาดและมุมเปลี่ยนตามเวลา รูปที่ 5a แสดงสัญญาณ ECG ส่วนรูปที่ 5b แสดงสัญญาณ ECG ที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณแทรกสอดรูปคลื่นไซน์ดังกล่าว จากนั้นบันทึกสัญญาณในรูปที่ 5b ลงคอมพิวเตอร์ด้วยอัตราซีกตัวอย่าง 1 kHz และนำไปป้อนให้กับระบบที่ต้องการทดสอบ ซึ่งผลการจำลองการทำงานแสดงดังรูปที่ 6 โดยรูปที่ 6a เป็นผลการทดลองที่ได้ระบบที่นำเสนอ รูปที่ 6b ได้จากบทความ [5] และ รูปที่ 6c ได้จากบทความ [4] อนึ่ง ในการทดลองนี้ได้กำหนดให้ค่าสเตปไซส์ของทุกระบบมีค่าเป็น  $\mu = 0.1$  จากการประเมินผลการทดลองในรูปที่ 6 เราจะเห็นว่า ระบบที่นำเสนอและระบบในบทความ [5] สามารถกำจัดสัญญาณแทรกสอดได้เร็วใกล้เคียงกัน และทั้งคู่มีอัตราลู่เข้าที่เร็วกว่าระเบียบวิธีในบทความ [4]



รูปที่ 5 (a) สัญญาณ ECG มาตรฐาน (b) สัญญาณ ECG ที่ถูกแทรกสอด



รูปที่ 6 ผลการกำจัดสัญญาณแทรกสอดที่ได้จาก (a) ระบบที่นำเสนอ (b) ระบบในความถี่ [5] และ (c) ระบบในบทความที่ [4]

4. วิจารณ์และสรุป

ในบทความนี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีสำหรับกำจัดสัญญาณรูปคลื่นไซน์แบบปรับตัว โดยได้นำเสนอการใช้งานตัวกำเนิดสัญญาณอ้างอิงรูปคลื่นไซน์แบบคัปเปิลแทนการใช้ lookup table ที่ต้องการหน่วยความจำมากหากต้องการให้สัญญาณอ้างอิงมีความละเอียดสูง หลักการที่นำเสนอไม่ได้ช่วยเพิ่มสมรรถนะด้านอื่น ๆ ของระบบก่อนหน้า อย่างไรก็ตาม ในบทความนี้ได้เพิ่มรายละเอียดที่สำคัญลงไป กล่าวคือ ได้นำเสนอการวิเคราะห์สมรรถนะทางสถิติของระบบเข้ามาด้วย ซึ่งการวิเคราะห์นี้ยังไม่เคยถูกนำเสนอมาก่อนหน้านี้ โดยวิธีการและผลการวิเคราะห์ตามที่ได้นำเสนอไปแล้วนั้น

พบว่ามีความสอดคล้องกับผลจำลองการทำงานมาก ทำให้สามารถเข้าใจพฤติกรรมของระบบได้ดียิ่งขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติเราจะพบว่า การกำจัดสัญญาณแทรกสอดเป็นปัญหาที่ยากและท้าทาย ทั้งนี้เพราะโดยทั่วไปมักจะไม่สามารถกำจัดความถี่ ขนาบและเฟส ที่แน่นอนได้ ระบบที่นำเสนอในบทความนี้ได้สมมติว่าความถี่ของสัญญาณแทรกสอดเป็นค่าคงที่ ทำให้การแก้ปัญหาสัญญาณแทรกสอดง่ายขึ้นมาก การพัฒนาระเบียบวิธีการที่นำเสนอให้สามารถใช้ได้กับกรณีที่ไม่ทราบค่าความถี่ที่แน่นอนเป็นหัวข้อที่จะทำวิจัยในอนาคตต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] A. Nehorai, "A minimal parameter adaptive notch filter with constrained poles and zeros," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 33, no. 4, pp. 983-996, 1985.
- [2] S.C.Pei and C.C.Tseng, "IIR multiple notch filter design based on allpass filter," *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process.*, vol. 44, no. 2, pp. 133-136, 1997.
- [3] B. Widrow et al., "Adaptive noise cancelling: principles and applications," *Proc. IEEE*, vol. 63, no. 12, pp. 1692-1716, Dec. 1975.
- [4] H.C.So, "Adaptive algorithm for sinusoidal interference cancellation," *Electronic letters*, vol. 33, issue 22, pp. 1910-1912, 1997.
- [5] ธนันท์ คณะเจริญ จิรสุดา โกษิยาภรณ์ ราชู พันธุ์ฉลาด และ ปราโมทย์ วาดเขียน "ระเบียบวิธีในการปรับตัวแบบใหม่ของตัวกรองสัญญาณแบบปรับตัวได้" *การประชุมวิชาการทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 31* หน้า 1121-1124 29-31 ตุลาคม 2551
- [6] Simon Haykin, *Adaptive filter theory*, Fourth edition, Prentice Hall, 2002.
- [7] Proakis, J. G., and Manolakis, D. G., *Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications*. 3<sup>rd</sup> ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.



ราชู พันธุ์ฉลาด สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาเทคโนโลยีโทรคมนาคม จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าคุณทหารลาดกระบังในปี พ.ศ. 2540 ระดับปริญญาโท สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จากสถาบันเดียวกันในปี พ.ศ. 2543 และระดับปริญญาเอก สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ในปี 2550 ปัจจุบันทำงานเป็นอาจารย์ประจำดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ สังกัด ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร หัวข้องานวิจัยที่สนใจได้แก่ การประมวลผลสัญญาณแอนะล็อกและดิจิทัล ทฤษฎีข่าวสาร การสื่อสารแอนะล็อกและดิจิทัล