

การตอบสนองต่อการสั่นสำหรับระบบ 1 ดีกรีอิสระ: I – การสั่นอิสระและ แบบถูกบังคับที่มีและไม่มี การหน่วง

Vibration Responses for SDOF System: I – Free and Forced Vibrations with and without Damping

ปวริศ โปษะนันท์¹ วิษณุศ วังศ์วานิชวัฒนา² ประกิจ เปรมธรรมกร³ และ ยศ สมพรเจริญสุข

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา สถาบันวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยีอุตสาหกรรม
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร 140 ถนนเชื่อมสัมพันธ์ แขวงกระทุ่มราย เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: 661900031@mut.ac.th¹, wikhanes@gmail.com², pprakit@mut.ac.th³,

*Corresponding author: syossyos@mut.ac.th

Manuscript Received May 16, 2025

Revised June 21, 2025

Accepted June 26, 2025

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์ที่ครอบคลุมและอธิบายผล
การตอบสนองของระบบการสั่นสะเทือนที่มี 1 ดีกรีอิสระโดย
ละเอียดซึ่งเกี่ยวข้องกับการสั่นแบบอิสระและแบบถูกบังคับทั้งที่มี
และไม่มี การหน่วง รายละเอียดของการวิเคราะห์ที่ได้ให้ไว้และ
นำไปสู่การได้มาซึ่งผลเฉลยรูปแบบปิดเชิงวิเคราะห์ ได้สังเกตเห็น
ผลลัพธ์ที่สำคัญและมีการอภิปรายให้ไว้ในบทความ หลักการ
ต่างๆ สามารถใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการจำลองระบบที่มีความซับซ้อน
โดยการใช้หลายจำนวนดีกรีอิสระที่เหมาะสมสำหรับเทคนิคเชิง
ตัวเลข

คำสำคัญ: การสั่นสะเทือน การหน่วง ผลเฉลยรูปแบบปิด ระบบที่มี 1
ดีกรีอิสระ

ABSTRACT

*This paper presents a comprehensive analysis and
clearly explains the responses of vibrating system
having single degree of freedom, which involved free
and forced vibrations with and without damping.*

*Detailed analysis is given and led to obtain an
analytical closed-form solution. Important results are
observed and discussed in the paper. The concepts can
be used as a basic to model a more complex system
using the multidegree of freedom suitable for
numerical techniques.*

Keywords: Vibration, Damping, Closed-form Solution,
SDOF System

1. บทนำและความสำคัญของปัญหา

การสั่นสะเทือน (Vibration or oscillation) หรือ เรียกโดยย่อ
ว่า การสั่น คือ การศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ซ้ำหรือซ้ำใกล้เคียง
(Repeated or nearly repeated motion) กับแนวเส้นทางการ
เคลื่อนที่เดิมของวัตถุ หรือของระบบเชิงกลที่สัมพันธ์กับกรอบอ้างอิง
(Reference frame) หรือ ตำแหน่งที่ระบุ (Nominal position) [1]
– [3]

การให้ความสนใจต่อการวิเคราะห์การสั่นในเชิงวิศวกรรม คือ
เพื่อหลีกเลี่ยงการสั่นสะเทือนมากเกินไป (Excessive vibration) [1]
ที่อาจส่งผลกระทบต่อโครงสร้าง (Structures) เครื่องจักรกล

(Machines) หรือ ยานพาหนะ (Vehicles) ซึ่งเมื่อไหร่ก็ตาม ค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่น (Natural vibration frequency) ของระบบที่กำลังพิจารณาจะมีการซ้อนทับกับค่าความถี่การสั่นของการกระตุ้นจากภายนอก (External exciting vibration frequency) ส่งผลทำให้เกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า การกำทอน (Resonance) ซึ่งเป็นสาเหตุนำไปสู่การเคลื่อนที่มากหรือการเสียรูปมากที่มีผลกระทบต่อการใช้งานหรืออาจเกิดการวิบัติ (Failures) ตามมาในภายหลัง ดังนั้น การคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติจึงเป็นสิ่งสำคัญหลักในการศึกษาการสั่นของระบบ

คุณสมบัติสำคัญที่เป็นองค์ประกอบพื้นฐานของการสั่น (Basic components of vibrating) โดยส่งผลต่อพฤติกรรมตอบสนองของระบบประกอบด้วย [4]

- (1) มวล (Mass) ทำให้เกิดแรงเฉื่อย (Inertia force) ในทิศทางตรงข้ามกับการเคลื่อนที่
- (2) ความแกร่ง (Stiffness) มีผลต่อแรงต้านทาน (Resisting force) ของระบบ
- (3) กลไกการหน่วง (Damper mechanism) ส่งผลต่อการกระจายหรือสลายพลังงาน (Energy dissipation)

เมื่อองค์ประกอบพื้นฐานของการสั่นมีคุณลักษณะเป็นแบบเชิงเส้น จึงเรียกการสั่นของระบบที่เกิดขึ้นนี้ว่า การสั่นแบบเชิงเส้น (Linear vibration) โดยสามารถทำการประยุกต์ใช้หลักการของการซ้อนทับ (Principle of superposition) กับระบบได้ [5] สำหรับการสั่นของระบบที่ปราศจากผลของแรงพลวัตจากภายนอกกระทำ (External dynamic forces) แต่ยังคงสามารถเกิดการสั่นได้ภายใต้ผลของแรงประจำตัว (Inherent forces) ที่มีในระบบ จึงเรียกรูปแบบการสั่นนี้ว่า การสั่นอิสระ (Free vibrations) และถ้าระบบไม่เกิดการสูญเสียพลังงานหรือไม่มีการกระจายพลังงานเกิดขึ้นจึงเรียกว่า การสั่นแบบไร้การหน่วง (Undamped vibrations)

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และสมการควบคุมการสั่นทั่วไปของระบบ SDOF

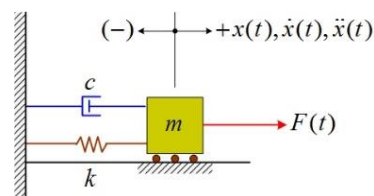
กระบวนการวิเคราะห์การสั่น (Vibration analysis procedure) ของระบบพลวัต (Dynamic system) เริ่มต้นจากการพิจารณา [5]

- (1) การสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์หรือแบบจำลองเชิงวิเคราะห์ (Mathematical or analytical modelling) ขึ้นอยู่

กับการพิจารณาตัดสินใจเลือกพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องและเหมาะสมในการอธิบายลักษณะของพฤติกรรมการณ์การสั่นหรือการเคลื่อนที่ของระบบ

- (2) การพิสูจน์สมการควบคุม (Derivation of governing equation) หรือเรียกว่า สมการการเคลื่อนที่ (Motion equation) เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา
 - (3) การหาผลเฉลยของสมการ (Solution of equation) ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อหาผลการตอบสนองต่อการสั่น โดยมีหลากหลายวิธีการขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของปัญหาที่พิจารณา
 - (4) การแปลความของผลลัพธ์ (Interpretation of results) โดยผลลัพธ์ที่ได้อาจแสดงอยู่ในรูปแบบประวัติเวลา (Time history) ของการกระจัด (Displacements) ความเร็ว (Velocities) หรือความเร่ง (Accelerations) ทั้งนี้ การแปลความหมายของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์
- ดังนั้น ผลการตอบสนองต่อการสั่นจึงเป็นฟังก์ชันที่มีการแปรผันตามเวลา (Time-dependent) และขึ้นอยู่กับเงื่อนไขแรกเริ่มที่กำหนด (Initial conditions) และผลการกระตุ้นจากภายนอก (External excitations)

ส่วนใหญ่แล้ว พบว่า สมการการเคลื่อนที่อยู่ในรูปแบบของชุดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equations) ในกรณีของระบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete or lumped system) ซึ่งมีดีกรีอิสระจำนวนจำกัด (Finite number of degrees of freedom) [1,2] หรือ ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์แยกส่วน (Partial differential equations) ในกรณีของระบบต่อเนื่อง (Continuous or distributed system) ที่มีดีกรีอิสระจำนวนอนันต์ค่า (Infinite degrees of freedom) [6], [7]

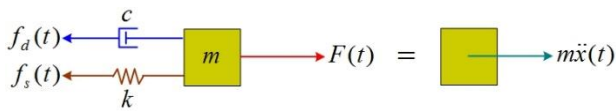


รูปที่ 1 แบบจำลองระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงภายใต้แรงพลวัต

อย่างไรก็ดี เพื่อเป็นการง่ายต่อความเข้าใจจึงเริ่มต้นจากการพิจารณาแบบจำลองของระบบการสั่นอย่างง่ายที่มี 1 ดีกรีอิสระ

(Single degree of freedom: SDOF system) [8-11] ที่อยู่ภายใต้ผลของแรงกระทำเชิงพลวัต $F(t)$ และเป็นฟังก์ชันของเวลา (t) โดยมีองค์ประกอบพื้นฐานของการสั่นดังต่อไปนี้ คือ มวล (m) สปริงยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic spring) ที่มีค่าคงที่ของสปริงเป็น k และตัวหน่วงที่มีค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง (Damping coefficient or constant: c) หรือเรียกว่า แบบจำลองของระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วง (Mass-spring-damper model system) ดังแสดงในรูปที่ 1

สมการการเคลื่อนที่ที่สามารถทำการพิสูจน์มาได้ด้วยการพิจารณาสมดุลพลวัต (Dynamic equilibrium) ของแผนภาพวัตถุเชิงเกร็งพลวัต (Dynamic free-body-diagram: DFBD) [1-3] ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แผนภาพวัตถุเชิงเกร็งพลวัตของแบบจำลองระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วง

จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 กำหนดให้ $x(t)$ $\dot{x}(t)$ และ $\ddot{x}(t)$ หมายถึง ปริมาณการกระจัด ความเร็วและความเร่ง ตามลำดับ โดย $(\dot{}) = d/dt$ สำหรับ $f_d(t)$ คือ แรงหน่วง (Damping force) และ $f_s(t)$ คือ แรงสปริง (Spring force) โดยมีสมการความสัมพันธ์เชิงเส้น (Linear relationships) ดังต่อไปนี้ คือ

$$f_d(t) = c\dot{x}(t) \quad (1)$$

$$f_s(t) = kx(t) \quad (2)$$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของแบบจำลองระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงในรูปแบบมาตรฐาน (Standard form) สามารถแสดงได้ดังนี้ [1], [4], [5]

$$\ddot{x}(t) + 2\omega\zeta\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = \omega^2f(t) \quad (3)$$

เมื่อ ω คือ ความถี่ธรรมชาติเชิงมุม (Circular natural frequency)

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (4)$$

และ ζ คือ ตัวประกอบหรืออัตราส่วนการหน่วง (Damping factor or damping ratio) ที่มีนิยาม คือ

$$\zeta = c/c_c = c/2\sqrt{mk} \quad (5)$$

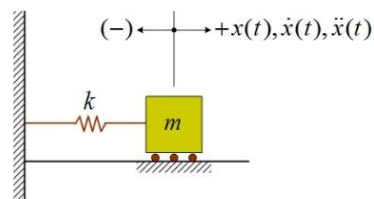
โดย c_c เรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์หรือค่าคงที่ของการหน่วงวิกฤติ (Critical damping coefficient or constant) สำหรับฟังก์ชันของแรงพลวัตจากภายนอก $f(t)$ ให้ไว้ดังนี้

$$f(t) = F(t)/k \quad (6)$$

สังเกตได้ว่าทั้ง ω และ ζ ตามที่ได้นิยามไว้ในสมการ (4) และสมการ (5) ตามลำดับ แสดงอยู่ในพจน์ของปริมาณองค์ประกอบพื้นฐานของการสั่น (m, c, k) ของระบบ ซึ่งสมการ (3) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 2 แบบไม่เอกพันธ์ (Nonhomogeneous 2nd-order ODE) [12] ที่มีตัวแปรอิสระ (ตัวแปรต้น) คือ เวลา (t) และตัวแปรตาม คือ $x(t)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ต้องการหา

3. การสั่นอิสระแบบไร้การหน่วง

เริ่มจากการพิจารณาการสั่นของระบบอย่างง่าย ซึ่งในที่นี้ คือ การสั่นอิสระแบบไร้การหน่วงของระบบมวล-สปริง (Undamped free vibration of mass-spring system) โดยกำหนดให้ $f(t) = 0$ และ $\zeta = 0$ ดังนั้น แบบจำลองในรูปที่ 1 จึงกลายมาเป็นแบบจำลองในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แบบจำลองการสั่นอิสระของระบบมวล-สปริง

สมการการเคลื่อนที่ของระบบดังแสดงไว้ในสมการ (3) จึงลดรูปมาสู่สมการต่อไปนี้

$$\ddot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0 \quad (7)$$

โดยนัยทางคณิตศาสตร์เรียกรูปแบบสมการ (7) ว่า สมการฮาร์โมนิก (Harmonic equation) และมีผลเฉลยที่สามารถแสดงในรูปแบบต่าง ๆ ได้ดังนี้ คือ [1] – [5], [12], [13]

$$\text{รูปแบบที่ 1: } x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (8)$$

ทั้งนี้ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่จำนวนเชิงซ้อน (Complex constants) ที่ได้จากการอินทิเกรตสมการ (7) ส่วนค่า $i = \sqrt{-1}$ เป็นจำนวนจินตภาพ (Imaginary number)

$$\text{รูปแบบที่ 2: } x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (9)$$

$$A_1 = C_1 + C_2 \quad (10)$$

$$A_2 = (C_1 - C_2)i \quad (11)$$

โดยที่ A_1 และ A_2 คือ ค่าคงที่จำนวนจริง (Real constants)

$$\text{รูปแบบที่ 3: } x(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (12)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (13)$$

$$\phi = \tan^{-1}(A_2/A_1) \quad (14)$$

ในที่นี้ A คือ ปริมาณหรือขนาดของการสั่น (Amplitude) และ ϕ คือ มุมเฟส (Phase angle)

$$\text{รูปแบบที่ 4: } x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (15)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}(A_1/A_2) \quad (16)$$

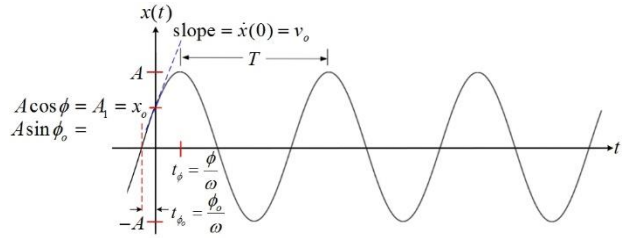
ค่าคงที่ต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ในสมการ (8) สมการ (9) สมการ (12) และสมการ (15) คือ (C_1, C_2) (A_1, A_2) (A, ϕ) และ (A, ϕ_0) ตามลำดับ ซึ่งสามารถหาค่าที่แน่นอนได้ด้วยการประยุกต์เงื่อนไขค่าเริ่มต้นที่ $t = 0$ โดยกำหนดให้ $x(0) = x_0$ และ $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$ เมื่อ $v(t) = \dot{x}(t)$ คือ ความเร็วของการเคลื่อนที่ ทั้งนี้ ผลเฉลย $x(t)$ ของสมการ (7) คือ ผลการตอบสนองของระบบ ณ เวลา (t) ใด ๆ ดังแสดงในรูปที่ 4 ที่ได้จากการเลือกใช้

รูปแบบของสมการ (12) และมีคุณสมบัติ (Property) ดังนี้ [1]

$$x(t + nT) = x(t); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

เมื่อ T เรียกว่า คาบการสั่นอิสระแบบไร้การหน่วง (Undamped free vibration period) และมีความสัมพันธ์กับความถี่ธรรมชาติของการสั่นอิสระ ดังนี้

$$T = 2\pi/\omega \quad (18)$$

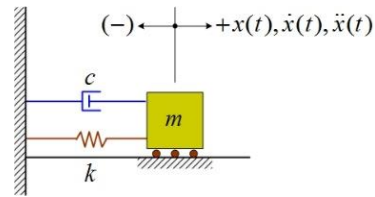


รูปที่ 4 ประวัติเวลาของการสั่นอิสระแบบฮาร์โมนิก

4. การสั่นอิสระแบบหน่วง

ลำดับถัดไป พิจารณาระบบการสั่นอิสระแบบหน่วง (Damped free vibration system) ดังรูปที่ 5 เมื่อกำหนดให้ $f(t) = 0$ ในสมการ (3) ซึ่งผลที่ได้ คือ สมการการเคลื่อนที่ดังต่อไปนี้

$$\ddot{x}(t) + 2\omega\zeta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (19)$$



รูปที่ 5 แบบจำลองการสั่นอิสระของระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วง

สำหรับผลเฉลยของสมการ (19) สามารถแสดงได้ในรูปแบบ [12], [13]

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega t} \quad (20)$$

จากตำราสากลเกี่ยวกับการวิเคราะห์การสั่นสรุปได้ว่า พฤติกรรมการเคลื่อนที่ (การตอบสนอง) ภายใต้การหน่วงสามารถจัดจำแนกออกได้เป็น 3 กรณี โดยให้พิจารณาพจน์ $(\zeta^2 - 1)$ ในสมการ (20) ดังนี้ คือ [1] – [7]

กรณีที่ 1: การเคลื่อนที่ภายใต้การหน่วงน้อย (Underdamped motions) เมื่อ $\zeta^2 - 1 < 0$

$$\zeta^2 < 1 \text{ หรือ } -1 < \zeta < 1 \quad (21)$$

เนื่องจากองค์ประกอบพื้นฐานของการสั่น (m, c, k) มีค่าเป็นบวกทุก ๆ ค่า และจากนิยาม ζ ในสมการ (5) ดังนั้น จึงเขียนสมการ (21) ได้ใหม่เป็น

$$0 < \zeta < 1 \text{ หรือ } 0 < c < c_c \quad (22)$$

กำหนดให้ ω_d คือ ความถี่ธรรมชาติแบบหน่วง (Damped natural frequency) และมีค่าน้อยกว่า ω เสมอ โดยมีนิยาม คือ

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = \omega i\sqrt{\zeta^2-1} \quad (23)$$

ทั้งนี้แล้ว ในทางปฏิบัติ (In practices) พบว่า $\zeta < 0.2$ ดังนั้นจึงสมมติให้ $\omega_d \approx \omega$ ในสมการ (23)

เมื่อทำการแทนที่สมการ (23) กลับลงสู่สมการ (20) ผลที่ได้ คือ

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega t} \quad (24)$$

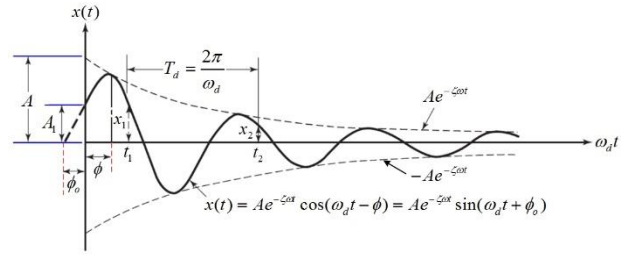
จากนั้น ให้พิจารณาเปรียบเทียบกับระหว่างสมการ (24) และสมการ (8) ร่วมกับการใช้สมการ (23) จึงสามารถเขียนผลเฉลย $x(t)$ ได้ใหม่ใน 4 รูปแบบ ดังนี้ [1] – [5], [12], [13]

รูปแบบที่ 1: $x(t) = e^{-\zeta\omega t} (C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}) \quad (25)$

รูปแบบที่ 2: $x(t) = e^{-\zeta\omega t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (26)$

รูปแบบที่ 3: $x(t) = Ae^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad (27)$

รูปแบบที่ 4: $x(t) = Ae^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \phi_o) \quad (28)$



รูปที่ 6 ลักษณะการตอบสนองของระบบภายใต้การหน่วงน้อย

รูปที่ 6 แสดงตัวอย่างผลการตอบสนอง $x(t)$ เมื่อมีการแปรเปลี่ยนค่าไปตามปริมาณ $\omega_d t$ โดยได้เลือกใช้สมการของ $x(t)$ ให้อยู่ในรูปแบบที่ 3 หรือ รูปแบบที่ 4

คาบการสั่นอิสระแบบหน่วง (Damped free vibration period) T_d มีนิยามดังนี้

$$T_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi/(\omega\sqrt{1-\zeta^2}) \quad (29)$$

และเวลา t_ϕ และ t_{ϕ_o} ที่สอดคล้องกับมุมเฟส ϕ และ ϕ_o ตามลำดับ คือ

$$t_\phi = \phi/\omega_d \quad (30)$$

$$t_{\phi_o} = \phi_o/\omega_d \quad (31)$$

กรณีที่ 2: การเคลื่อนที่ภายใต้การหน่วงวิกฤติ (Critically damped motions) เมื่อ $\zeta^2 - 1 = 0$

สำหรับในกรณีนี้ ค่า $\zeta = 1$ เท่านั้น โดยผลเฉลยที่แสดงไว้ในสมการ (20) นั้นไม่สามารถใช้ได้ ดังนั้นแล้ว จึงทำการเขียนผลเฉลย $x(t)$ ขึ้นมาใหม่ดังนี้ [12]

$$x(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\omega t} \quad (32)$$

เมื่อ B_1 และ B_2 คือ ค่าคงที่จำนวนจริงที่หาค่าได้จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

จากการพิจารณาสมการ (32) สังเกตได้ว่า การเคลื่อนที่มีปริมาณถดถอยในรูปแบบของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential functions) จนกระทั่งเป็นศูนย์ (หยุดนิ่ง) เมื่อเวลา (t) มีค่าเพิ่มมากขึ้นตามลำดับ ทั้งนี้เป็นผลมาจากฟังก์ชัน

$e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$ ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ในกรณีที่ 2 นี้ไม่เป็นการเคลื่อนที่แบบสั่น (Nonoscillation) หรือไม่เป็นการเคลื่อนที่ในลักษณะแบบคาบ (Nonperiodic motion)

กรณีที่ 3: การเคลื่อนที่ภายใต้การหน่วงมาก (Overdamped motions) เมื่อ $\zeta^2 - 1 > 0$

ในกรณีนี้ $\zeta > 1$ ซึ่งผลเฉลยของสมการ (19) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเช่นเดียวกับกับสมการ (20) ได้เป็น [1-5,12,13]

รูปแบบที่ 1:

$$x(t) = D_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega t} + D_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega t} \quad (33)$$

รูปแบบที่ 2:

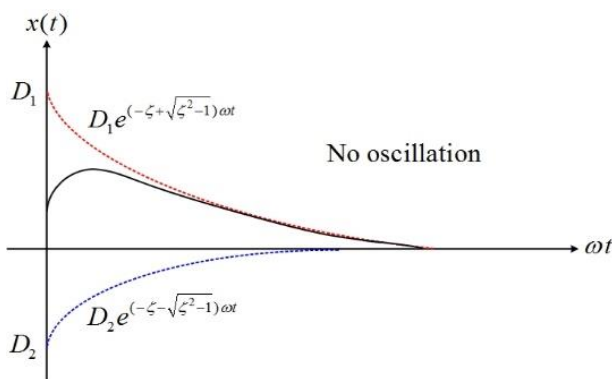
$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (E_1 \cosh \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega t + E_2 \sinh \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega t) \quad (34)$$

โดยที่

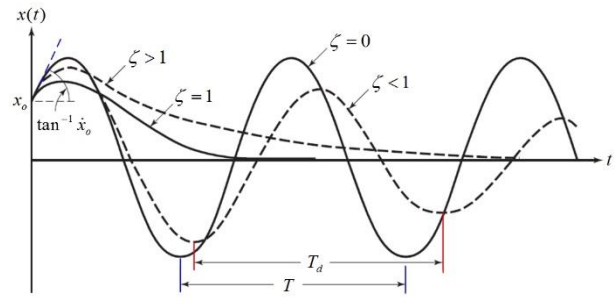
$$E_1 = D_1 + D_2 \quad (35)$$

$$E_2 = D_1 - D_2 \quad (36)$$

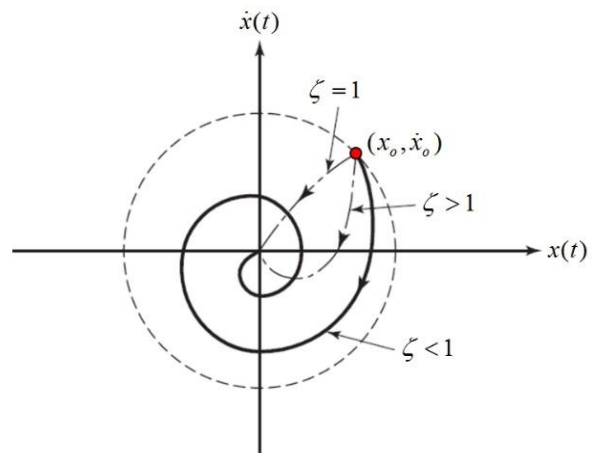
ในที่นี้ (D_1, D_2) และ (E_1, E_2) เป็นค่าคงที่จำนวนจริงซึ่งสามารถหาค่าได้จากการประยุกต์เงื่อนไขค่าเริ่มต้นของปัญหา เมื่อพิจารณาสมการ (33) พบว่า ไม่มีพฤติกรรมการตอบสนองของการเคลื่อนที่แบบสั่นหรือแบบคาบดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 7 รูปแบบการตอบสนองภายใต้การหน่วงมากเมื่อ $\zeta > 1$



รูปที่ 8 การเปรียบเทียบการตอบสนองอิสระแบบหน่วงเมื่อมีประเภทการหน่วงแตกต่างกัน



รูปที่ 9 ระนาบเฟส (ปริภูมิสถานะ) ของการตอบสนองแบบหน่วงเมื่อมีการหน่วงแตกต่างกัน

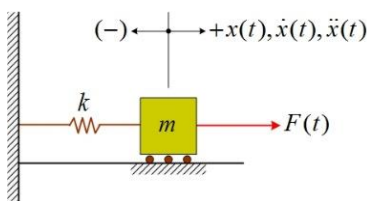
จากผลการวิเคราะห์การสั่นอิสระแบบไร้การหน่วง ($\zeta = 0$) และการสั่นอิสระแบบหน่วง ($0 < \zeta \leq 1$) ของระบบที่มี 1 ดีกรีอิสระดังได้กล่าวไว้ข้างต้น จึงสามารถสรุปได้ว่า ระบบมีการเคลื่อนที่แบบสั่นได้เฉพาะในกรณีของการสั่นอิสระแบบไร้การหน่วงและกรณีของการสั่นอิสระแบบหน่วงน้อย (Underdamped free vibration) ที่อยู่ภายใต้เงื่อนไข $0 < \zeta < 1$ เท่านั้น โดยรูปที่ 8 ได้แสดงการเปรียบเทียบลักษณะการเคลื่อนที่ (การสั่น) อิสระภายใต้การหน่วง (Damped free motions) ของทั้ง 3 กรณี หรือสามารถแสดงอยู่บนระนาบเฟส (Phase plane) หรือเรียกว่า ปริภูมิสถานะ (State space) [1] ดังรูปที่ 9

5. การสั่นแบบถูกบังคับที่ไร้การหน่วง

ลำดับถัดไป ทำการพิจารณาในกรณีของระบบที่มีการสั่นแบบถูกบังคับ (Forced vibration systems) โดยระบบที่กำลังสนใจศึกษา อาจอยู่ภายใต้ผลการกระตุ้นอันเนื่องมาจาก (1) กรณีการประยุกต์แรงพลวัต (Applied dynamic forces) หรือ (2) กรณีการกำหนดการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันแปรผันตามเวลา (Imposed time-dependent displacement)

การกระตุ้นจากภายนอกนั้นสามารถมีรูปแบบที่เป็นได้ทั้งฮาร์มอนิก (Harmonic) หรือไม่เป็นฮาร์มอนิก (Nonharmonic) โดยอาจมีลักษณะที่เป็นคาบ (Periodic) หรือไม่เป็นคาบ (Nonperiodic) ก็ได้ หรือสามารถมีรูปแบบสุ่ม (Random) ทั้งนี้แล้ว หากการกระตุ้นมีรูปแบบเป็นฮาร์มอนิก พบว่า ระบบมีการตอบสนองเป็นแบบฮาร์มอนิกด้วยเช่นกัน (Harmonic responses) สำหรับในกรณีของการกระตุ้นที่มีลักษณะไม่เป็นคาบ ช่วงระยะเวลา (Time duration) ของการกระตุ้นอาจมีระยะเวลาที่ยาวหรือสั้นก็ได้ (Long or short duration) ส่วนกรณีที่การกระตุ้นมีลักษณะไม่เป็นคาบและกระทำในแบบทันทีทันใดในช่วงระยะเวลาสั้นๆ (Suddenly applied nonperiodic excitations) ผลการตอบสนองของระบบที่ได้นั้น เรียกว่า การตอบสนองแบบชั่วคราวหรือชั่วขณะ (Transient responses) [1-3]

เริ่มจากการพิจารณาการสั่นแบบถูกบังคับไร้การหน่วง (Undamped forced vibration) ของแบบจำลองมวล-สปริงอย่างง่าย (Mass-spring model) ภายใต้ผลของแรงขับพลวัตแบบฮาร์มอนิก (Harmonic driving force) ดังแสดงในรูปที่ 10



รูปที่ 10 แบบจำลองระบบมวล-สปริงภายใต้แรงพลวัต $F(t)$

โดยที่แรงพลวัตแบบฮาร์มอนิก $F(t)$ สามารถเลือกแสดงให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันต่าง ๆ ได้ดังต่อไปนี้ คือ [1] – [5]

$$F(t) = F_o e^{i(\Omega t + \psi)} \quad (37)$$

$$F(t) = F_o \cos(\Omega t + \psi) \quad (38)$$

$$F(t) = F_o \sin(\Omega t + \psi) \quad (39)$$

ในที่นี้ F_o คือ ขนาด (Magnitude) หรือขนาดที่มากที่สุดของแรงพลวัต (Maximum amplitude of dynamic force) Ω คือ ความถี่ของแรงพลวัตกระทำ (Frequency of applied dynamic force) และนอกจากนี้เมื่อ $\Omega = \omega$ พบว่า ผลการตอบสนอง (การเคลื่อนที่) ของระบบจะมีค่ามากกว่าปรากฏการณ์การกำทอน (Resonance) และสุดท้าย ψ คือ มุมเฟสของแรงพลวัต (Phase angle of dynamic force) ที่ขึ้นกับค่าเริ่มต้น ณ เวลา $t = 0$ ซึ่งโดยส่วนใหญ่แล้วสามารถกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ($\psi = 0$)

สมการควบคุมการสั่นแบบถูกบังคับไร้การหน่วงสามารถหาได้จากการกำหนดให้ $\zeta = 0$ ลงในสมการ (3) และสมมติเลือกรูปแบบของแรง $F(t)$ เป็นไปตามสมการ (38) พร้อมทั้งกำหนดให้ $\psi = 0$ จึงได้

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_o \cos \Omega t \quad (40)$$

$$f_o = F_o / m \quad (41)$$

การหาผลเฉลยทั่วไป (General solution) หรือผลเฉลยรวมทั้งหมด (Total solution) ของสมการ (40) นั้นประกอบไปด้วยผลรวมระหว่าง (1) ผลเฉลยสมทบ (Complementary solution: x_h) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและ (2) ผลเฉลยเฉพาะ (Particular solution: x_p) ที่สอดคล้องกับรูปแบบของฟังก์ชันแรงพลวัต [12]

สำหรับผลเฉลยสมทบของสมการ (40) มีความสอดคล้องกับกรณีที่เป็นการสั่นอิสระแบบไร้การหน่วงจึงมีรูปแบบของผลเฉลยดังแสดงในสมการ (8) สมการ (9) สมการ (12) หรือสมการ (15)

เนื่องจากได้กำหนดให้แรงพลวัตมีรูปแบบฮาร์มอนิก ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะจึงมีรูปแบบฮาร์มอนิกด้วยเช่นกัน ทั้งนี้แล้ว จึงสามารถทำการสมมติให้ผลเฉลยมีรูปแบบฟังก์ชันในลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันของแรงพลวัตที่มีความถี่ Ω ได้ดังต่อไปนี้

$$x_p(t) = X \cos \Omega t \quad (42)$$

เมื่อ X เป็นค่าคงที่ที่บ่งบอกถึงขนาดของการตอบสนองต่อการสั่น

แบบถูกบังคับ (Amplitude of forced response)

ลำดับถัดไป ทำการแทนสมการ (42) ย้อนกลับลงสู่สมการ (40) โดยกำหนดให้ $x(t) = x_p(t)$ และทำการแก้หาค่า X ซึ่งเป็นขนาดการสั่นมากที่สุด (Maximum amplitude) ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$X = f_o / (\omega^2 - \Omega^2) \quad (43)$$

โดยเลือกใช้สมการ (9) สำหรับผลเฉลยสมทบเนื่องจากสะดวกในการประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นในภายหลังและให้แทนสมการ (43) กลับในสมการ (42) ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + [f_o / (\omega^2 - \Omega^2)] \cos \Omega t \quad (44)$$

เมื่อกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้นมีค่าดังต่อไปนี้

$$x(0) = x_o \text{ และ } \dot{x}(0) = v(0) = v_o \quad (45)$$

ภายหลังจากการประยุกต์สมการ (45) ร่วมกับการใช้สมการ (44) จึงแก้หาค่าคงที่ A_1 และ A_2 ได้ตามลำดับ คือ

$$A_1 = x_o - f_o / (\omega^2 - \Omega^2) \quad (46)$$

$$A_2 = v_o / \omega \quad (47)$$

เช่นนี้แล้ว สมการ (44) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$x(t) = [x_o - f_o / (\omega^2 - \Omega^2)] \cos \omega t + (v_o / \omega) \sin \omega t + [f_o / (\omega^2 - \Omega^2)] \cos \Omega t \quad (48)$$

สำหรับกรณีปัญหาแบบสถิตย์ (Static case) พบว่า สมการสมดุลเชิงสถิตย์ (Static equilibrium) สามารถทำการลดรูปมาได้ด้วยการพิจารณาสมการ (40) เมื่อกำหนดให้ $\ddot{x}(t) = 0$ ซึ่งมีความหมายว่าไม่มีความเร่งปรากฏในระบบและในที่นี้ x ไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา (t) และจากการใช้สมการ (4) ร่วมกับสมการ (41) เช่นนี้แล้ว โดยให้ $x = X_{st} = \delta_{st}$ คือ การกระจัดเชิงสถิตย์ (Static displacement) จึงได้ [1]

$$X_{st} = \delta_{st} = F_o / k \quad (49)$$

จากนั้น ให้พิจารณาผลหารหรืออัตราส่วนระหว่างสมการ (43) และสมการ (49) พบว่า

$$\Gamma_o = X / \delta_{st} = 1 / (1 - r^2) \quad (50)$$

และกำหนดให้

$$r = \Omega / \omega \quad (51)$$

โดยที่ Γ_o เรียกว่า ตัวประกอบขยาย (Magnification or amplification factor) ของการสั่นแบบถูกบังคับที่ไร้การหน่วง (Undamped forced vibration) และมีการแปรผันไปตามค่า r ดังรูปที่ 11 ซึ่ง r เรียกว่า ค่าอัตราส่วนความถี่ (Frequency ratio)

สำหรับการตอบสนองต่อการสั่นแบบถูกบังคับไร้การหน่วง สามารถทำการพิจารณาและจัดจำแนกออกได้เป็น 3 กรณี ตามค่า r ได้ดังนี้ [1-5]

กรณีที่ 1: เมื่อ $0 < r < 1$ ($0 < \Omega < \omega$)

เมื่อตัวหาร (denominator) ของสมการ (50) มีค่าเป็นบวก ดังนั้นแล้ว สมการ (42) ยังคงมีรูปแบบสมการเหมือนเดิมและมีการตอบสนองร่วมเฟส (in-phase) กับแรงพลวัต $F(t) = F_o \cos \Omega t$

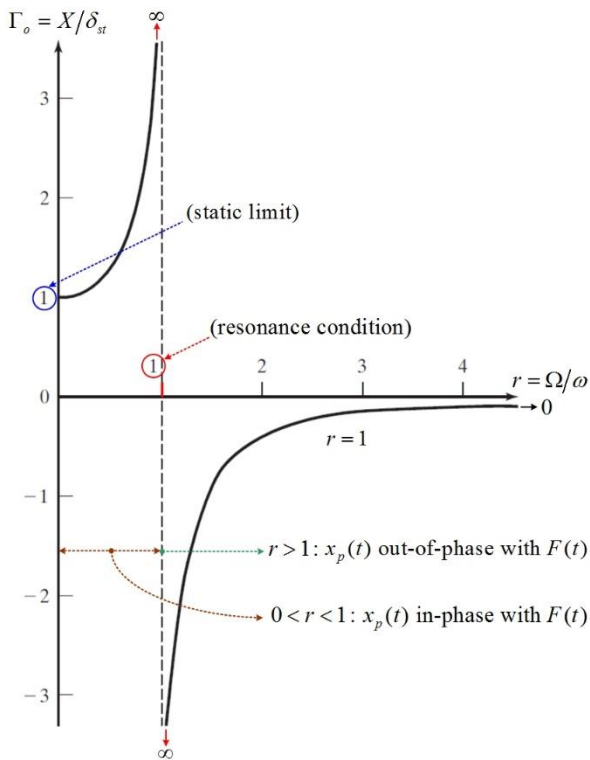
กรณีที่ 2: เมื่อ $r > 1$ ($\Omega > \omega$)

ในกรณีนี้ พบว่า ตัวหารของสมการ (50) มีค่าเป็นลบ จึงเขียนสมการ (42) ใหม่ได้เป็น

$$x_p(t) = -X \cos \Omega t \quad (52)$$

และนิยามขนาดการสั่น X ในสมการ (50) ใหม่ให้มีค่าเป็นบวก ดังนี้

ด้วยการพิจารณาสมการ (52) และแรงพลวัต $F(t) = F_o \cos \Omega t$ พบว่า มีเครื่องหมายตรงกันข้าม ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า การตอบสนอง $x_p(t)$ มีลักษณะนอกเฟสกับแรงพลวัต โดยมีมุมเฟสแตกต่างกันระหว่าง $x_p(t)$ และ $F(t)$ เท่ากับ 180° (180° out-of-phase) และเมื่อพิจารณาให้ $r \rightarrow \infty$ หมายถึง ความถี่ Ω ในสมการ (51) นั้นมีค่ามากๆ ส่งผลทำให้การตอบสนอง X ในสมการ (53) มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ($X \rightarrow 0$)

รูปที่ 11 ผลการตอบสนองของ Γ_o ที่แปรผันกับ r

$$X = \delta_{st} / (r^2 - 1) \quad (53)$$

กรณีที่ 3: เมื่อ $r = 1$ ($\Omega = \omega$)

สำหรับกรณีนี้ เมื่อ $\Omega = \omega$ จึงทำให้เกิดการกำทอน (Resonance) และส่งผลให้การตอบสนอง X ในสมการ (50) หรือสมการ (53) มีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ หากต้องการศึกษาพฤติกรรมของการตอบสนองเมื่อ $r = 1$ จึงเขียนสมการ (48) ขึ้นใหม่โดยใช้สมการ (42) และสมการ (50) จึงได้

$$x(t) = x_o \cos \omega t + (v_o / \omega) \sin \omega t + \delta_{st} [(\cos \Omega t - \cos \omega t) / (1 - r^2)] \quad (54)$$

หลังจากนั้น ทำการหาลิมิตสำหรับพจน์สุดท้ายทางขวามือในสมการ (54) โดยกำหนดให้ $r \rightarrow 1$ พบว่า [13]

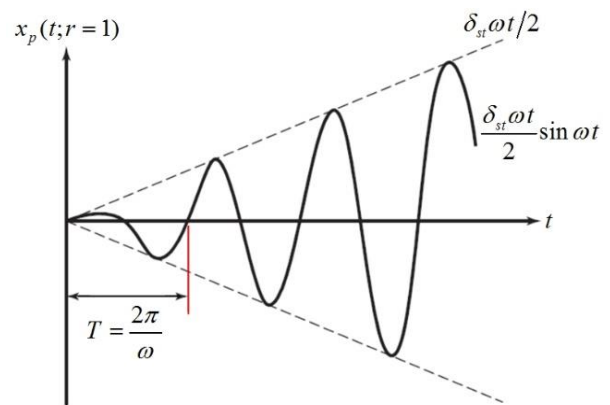
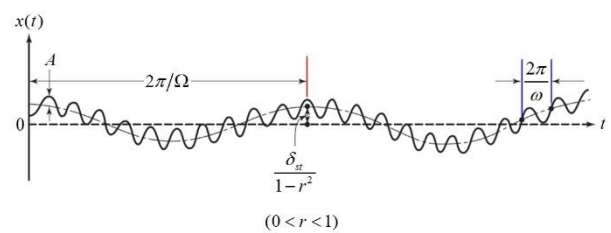
$$\lim_{r \rightarrow 1} (\cos \Omega t - \cos \omega t) / (1 - r^2) = (\omega t / 2) \sin \omega t \quad (55)$$

เมื่อแทนสมการ (55) กลับลงสู่สมการ (54) สำหรับการ

ตอบสนองในกรณีที่มีการกำทอนเกิดขึ้น ($\Omega = \omega$) หรือ $r = 1$ ดังนั้นแล้ว

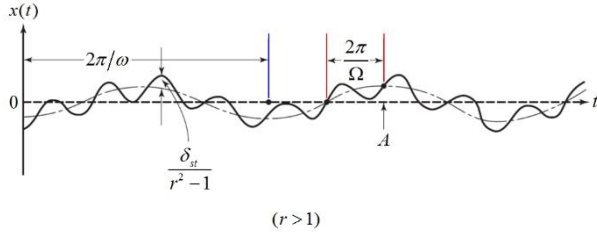
$$x(t; r = 1) = x_o \cos \omega t + (v_o / \omega) \sin \omega t + \delta_{st} (\omega t / 2) \sin \omega t \quad (56)$$

ในที่นี้ สังเกตได้ว่า พจน์สุดท้ายทางขวามือของสมการ (56) คือ ผลเฉลยเฉพาะ $x_p(t; r = 1)$ ซึ่งมีแนวโน้มของขนาดการสั่น (Amplitude) ที่เพิ่มขึ้นแบบไม่มีค่าขอบเขตจำกัด (Unbounded) เมื่อเวลามีค่าเพิ่มมากขึ้น ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เมื่อ $\Omega = \omega$ ทำให้การสั่นของระบบมีขนาดโต (Large amplitude) และมีขนาดโตเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้นดังแสดงในรูปที่ 12

รูปที่ 12 การตอบสนองแบบฮาร์มอนิกของ $x_p(t; r = 1)$ รูปที่ 13 การตอบสนองทั่วไปของ $x(t)$ เมื่อ $0 < r < 1$

สำหรับการหาผลการตอบสนองทั่วไป (General responses) หรือเรียกว่า การตอบสนองโดยรวมหรือทั้งหมด (Total responses) ซึ่งก็คือ $x(t)$ สามารถทำได้โดยการเลือกใช้รูปแบบของ $x_h(t)$ ตามสมการ (12) เช่นนี้แล้ว จึงสามารถแสดงให้เห็นความสัมพันธ์

ระหว่าง $x(t)$ และเวลา t ได้ดังในรูปที่ 13 กรณีที่ $0 < r < 1$ และรูปที่ 14 กรณีที่ $r > 1$



รูปที่ 14 การตอบสนองทั่วไปของ $x(t)$ เมื่อ $r > 1$

นอกจากนี้ ยังมีอีกหนึ่งปรากฏการณ์ที่น่าสนใจในการวิเคราะห์พฤติกรรมการณ์การสั่น คือ ปรากฏการณ์บีตติ่ง (Beating phenomenon) [1-3] ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\Omega \neq \omega$ แต่พิจารณาให้ $\Omega \rightarrow \omega$ ส่งผลให้ขนาดของการสั่นมีค่าเพิ่มขึ้น (Build up) และลดลง (Die down) อย่างมีแบบแผนที่แน่นอน (Regular pattern) โดยสามารถอธิบายปรากฏการณ์บีตติ่งนี้ได้ด้วยการพิจารณาสมการ (48) และเพื่อให้เกิดความสะดวกในการวิเคราะห์และอธิบายพฤติกรรมการณ์การตอบสนองจึงกำหนดให้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ($x_0 = v_0 = 0$) ผลที่ได้ คือ

$$x(t) = [f_o / (\omega^2 - \Omega^2)] (\cos \Omega t - \cos \omega t) \quad (57)$$

และทำการจัดรูปสมการใหม่ให้เป็น

$$x(t) = [2f_o / (\omega^2 - \Omega^2)] [\sin(\omega + \Omega)t/2] \times [\sin(\omega - \Omega)t/2] \quad (58)$$

หลังจากนั้น กำหนดให้ Ω มีค่าที่แตกต่างเพียงเล็กน้อยไปจาก ω เป็นปริมาณ 2ε เมื่อ ε คือ ปริมาณน้อย ๆ ที่มีค่าเป็นบวก (small positive quantity) พบว่า

$$\omega - \Omega = 2\varepsilon \quad (59)$$

$$\omega + \Omega \approx 2\Omega \quad (60)$$

เมื่อทำการคูณกันระหว่างสมการ (59) และสมการ (60) ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$\omega^2 - \Omega^2 = 4\varepsilon\Omega \quad (61)$$

และให้ทำการแทนสมการ (59) ถึงสมการ (61) กลับลงไปในสมการ (58) จึงนำไปสู่สมการ

$$x(t; r \rightarrow 1) = [(f_o / 2\varepsilon\Omega) \sin \varepsilon t] \sin \Omega t \quad (62)$$

เมื่อกำหนดให้ $\varepsilon \ll 1$ (very small ε) คือ ε มีค่าน้อยกว่า 1 มาก ๆ จึงทำให้ค่าของฟังก์ชัน $\sin \varepsilon t$ นั้นมีการแปรเปลี่ยนค่าเป็นไปอย่างช้า ๆ ตามค่าของ t และส่งผลทำให้คาบการสั่นมีค่ามาก โดยที่

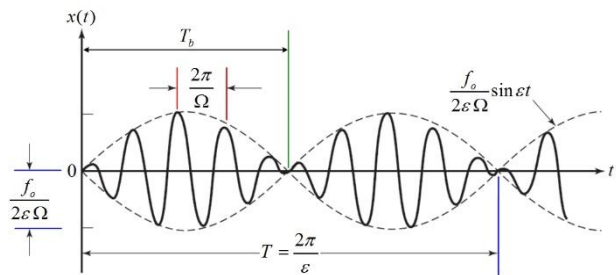
$$T = 2\pi/\varepsilon \quad (63)$$

และเมื่อย้อนกลับไปพิจารณาสมการ (62) โดยกำหนดให้เป็นตัวแทนของการสั่นเมื่อมีคาบของการสั่นเป็น $T = 2\pi/\Omega$ และมีขนาดการสั่นที่มีการแปรเปลี่ยนค่าแทนด้วย $X^*(t)$ ซึ่งมีสมการเป็น

$$X^*(t) = (f_o / 2\varepsilon\Omega) \sin \varepsilon t \quad (64)$$

โดยรูปที่ 15 แสดงถึงผลการตอบสนองของปรากฏการณ์บีตติ่งเมื่อกำหนดให้ $r \rightarrow 1$ ที่สอดคล้องตามสมการ (62)

สำหรับค่านิยามคาบของการบีตติ่ง (Beating period: T_b) สามารถอธิบายได้ดังนี้ คือ ระยะเวลาระหว่างจุด 2 จุด ที่มีขนาดการสั่นมากที่สุด (Maximum amplitude) ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการ



รูปที่ 15 การตอบสนองของปรากฏการณ์บีตติ่งเมื่อ $r \rightarrow 1$

$$T_b = 2\pi/2\varepsilon = 2\pi/(\omega - \Omega) \quad (65)$$

และมีความถี่บีต (Beat frequency: ω_b) เป็น

$$\omega_b = 2\varepsilon = \omega - \Omega \quad (66)$$

ดังนั้น จึงสามารถอธิบายปรากฏการณ์บีตได้ว่าเป็นปรากฏการณ์ที่มีพฤติกรรมของการสั่นอย่างรวดเร็ว (rapid oscillation) และมีขนาดของการสั่นที่ไม่คงที่ โดยที่ขนาดการสั่นมีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างช้า ๆ อย่างไรก็ตาม สมการ (62) ไม่เป็นจริงก็ต่อเมื่อ $\Omega = \omega$

6. การสั่นแบบถูกบังคับที่มีการหน่วง

กำหนดให้พิจารณาแบบจำลองทั่วไปของมวล-สปริง-ตัวหน่วงภายใต้แรงพลวัตสำหรับระบบที่มี 1 ดีกรีอิสระ ดังแสดงในรูปที่ 1 โดยที่ สมการการเคลื่อนที่ของระบบนี้ คือ สมการ (3) และเลือกใช้รูปแบบของแรงพลวัตตามสมการ (38) อีกครั้ง ทั้งนี้ สมมติให้มุมเฟส $\psi = 0$ จึงได้ [1], [4], [5]

$$\ddot{x}(t) + 2\omega\zeta\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = f_o \cos \Omega t \quad (67)$$

การหาผลเฉลยเฉพาะ (x_p) ในสมการ (67) สำหรับกรณีการสั่นแบบถูกบังคับที่มีการหน่วงภายใต้ผลของแรงพลวัตสามารถทำได้ในทำนองเดียวกับกรณีการสั่นแบบถูกบังคับไร้การหน่วงดังในสมการ (40) โดยสมมติ $x_p(t)$ ให้มีความถี่เดียวกับแรงพลวัตแต่มีความแตกต่างกันอยู่ที่มุมเฟส ϕ_s ทั้งนี้เนื่องมาจากผลกระทบของแรงหน่วง (Damping force) ที่มีต่อระบบเป็นสำคัญ ดังนั้นแล้ว ผลเฉลยเฉพาะ (x_p) ในสมการ (67) สามารถเขียนให้มีรูปแบบได้ดังต่อไปนี้ คือ [1] – [5], [12], [13]

$$\text{รูปแบบที่ 1: } x_p(t) = X \cos(\Omega t - \phi_s) \quad (68)$$

เมื่อ X และ ϕ_s เป็นค่าคงที่และสามารถหาได้จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$\text{รูปแบบที่ 2: } x_p(t) = A_s \cos \Omega t + B_s \sin \Omega t \quad (69)$$

$$A_s = X \cos \phi_s \quad (70)$$

$$B_s = X \sin \phi_s \quad (71)$$

ในที่นี้ A_s และ B_s มีความสอดคล้องตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้ คือ

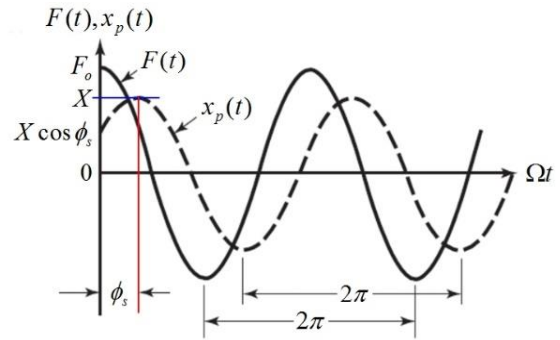
$$X = \sqrt{A_s^2 + B_s^2} \quad (72)$$

$$\phi_s = \tan^{-1}(B_s/A_s) \quad (73)$$

$$\text{รูปแบบที่ 3: } x_p(t) = X \sin(\Omega t - \phi_s) \quad (74)$$

$$\text{รูปแบบที่ 4: } x_p(t) = X e^{i(\Omega t - \phi_s)} \quad (75)$$

รูปที่ 16 แสดงการแปรเปลี่ยนของแรงพลวัตตามสมการ (38) และการตอบสนอง $x_p(t)$ จากสมการ (68) เมื่อเวลา t มีค่าเพิ่มขึ้นตามลำดับ



รูปที่ 16 การแปรเปลี่ยนของแรงพลวัต $F(t)$ และการตอบสนอง $x_p(t)$ ตามเวลา

หากทำการสมมติให้รูปแบบของ $x_p(t)$ เป็นไปตามสมการ (69) และเมื่อแทนลงในสมการ (67) จึงนำไปสู่สมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &(-\Omega^2 A_s + 2\omega\zeta\Omega B_s + \omega^2 A_s - f_o) \cos \Omega t \\ &+ (-\Omega^2 B_s - 2\omega\zeta\Omega A_s + \omega^2 B_s) \sin \Omega t = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

สังเกตได้ว่าสมการ (76) เป็นจริงในทุกๆ ค่าของ t ก็ต่อเมื่อพจน์สัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน $\cos \Omega t$ และ $\sin \Omega t$ จำเป็นต้องมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด จากนั้น ให้ทำการแก้หาค่า A_s และ B_s โดยผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$A_s = (\omega^2 - \Omega^2) f_o / [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega\zeta\Omega)^2] \quad (77)$$

$$B_s = 2\omega\zeta\Omega f_o / [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega\zeta\Omega)^2] \quad (78)$$

เมื่อทำการแทนสมการ (77) และสมการ (78) กลับลงสู่สมการ (72) และสมการ (73) จึงได้

$$X = f_o / \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega\zeta\Omega)^2} \quad (79)$$

$$\phi_s = \tan^{-1}[2\omega\zeta\Omega/(\omega^2 - \Omega^2)] \quad (80)$$

โดยการใช้สมการ (79) และสมการ (80) ลงในสมการ (68) พบว่า

$$x_p(t) = \left[f_o / \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega\zeta\Omega)^2} \right] \times \cos\{\Omega t - \tan^{-1}[2\omega\zeta\Omega/(\omega^2 - \Omega^2)]\} \quad (81)$$

ในลำดับถัดไป ให้ทำการหารทั้งตัวเศษ (Numerator) และตัวส่วน (Denominator) ของสมการ (79) และสมการ (80) ด้วย k และภายหลังการจัดรูปสมการจึงได้ตัวประกอบขยาย Γ และมุมเฟส ϕ_s ในพจน์ของ r และ ζ สำหรับกรณีการสั่นแบบถูกบังคับที่มีการหน่วง (Damped forced vibration) ดังนี้

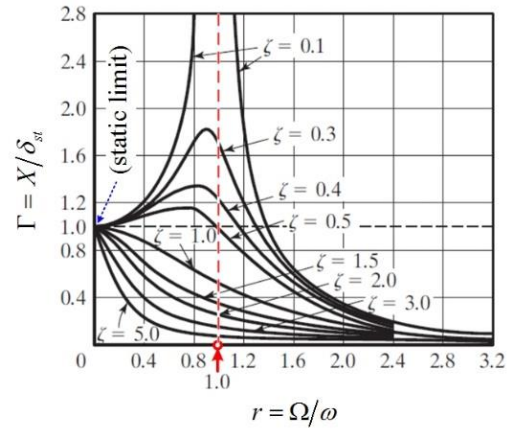
$$\Gamma = X/\delta_{st} = 1/\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \quad (82)$$

$$\phi_s = \tan^{-1}[2\zeta r/(1-r^2)] \quad (83)$$

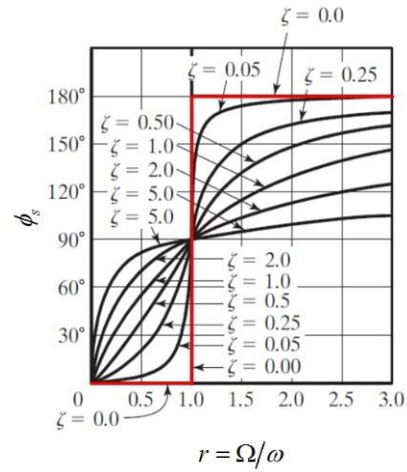
รูปที่ 17 และรูปที่ 18 แสดงความสัมพันธ์ของตัวประกอบขยาย Γ และมุมเฟส ϕ_s ที่เปลี่ยนแปลงตามค่าอัตราส่วนความถี่ r ในแต่ละค่าคงที่ของตัวประกอบ (อัตราส่วน) การหน่วง ζ ที่แตกต่างกัน [1]

เนื่องจากให้ความสนใจกับการเคลื่อนที่แบบสั่นที่มีการหน่วงซึ่งสามารถเกิดขึ้นได้เฉพาะในกรณีที่เป็นการสั่นแบบมีผลการหน่วงน้อยเท่านั้นภายใต้เงื่อนไข $0 < \zeta < 1$ โดยผลเฉลยทั่วไป $x(t)$ นั้นสามารถหาได้จากผลรวมของผลเฉลยสมทบ $x_h(t)$ ซึ่งในที่นี้เลือกใช้ตามสมการ (27) และผลเฉลยเฉพาะ $x_p(t)$ ตามสมการ (68) ผลลัพธ์ คือ

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_d t - \phi) + X \cos(\Omega t - \phi_s) \quad (84)$$



รูปที่ 17 การแปรเปลี่ยนระหว่างตัวประกอบขยาย Γ และอัตราส่วนความถี่ r



รูปที่ 18 การแปรเปลี่ยนระหว่างมุมเฟส ϕ_s และอัตราส่วนความถี่ r

โดยที่ X ได้ให้ไว้ในสมการ (79) ส่วน ϕ_s ให้ไว้ในสมการ (80) หรือสมการ (83) สำหรับค่าคงที่ A และ ϕ สามารถหาได้จากการประยุกต์เงื่อนไขค่าเริ่มต้นตามสมการ (45)

จากการสังเกตสมการ (84) พบว่า พจน์แรกทางขวามือของสมการซึ่งเป็นพจน์ของ $x_h(t)$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อเวลา t มีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ ($x_h \rightarrow 0$ as large t) ทั้งนี้เป็นผลเนื่องมาจากฟังก์ชัน $e^{-\zeta\omega t}$ ดังนั้น ส่งผลทำให้ $x \rightarrow x_p$ เมื่อ t มีค่ามาก ๆ และเรียก $x_h(t)$ ว่าเป็นการตอบสนองแบบชั่วคราวหรือชั่วขณะ ส่วน $x_p(t)$ เรียกว่า การตอบสนองแบบสภาวะคงตัวหรือคงที่ (Steady-state responses) [1] – [5]

โดยส่วนใหญ่ของการวิเคราะห์การสั่นแบบถูกบังคับที่มีการหน่วง มักจะทิ้งพจน์ของการตอบสนองแบบชั่วคราว [1] และให้ความสนใจกับพจน์ของการตอบสนองแบบสภาวะคงตัวบนพื้นฐานของการพิจารณาค่า ζ ที่แปรเปลี่ยนไป (ζ - varied) ถึงอย่างไรก็ตาม เมื่อค่า ζ มีค่าเพิ่มมากขึ้น พบว่า พจน์ของฟังก์ชัน $e^{-\zeta\omega t}$ เป็นสาเหตุหลักที่ทำให้ผลการตอบสนองแบบชั่วคราวสิ้นสุดลงอย่างรวดเร็ว (Quickly died out) และในทางกลับกัน เมื่อค่า ζ มีค่าน้อยๆ (Lightly damped factor) ส่งผลทำให้การตอบสนองแบบชั่วคราวนั้นมีนัยสำคัญมากขึ้นในช่วงระยะเวลาที่ยาวนานพอสมควรจึงไม่สามารถละทิ้งไปได้

7. บทวิเคราะห์และอภิปราย

จากผลการศึกษาเชิงวิเคราะห์ทางทฤษฎีสำหรับแบบจำลองของระบบที่มี 1 ดีกรีอิสระ (SDOF) ภายใต้เงื่อนไขการสั่นอิสระและแบบถูกบังคับทั้งที่มีและไม่มี การหน่วงด้วยการพิสูจน์ทฤษฎีบทและผลเฉลยทางคณิตศาสตร์สามารถนำไปสู่บทวิเคราะห์และอภิปรายผลลัพธ์เชิงทฤษฎีโดยทำการพิจารณาสมการ (82) และสมการ (83) ที่สอดคล้องกับรูปที่ 17 และรูปที่ 18 ตามลำดับ ซึ่งครอบคลุมพฤติกรรมการณ์ต่าง ๆ ได้ดังต่อไปนี้

คุณลักษณะบางประการที่พบได้จากสมการ (82) และรูปที่ 17 ในเชิงปริมาณของการสั่นแสดงอยู่ในพจน์ของตัวประกอบขยาย Γ คือ

- (1) เมื่อไม่มีการหน่วงในระบบ ($\zeta = 0$) พบว่า สมการ (82) ลดรูปไปสู่สมการ (50) ดังนั้นคือ $\Gamma = \Gamma_0$ เมื่อ $\zeta = 0$ และ $\Gamma_0 \rightarrow \pm\infty$ เมื่อ $r \rightarrow 1$ ดังแสดงในรูปที่ 11
- (2) ในแต่ละค่าของ ζ เมื่อ $\zeta > 0$ พบว่า Γ มีค่าลดลงในแต่ละค่าของ r เมื่อ ζ มีค่าเพิ่มขึ้น
- (3) กำหนดให้ r มีค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง พบว่า การเพิ่มขึ้นของ ζ ส่งผลทำให้ค่า Γ มีค่าลดลง
- (4) เมื่อ $r \rightarrow 0$ พบว่า การตอบสนองแบบพลวัตเปลี่ยนมาเป็นการตอบสนองแบบสถิตย์และเรียกสภาวะนี้ว่า สภาวะกึ่งสถิตย์ (Quasi-static) สำหรับกรณีที่ Ω มีค่าน้อยเพียงพอ (Low enough)
- (5) เมื่อ $r = 0$ ทำให้ $\Gamma = 1$ และเรียกสภาวะนี้ว่า ชิดจำกัดสถิตย์ (Static limit) ซึ่งเป็นการตอบสนองแบบสถิตย์ (Static responses)

- (6) เมื่อ $r = 1$ ให้ค่า $\Gamma = 1/(2\zeta)$ โดยได้จากการแทน $r = 1$ ลงในสมการ (82)
- (7) เมื่อ $r \rightarrow \infty$ ส่งผลให้ $\Gamma \rightarrow 0$ ในทุกๆ ค่าของ ζ โดยที่แรงพลวัต $F(t)$ ไม่ส่งผลกระทบต่อระบบ
- (8) สำหรับระบบที่มีการหน่วง (Damped systems) กล่าวได้ว่าการกำทอนเกิดขึ้นเมื่อ $r = 1$ หรือ $\Omega = \omega$ แต่ไม่ใช่เงื่อนไขที่ทำให้ค่า Γ ให้ค่ามากที่สุด (Peak or maximum value) จากสมการ (82)
- (9) สำหรับค่าของ r ที่ทำให้ Γ มีค่ามากที่สุด ($\Gamma_{\max}$) ในแต่ละค่าของ ζ ที่แตกต่างกันสามารถหาได้จากเงื่อนไขต่อไปนี้ $\partial\Gamma/\partial r = 0$ ดังนั้น เมื่อทำการแทนสมการ (82) ลงในเงื่อนไขดังกล่าว จึงได้ r_{pk} ที่ทำให้ $\Gamma = \Gamma_{\max}$ โดยมีค่า $r_{pk} = \sqrt{1-2\zeta^2}$ และเนื่องจากค่า r_{pk} ต้องไม่มีค่าเป็นลบ (Non-negative values) จากนิยามของสมการ (51) ดังนั้น $1-2\zeta^2 \geq 0$ หรือ $\zeta \leq 1/\sqrt{2}$
- (10) ในที่นี้ r_{pk} มีนิยามเป็น ค่าของความถี่จากการกระตุ้นจากภายนอก (Ω) ที่ทำให้เกิด $\Gamma_{\max}$ โดยที่

$$r_{pk} = \sqrt{1-2\zeta^2} \leq 1 \text{ เมื่อ } 0 \leq \zeta \leq 1/\sqrt{2} \quad (85)$$

$$\Omega_{pk} = \omega\sqrt{1-2\zeta^2} \leq \omega \text{ เมื่อ } 0 \leq \zeta \leq 1/\sqrt{2} \quad (86)$$

- (11) เมื่อทำการพิจารณาสมการ (86) สามารถบ่งชี้ได้ว่า Ω_{pk} มีค่าน้อยกว่าค่าความถี่ธรรมชาติไร้การหน่วง (ω) และค่าความถี่ธรรมชาติแบบหน่วง ($\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$) สำหรับกรณีระบบที่มีการหน่วงน้อยเท่านั้น
- (12) สมการ (85) และสมการ (86) เป็นจริงได้ในกรณีของระบบที่มีการสั่นแบบหน่วงน้อยเท่านั้น ($0 < \zeta < 1$)
- (13) ค่า $\Gamma_{\max}$ สามารถหาได้จากการแทนสมการ (85) ลงในสมการ (82) ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$\Gamma_{\max} = 1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) \quad (87)$$

- (14) ถ้า $\zeta = 1/\sqrt{2}$ แล้วทำให้เกิดเงื่อนไข $\partial\Gamma/\partial r = 0$ เกิดขึ้น โดยสมการ (85) ให้ค่า $r_{pk} = 0$
- (15) ถ้า $\zeta > 1/\sqrt{2}$ แล้ว Γ มีค่าลดลงอย่างต่อเนื่องเมื่อ r

มีค่าเพิ่มมากขึ้น นอกจากนี้ ยังพบว่า ไม่มีค่า r_{pk} ที่ทำให้เกิด $\Gamma_{\max}$

สำหรับกรณีของมุมเฟส ϕ_s ให้ทำการพิจารณาสมการ (83) และรูปที่ 18 ซึ่งพบว่า มีคุณลักษณะบางประการที่สังเกตได้ดังต่อไปนี้

(1) เมื่อไม่มีการหน่วง ($\zeta = 0$) หรือเรียกว่า ระบบไร้การหน่วงพบว่า

$\phi_s = 0^\circ$ เมื่อ $0 < r < 1$ จึงอุปมาได้ว่า $x_p(t)$ และ $F(t)$ อยู่ร่วมเฟสกัน (In-phase) และ

$\phi_s = 180^\circ$ เมื่อ $r > 1$ นั้น อุปมาได้ว่า $x_p(t)$ และ $F(t)$ อยู่นอกเฟส (Out-of-phase)

(2) เมื่อ $\zeta > 0$ และ $0 < r < 1$ แล้ว $0^\circ < \phi_s < 90^\circ$ อุปมาได้ว่า $x_p(t)$ เหลื่อมตามหลัง $F(t)$

(3) เมื่อ $\zeta > 0$ และ $r > 1$ แล้ว $90^\circ < \phi_s < 180^\circ$ อุปมาได้ว่า $x_p(t)$ เหลื่อนนำหน้า $F(t)$

(4) เมื่อ $\zeta > 0$ และ $r = 1$ แล้ว $\phi_s = 90^\circ$ อุปมาได้ว่า $x_p(t)$ และ $F(t)$ มีมุมเฟสต่างกัน 90°

(5) เมื่อ $\zeta > 0$ และ r มีค่ามาก แล้ว $\phi_s \rightarrow 180^\circ$ อุปมาได้ว่า $x_p(t)$ และ $F(t)$ อยู่นอกเฟส

8. บทสรุป

ในทางปฏิบัติ พบว่า การสั่นสะเทือนที่มีต่อระบบ อาทิเช่น โครงสร้างอาคาร เครื่องจักรกล หรือยานพาหนะได้ส่งผลกระทบต่อสมรรถภาพและประสิทธิภาพในการใช้งานตามวัตถุประสงค์แรกเริ่มของระบบ สำหรับการศึกษาพฤติกรรมการณ์การสั่นของระบบต่อเนื่อง (Continuous system) ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ (Analytical methods) นั้นมีความยุ่งยากและซับซ้อนเนื่องจากมีปัจจัยหลายสาเหตุ เช่น ลักษณะรูปทรงทางเรขาคณิตเชิงกายภาพ (Physical configurations) คุณสมบัติเชิงกลประจำตัวของวัสดุที่ใช้ (Inherent mechanical properties) หรือผลการกระตุ้นจากภายนอกที่กระทำต่อระบบ (External excitations) การจำลองด้วยระบบย่อย (Discrete system) ที่มีหลายจำนวนดีกรีอิสระ (Multidegree of freedom: MDOF) เพื่อเป็นตัวแทนของระบบต่อเนื่องที่มีดีกรีอิสระจำนวนอนันต์ค่า (Infinite DOFs) จึงมีความเหมาะสมและสะดวกในการวิเคราะห์ด้วยวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical methods) ผ่านกระบวนการแก้ปัญหาของระบบจำนวน n สมการ สอดคล้องตาม

จำนวนดีกรีอิสระที่ได้กำหนดขึ้น [14-18] ซึ่งมีพื้นฐานแนวคิดมาจากแบบจำลองของระบบที่มี 1 ดีกรีอิสระ (SDOF) ดังนั้น วัตถุประสงค์ของบทความนี้จึงนำเสนอการศึกษาและการวิเคราะห์ที่ครอบคลุม (Comprehensive study and analysis) ต่อพฤติกรรมการณ์การสั่นอิสระและแบบถูกบังคับทั้งที่มีและไม่มีภาระหน่วงสำหรับระบบ SDOF เพื่อเป็นแนวทางพื้นฐานในการจำลองและวิเคราะห์ปัญหาในระบบที่มีความซับซ้อนได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง

เอกสารอ้างอิง

- [1] S.S. Rao, Mechanical Vibrations, 3rd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1995.
- [2] D.J. Inman, Engineering Vibration, 2nd Edition, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 2001.
- [3] W.J. Bottega, Engineering Vibrations, Taylor & Francis Group, LLC., Boca Raton, 2006.
- [4] W.T. Thomson, Theory of Vibration with Applications, 4th Edition, Chapman & Hall, London, 1993.
- [5] L. Meirovitch, Principles and Techniques of Vibrations, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1997.
- [6] S.S. Rao, Vibration of Continuous System, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2007.
- [7] A.W. Leissa and M.S. Qatu, Vibrations of Continuous Systems, McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 2011.
- [8] J.P. Den Hartog, "Forced vibrations with combined viscous and Coulomb damping," *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, vol. 9, no. 59, pp. 801-817, 1930.
- [9] P.-C. Chen and W.W. Soroka, "Correlation technique for transient response of a hysteretically-damped dynamic system to stationary random excitation," *J. Sound Vib.*, vol. 22, no. 1, pp. 75-79, 1972.
- [10] S.F. Masri, "Forced vibration of the damped bilinear hysteretic oscillator," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, no.1, pp. 106-112, 1975.
- [11] L.Y. Chen, J.T. Chen, C.H. Chen and H.-K. Hong, "Free vibration of a SDOF system with hysteretic damping," *Mech. Res. Commun.*, vol. 21, no. 6, pp. 599-604, 1994.
- [12] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 2006.
- [13] J.J. Tuma, Engineering Mathematics Handbook, 2nd, Enlarged and Revised Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- [14] M.I. Friswell and A.W. Lees, "Resonance frequencies of viscously damped structures," *J. Sound Vib.*, vol. 217, no. 5, pp. 950-959, 1998.
- [15] M. Gurgoze and N.A. Hizal, "Viscously damped mechanical systems subject to several constraint equations," *J. Sound Vib.*, vol. 229, no. 5, pp. 1264-1268, 2000.
- [16] M. Gurgoze, "Viscously damped linear systems subjected to damping modifications," *J. Sound Vib.*, vol. 245, no. 2, pp. 353-362, 2001.
- [17] M. Gurgoze, "Non-proportionally damped systems subjected to damping modification by several viscous dampers," *J. Sound Vib.*, vol. 271, pp. 441-452, 2004.
- [18] M. Gurgoze, "On various eigenvalue problem formulations for viscously damped linear mechanical systems," *Int. J. Mech. Eng. Educ.*, vol. 33, no. 3, pp. 235-243, 2005.



ปวริศ โพธิ์ยะนันท์ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร และปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาเอกในสถาบันเดียวกัน มีประสบการณ์ทางวิชาชีพเกี่ยวกับการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างอาคารขนาดใหญ่ โครงสร้างทางชลศาสตร์ เขื่อนและประตูระบายน้ำขนาดใหญ่ภายใต้ผลของแรงสั่นสะเทือน แผ่นดินไหวและโครงสร้างงานระบบเฉพาะทางเช่น

โครงสร้างระบบท่อส่งลำเลียงของเหลวหรือน้ำมันและโครงสร้างรองรับระบบปิโตรเคมี มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่องกลศาสตร์การคำนวณเชิงโครงสร้าง การวิเคราะห์โครงสร้างบนพื้นฐานของวิธีการปัญญาประดิษฐ์และการสร้างแบบจำลองโครงข่ายประสาทเทียม



วิเจนศ วงศ์วานิชวัฒนา สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย (AIT) School of Engineering and Construction และเริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2537 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำตรงและตัวเลขและการจัดการงานก่อสร้าง



ดร.ประกิจ เปรมธรรมกร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา จาก Texas A&M University ทำงานเป็นอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2538 มีความสนใจศึกษางานวิจัยทางด้านเสถียรภาพของโครงสร้างและโครงสร้างเพื่อความปลอดภัยสำหรับถนน



ผศ.ดร.ยศ สมพรเจริญสุข สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมโครงสร้าง) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2550 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์การแตกหัก กลศาสตร์การสัมผัส และกลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำ

ตรงและตัวเลข