

การตอบสนองต่อการสั่นสำหรับระบบ 1 ดีกรีอิสระ: II – การหน่วงแบบ คูลอมบ์และการหน่วงเชิงโครงสร้าง

Vibration Responses for SDOF System: II – Coulomb and Structural Damping

ปวริศ โพษะนันท์¹ วิมเนส วงศ์วานิชวัฒนา² ประกิจ เปรมธรรมกร³ และ ยศ สมพรเจริญสุข

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา สถาบันวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยีอุตสาหกรรม
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร 140 ถนนเชื่อมสัมพันธ์ แขวงกระทุ่มราย เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: 661900031@mut.ac.th¹, wikhanes@gmail.com², pprakit@mut.ac.th³,

*Corresponding author: syossyos@mut.ac.th

Manuscript Received May 16, 2025

Revised June 21, 2025

Accepted June 26, 2025

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์หลักของบทความนี้คือ เพื่อนำเสนอการวิเคราะห์การสั่นของระบบ 1 ดีกรีอิสระที่มีการหน่วงแบบคูลอมบ์และการหน่วงเชิงโครงสร้าง สมการรูปแบบปิดในพจน์ของขนาดการสั่นหรือตัวประกอบขยายและมุมเฟสได้มีการพิสูจน์ไว้ เนื่องจากความยุ่งยากและความซับซ้อนในการหาค่าการหน่วงในระบบที่มีการใช้งานในทางปฏิบัติหลักการของสัมประสิทธิ์การหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าได้นำเสนอและอธิบายถึงวิธีการจัดการและการได้มาซึ่งค่าสัมประสิทธิ์อย่างถูกต้อง ได้พบข้อสังเกตที่สำคัญของผลลัพธ์และมีการอภิปรายอย่างละเอียดไว้ ณ ที่นี้

คำสำคัญ: การวิเคราะห์การสั่น ระบบ 1 ดีกรีอิสระ การหน่วงแบบคูลอมบ์ การหน่วงเชิงโครงสร้าง ตัวประกอบขยาย มุมเฟส สัมประสิทธิ์การหน่วงแบบหนืดเทียบเท่า

ABSTRACT

The principal objective of this paper is to deal with the vibration analysis of single degree of freedom system with Coulomb damping and structural damping. Closed-form expressions in terms of

vibration amplitude or magnification factor and phase angle are derived. Due to the difficulty and complexity in determining the damping value in practical systems, concepts of equivalent viscous damping coefficient are introduced and explained that how to treat and receive this coefficient properly. Important observations are found and clearly discussed herein.

Keywords: Vibration Analysis, SDOF System, Coulomb Damping, Structural Damping, Magnification Factor, Phase Angle, Equivalent Viscous Damping Coefficient

1. บทนำ

จากการวิเคราะห์การตอบสนองต่อการสั่น (Vibration responses) ทั้งที่เป็นแบบอิสระและแบบถูกบังคับของระบบ 1 ดีกรีอิสระที่มีการหน่วงน้อย (Underdamped SDOF systems) [1] สรุปได้ว่า ขนาดของการสั่น (Vibration magnitudes) มีค่าลดลงอย่างช้า ๆ เมื่อเวลาที่มีค่าเพิ่มมากขึ้น (Gradually decreases with time increases) อันเป็นผลเนื่องมาจากเกิดกลไกการเปลี่ยนรูปพลังงานจากการสั่น (Vibrational energy) ไปสู่พลังงานรูปแบบอื่น อาทิเช่น ความร้อน (Heat) หรือเสียง (Sound) และเรียกกลไก

ดังกล่าวว่า กลไกการหน่วง (Damper mechanism) [2-5] โดยระบบมีการสลายพลังงานเกิดขึ้น (Energy dissipation) ทั้งนี้ แรงหน่วง (Damping force) ปรากฏขึ้นเมื่อมีความเร็วสัมพัทธ์ (Relative velocity) ระหว่างปลายทั้ง 2 ข้างของตัวหน่วง (Damper)

การหาสาเหตุของการหน่วงทำได้ยากสำหรับระบบในทางปฏิบัติ (Practical systems) ซึ่งการหน่วงสามารถจำแนกประเภทออกได้เป็น [3]

- (1) การหน่วงแบบหนืด (Viscous damping)
- (2) การหน่วงจากการเสียดทานแบบแห้งหรือแบบคูลอมบ์ (Dry friction or Coulomb damping)
- (3) การหน่วงเนื่องจากวัสดุยืดหยุ่น (Material or solid or structural or hysteretic damping)

สำหรับการหน่วงใน 2 ประเภทแรกเป็นการหน่วงจากภายนอก ส่วนการหน่วงจากวัสดุยืดหยุ่นหรือเรียกว่าการหน่วงเชิงโครงสร้างซึ่งเป็นการหน่วงจากภายในเมื่อวัสดุมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือเกิดการเสียรูปขึ้น (Deformations) เนื่องจากความเค้นเชิงวัฏจักร (Cyclically stressed) ซึ่งมีการดูดซับ (Absorption) และการกระจาย (Dissipation) พลังงานภายในวัสดุทำให้เกิดการเสียดทานระหว่างระนาบภายในต่าง ๆ (Internal planes) โดยมีการลื่น (Slip) หรือการเลื่อนไถล (Slide) ของระนาบภายในวัสดุเกิดขึ้นขณะที่มีการเสียรูป

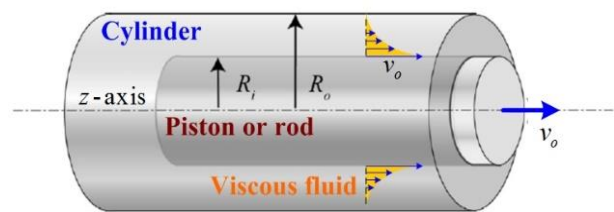
ดังนั้น วัตถุประสงค์ของบทความ คือ สนใจศึกษาปัญหาการสั่นแบบอิสระและแบบถูกบังคับของระบบที่มี 1 ดีกรีอิสระภายใต้ผลของการหน่วง โดยมุ่งเน้นระบบที่มีการหน่วงแบบคูลอมบ์และการหน่วงอันเนื่องมาจากวัสดุยืดหยุ่นหรือเรียกว่าการหน่วงเชิงโครงสร้างด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์เพื่ออธิบายพฤติกรรมการตอบสนองของระบบได้อย่างครอบคลุมรวมถึงแสดงวิธีการหาสัมประสิทธิ์การหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าของระบบ

เนื่องจากบทความนี้เป็นบทความต่อเนื่องจากบทความที่ได้นำเสนอไว้ก่อนหน้านี้ [1] ดังนั้น เพื่อไม่ให้เกิดความซ้ำซ้อนในการแสดงสมการและรูปภาพประกอบที่ซ้ำกับบทความฉบับก่อนหน้านี้ และเพื่อให้เป็นที่เข้าใจตรงกันจึงได้กำหนดหมายเลขของสมการและรูปภาพหากมีการอ้างอิงถึง ดังตัวอย่างเช่น สมการ (2) และรูปที่ 3 ที่มีการปรากฏในบทความ [1] ให้แทนด้วยสมการ (2:[1]) และรูปที่ 3:[1] ในบทความนี้ ตามลำดับ

2. ประเภทของการหน่วง

2.1 การหน่วงแบบหนืด

การหน่วงแบบหนืดเป็นรูปแบบอย่างง่ายของกลไกการกระจายพลังงานและได้รับการศึกษาเป็นส่วนใหญ่ในการวิเคราะห์พฤติกรรม การสั่น [6] – [13] สำหรับตัวหน่วงแบบหนืด (Viscous damper) สามารถแสดงแทนได้ด้วยลูกสูบ (Piston) หรือ แดชพอต (Dashpot) โดยลูกสูบลอยอยู่ในกระบอกสูบ (Cylinder) อย่างหลวมๆ ที่บรรจุด้วยของเหลวหนืด (Viscous fluids) ล้อมรอบลูกสูบ ดังแสดงในรูปที่ 1 ทั้งนี้ พิจารณาให้ของเหลวหนืดมีคุณสมบัติเป็นของเหลวแบบนิวโตเนียน (Newtonian fluid) และมีค่าความหนืด (Viscosity) เป็น μ^* [5]



รูปที่ 1 ลูกสูบเคลื่อนที่ผ่านของเหลวหนืดในกระบอกลูกสูบ

เมื่อลูกสูบมีการเคลื่อนที่ผ่านของเหลวด้วยความเร็ว v_o ในทิศทางตามแนวแกน (Axial direction) ของกระบอกสูบ (แกน z) และกำหนดให้ r คือ พิกัดในแนวรัศมี (Radial coordinate) โดยวัดตั้งฉากและอ้างอิงจากแกน z ดังนั้น ความเค้นเฉือน (Shear stress) ที่เกิดในของเหลวสามารถแทนได้ด้วย

$$\tau = (\mu^*/2)(\partial v_r/\partial z + \partial v_z/\partial r) \quad (1)$$

เมื่อ v_r และ v_z คือ องค์ประกอบความเร็วของเหลวตามแนวรัศมีและแนวแกน (Radial and axial velocity components) ตามลำดับ

กำหนดเงื่อนไขโดยไม่มีการลื่นออกจากกัน (No slip conditions) ระหว่างของเหลวหนืดและผนังของทั้งลูกสูบและกระบอกสูบ ดังนั้นแล้ว ความเร็วของเหลวตามแนวแกน z มีการแปรเปลี่ยนในรูปแบบของฟังก์ชันลอการิทึม (Varied

logarithmically) ตามแนวรัศมี (r) ดังในรูปที่ 1 และมีความสัมพันธ์เป็นดังนี้ [3], [5]

$$v_z(r) = v_o (\ln R_o - \ln r) / [\ln(R_o/R_i)] \text{ เมื่อ } v_r = 0 \quad (2)$$

ทั้งนี้ค่า R_i และ R_o คือ รัศมีของลูกสูบและกระบอกสูบที่มีหน้าตัดรูปวงกลม ตามลำดับ

เมื่อทำการแทนที่สมการ (2) ลงในสมการ (1) จึงได้ ความเค้นเฉือนกระทำบนพื้นผิวของลูกสูบ คือ

$$\tau = \frac{-\mu^* / R_i}{\ln(R_o/R_i)} v_o \quad (3)$$

และให้แรงผลลัพธ์ (Resultant force: F_d) กระทำต่อลูกสูบโดยของเหลวหนืดมีค่าเป็น

$$F_d = \tau A = c v_o \quad (4)$$

$$c = \frac{\mu^* A / R_i}{\ln(R_o/R_i)} \quad (5)$$

โดยที่ A คือ พื้นที่ผิวสัมผัสของลูกสูบที่มีของเหลวหนืดล้อมรอบและ c คือ ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง (Damping coefficient)

หากแรงที่กระทำต่อวัตถุเกิดจากตัวหน่วงแบบของเหลวหนืดเชิงเส้น (Linear viscous fluid damper) ในทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่ พบว่า ขนาดของแรงดังกล่าวมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงแบบเชิงเส้น (Linear proportion) กับอัตราเร็ว (Speed: v) โดยแรงหน่วงมีค่าดังนี้

$$F_d = c v \quad (6)$$

สำหรับกรณีของตัวหน่วงเป็นแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear dampers) สามารถใช้กระบวนการทำให้เป็นเชิงเส้น (Linearization procedure) กับความเร็วปฏิบัติการ (Operating velocity: v^*) จึงหาค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงเทียบเท่า (Equivalent damping coefficient: c_{eq}) ได้ดังนี้

$$c = \left. \frac{dF_d}{dv} \right|_{v^*} = c_{eq} \quad (7)$$

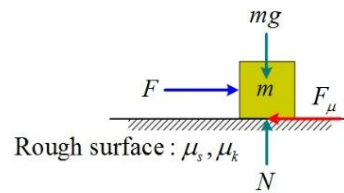
สังเกตได้ว่า การวิเคราะห์การสั่นของระบบที่มีการหน่วงก่อนหน้านี้ [1] ทั้งที่เป็นการสั่นแบบอิสระและแบบถูกบังคับนั้นเป็นการพิจารณาการหน่วงประเภทแบบหนืดที่มีลักษณะเป็นเชิงเส้นเนื่องจากแรงหนืดต้านทานการเคลื่อนที่เป็นสัดส่วนโดยตรงแบบเชิงเส้นกับอัตราเร็วของระบบดังสมการ (1:[1]) หรือสมการ (6) ข้างต้น

2.2 การหน่วงแบบคูลอมบ์

สำหรับการหน่วงเนื่องมาจากผลการเสียดทานแบบแห้งหรือเรียกว่า การหน่วงแบบคูลอมบ์ซึ่งเกิดขึ้นจากมีการเลื่อนไถลระหว่าง 2 พื้นผิวแบบแห้ง (2 dry surfaces) ที่สัมผัสกัน (Contact) ทั้งนี้กฎของคูลอมบ์สำหรับการเสียดทานแบบแห้ง (Coulomb's law of dry friction) ยังคงสามารถประยุกต์ใช้ได้กับการสั่นของระบบที่มีการหน่วงแบบนี้ โดยมีแรงเสียดทานกระทำในทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางความเร็วของระบบระหว่างการเคลื่อนที่หรือเกิดการสั่น

เนื่องจากแรงเสียดทานเป็นแรงแบบไม่อนุรักษ์ (Non-conservative force) [14,15] ส่งผลทำให้พลังงานของระบบนั้นไม่คงที่และมีการสูญเสียพลังงานเกิดขึ้น ดังนั้น แรงเสียดทานทำให้เกิดผลกระทบแบบหน่วง (Damping effects) ต่อการเคลื่อนที่ของมวล (ระบบ) นอกจากนี้ ยังพบว่า ขนาดของแรงหน่วงแบบคูลอมบ์ (Coulomb damping force) เป็นอิสระกับการกระจัดและความเร็วแต่มีการแปรผันโดยตรงกับแรงปฏิกิริยาดังฉาก (Normal force: N) ระหว่างพื้นผิวเลื่อนไถล (Sliding surfaces) [5]

เริ่มต้นจากการพิจารณาให้มวล m วางอยู่บนพื้นผิวหยาบ (Rough surface) โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตย์ (Static frictional coefficient) คือ μ_s และค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ (Kinetic frictional coefficient) คือ μ_k และอยู่ภายใต้แรงกระทำจากภายนอก F ดังในรูปที่ 2



รูปที่ 2 สมดุลของมวลบนพื้นผิวหยาบภายใต้แรงกระทำ F

เมื่อแรงเสียดทาน F_μ สมดุลกับแรงภายนอก F ในทิศทาง

ตรงกันข้าม โดยที่ $|F_\mu| = |F|$ และมวลยังคงหยุดนิ่งกับที่จึงเรียกแรงเสียดทาน ณ ขณะนี้ว่า แรงเสียดทานสถิตย์ (Static frictional force) โดยมีขนาดของแรง คือ

$$|F_\mu| < \mu_s N = \mu_s mg \quad (8)$$

ในที่นี้ N คือ แรงปฏิกิริยากระทำตั้งฉากจากพื้นรองรับและเป็นแรงอัด (Compressive force) กระทำต่อมวล และ g คือ ค่าความเร่งจากแรงโน้มถ่วงโลก (Gravitational acceleration)

ลำดับถัดมา พิจารณาให้มวลกำลังเริ่มต้นเกิดการเลื่อนไหลหรือเริ่มมีการขยับตัวเคลื่อนที่พอดีเมื่อแรงภายนอก F มีขนาดเพิ่มขึ้นถึงระดับวิกฤต (Critical level: $|F|_{cr}$) ดังนี้

$$|F|_{cr} = \mu_s N = \mu_s mg \quad (9)$$

และเมื่อมวลเกิดการเคลื่อนที่ไปแล้ว แรงเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสจึงมีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตลอดการเคลื่อนที่และเรียกว่า แรงเสียดทานจลน์ (Kinetic frictional force) ซึ่งมีขนาดเป็น

$$|F_\mu| = \mu_k N = \mu_k mg \quad (10)$$

โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$\mu_k \leq \mu_s < 1 \quad (11)$$

เมื่อทำการพิจารณาแบบจำลองของระบบมวล-สปริง (Mass-spring system) โดยยังคงให้มวลวางอยู่บนพื้นผิวหยาบเดิมซึ่งสามารถคาดหมายได้ดังนี้ว่า ในเริ่มแรกนั้นมวลมีการเคลื่อนที่ไปในทิศทางหนึ่งจนกระทั่งมีการหยุดนิ่งชั่วขณะ หลังจากนั้น มวลมีการเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่เริ่มแรกจนถึงระยะทางหนึ่งและมีการหยุดนิ่งชั่วขณะอีกครั้งและเคลื่อนที่ต่อไปในทิศตรงกันข้ามและเป็นเช่นนี้สลับไปมาเรื่อยไป ดังนั้น แรงต่างๆ ที่ปรากฏในสมการ (8) และสมการ (9) สามารถแทนที่ได้ด้วยแรงสปริง (Spring force: $F_s = kx$) ณ เวลาขณะหนึ่งที่มีความเร็วของมวลมีค่าเป็นศูนย์ ($v = 0$) ร่วมกับการใช้สมการ (10) ดังนี้

$$k|x| = \mu_s mg = \mu_s |F_\mu| / \mu_k$$

$$|x| = \frac{\mu_s}{k} \cdot \frac{|F_\mu|}{\mu_k}$$

ดังนั้น ขนาดของการกระจัดวิกฤติ (Critical displacement: $|x|_{cr}$) มีค่าเป็น

$$|x|_{cr} = \bar{\mu} f_\mu \quad (12)$$

โดยในที่นี้ f_μ สามารถพิจารณาให้เป็นปริมาณการกระจัดเชิงสถิตย์ (Static displacement) ของมวลดังนี้

$$f_\mu = \frac{|F_\mu|}{k} = \mu_k \frac{mg}{k} \quad (13)$$

ซึ่ง $\bar{\mu}$ ในสมการ (12) คือ ค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ความเสียดทานโดยมีนิยามและเงื่อนไข คือ

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_s}{\mu_k} \geq 1 \quad (14)$$

คุณลักษณะของแรงกระจายอันเป็นผลมาจากการหน่วงแบบดูลอมบ์ (Dissipative force) สามารถแสดงได้ด้วยความสัมพันธ์

$$F_c = F_\mu(\dot{x}) = \begin{cases} -\mu_k N, & \dot{x} > 0 \\ 0, & \dot{x} = 0 \\ +\mu_k N, & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (15)$$

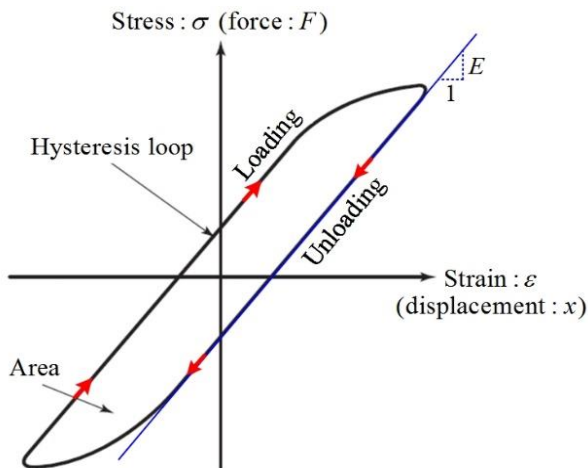
โดยเรียก F_c ว่าเป็นแรงกระจายเนื่องมาจากการหน่วงแบบดูลอมบ์ และ F_μ คือ แรงเสียดทานจลน์ดังสมการ (10)

2.3 การหน่วงเชิงโครงสร้าง

การหน่วงเนื่องจากวัสดุยืดหยุ่นหรือการหน่วงเชิงโครงสร้างสามารถระบุคุณลักษณะของที่มา (Attribution) ให้เป็นการสูญเสียพลังงานอันเนื่องมาจากวัสดุยืดหยุ่นได้มีการผ่านประสบการณ์ความเค้นวัฏจักร (Experiencing cyclic stress) [16-18] โดยพฤติกรรมของวัสดุขึ้นอยู่กับประวัติการรับภาระ (Loading history) จึงอาจเรียกวัสดุนั้นว่าเป็นวัสดุทางพันธุกรรม (Hereditary materials)

หรือเป็นวัสดุที่มีหน่วยความทรงจำ (Materials with memory) [3]

เมื่อวัตถุ (Bodies) มีการหน่วงจากวัสดุยืดหยุ่นและอยู่ภายใต้การสั่น พบว่า แผนภาพความเค้นและความเครียด (Stress-strain diagram) ของวงรอบฮิสเทอรีซิส (Hysteresis loop) สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3 และจากรูปสามารถสังเกตได้ว่า พฤติกรรมในช่วงที่มีความสัมพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น (Linear relationships) มีค่าความชัน (Slope) เท่ากับค่ายังก์โมดูลัสของวัสดุ (Young's modulus) ส่วนของพื้นที่ภายในวงรอบปิด (Closed-loop area) หมายถึง การสูญเสียพลังงานต่อหน่วยปริมาตร (Energy lost per unit volume) อันเนื่องมาจากผลของการหน่วง ซึ่งวัสดุเชิงโครงสร้างโดยส่วนใหญ่สามารถทำการทดสอบและทำการวัดค่าความเค้น (หรือแรง) และความเครียด (หรือการกระจัด) ภายใต้การควบคุมภาระแบบฮาร์มอนิกในสภาวะคงตัว (Steady-state harmonic loading) หรืออยู่ภายใต้การสั่นแบบฮาร์มอนิกได้ (Harmonic oscillation)



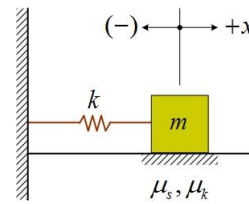
รูปที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดหรือระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ สำหรับการหน่วงจากวัสดุยืดหยุ่นหรือการหน่วงเชิงโครงสร้าง [3]

3. การสั่นของระบบ SDOF ที่มีการหน่วงแบบคูลอมบ์

3.1 การสั่นอิสระที่มีการหน่วงแบบคูลอมบ์

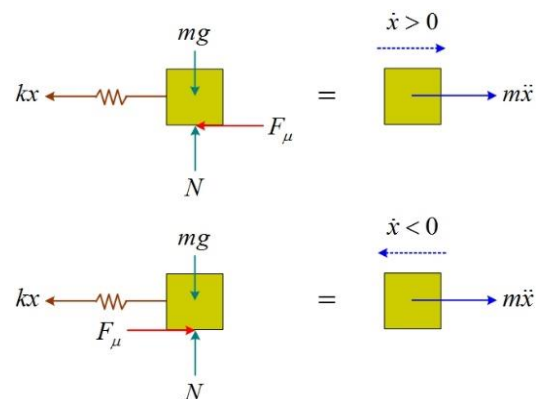
เริ่มทำการพิจารณาแบบจำลองของระบบมวล-สปริง โดยกำหนดให้มวลมีการเคลื่อนที่ไถล (Sliding) อยู่บนพื้นผิวเสียดทาน

แบบแห้ง (Dry frictional surface) ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 แบบจำลองการสั่นแบบอิสระของระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงแบบคูลอมบ์

จากแรงเสียดทาน (F_μ) ที่ให้ไว้ในสมการ (15) มีการแปรเปลี่ยนตามทิศทางของความเร็วและมีทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่เสมอ ส่งผลทำให้ระบบที่มีแรงเสียดทานแบบคูลอมบ์เป็นระบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear system) ดังนั้น วิธีการแก้ปัญหาจึงจำเป็นต้องแยกพิจารณาการเคลื่อนที่ออกเป็น 2 กรณี ดังแผนภาพวัตถุแข็งเกร็งเชิงพลวัต (DFBD) ในรูปที่ 5 ในที่นี้ กำหนดให้กรณีที่ 1 เป็นการเคลื่อนที่ของมวลที่เริ่มจากซ้ายไปขวาและให้ความเร็วมีค่าเป็นบวก (Positive velocity) ส่วนในกรณีที่ 2 นั้น มวลเคลื่อนที่จากขวาไปซ้ายและความเร็วมีค่าเป็นลบ (Negative velocity)



รูปที่ 5 แผนภาพวัตถุแข็งเกร็งเชิงพลวัตสำหรับแบบจำลองการสั่นแบบอิสระของระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงแบบคูลอมบ์

สมการควบคุมการเคลื่อนที่ (Motion governing equation) หาได้จากการพิจารณากฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน (Newton's second law of motions) ของแผนภาพวัตถุแข็งเกร็ง

เชิงพลวัต ดังนี้

กรณีที่ 1: $-kx - F_\mu = m\ddot{x}$

และสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน [2], [3], [19] ได้เป็น

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\omega^2 f_\mu \quad \text{เมื่อ } \dot{x} > 0 \quad (16)$$

โดยที่ ความถี่ธรรมชาติเชิงมุม (ω) และ f_μ มีนิยามไว้ตามสมการ (4:[1]) และสมการ (13) ตามลำดับ

กรณีที่ 2: $-kx + F_\mu = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 f_\mu \quad \text{เมื่อ } \dot{x} < 0 \quad (17)$$

เมื่อทำการพิจารณาสมการ (16) และสมการ (17) จึงสามารถเขียนรวมให้อยู่ในรูปแบบของ 1 สมการขึ้นใหม่เป็น

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \omega^2 f_\mu \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0 \quad (18)$$

ในที่นี้ $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ เรียกว่า ฟังก์ชันซิกนัม (Signum function) ของตัวแปร $\dot{x}$ และมีนิยามดังนี้ [3], [4]

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0 \\ 0, & \dot{x} = 0 \\ -1, & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (19)$$

สังเกตได้ว่า สมการ (18) เป็นสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear differential equation) ที่ไม่สามารถแก้หาผลเฉลยได้โดยตรงด้วยวิธีการหาสัมประสิทธิ์ตัวไม่ทราบค่า (Undetermined coefficients method) [20] ถึงกระนั้นก็ตาม วิธีการแก้หาผลเฉลยของสมการ (18) ยังสามารถทำได้หากพิจารณาแบ่งช่วงเวลา (Breaking the time intervals) ออกเป็นช่วงย่อย ๆ (Segments) ที่สอดคล้องตามการเปลี่ยนแปลงทิศทางของการเคลื่อนที่เมื่อความเร็วของวัตถุเป็นศูนย์ ($\dot{x} = 0$) เช่นนี้แล้ว ผลเฉลยของสมการ (18) จึงเป็นการตอบสนองต่อการสั่นอิสระแบบฮาร์มอนิกที่ได้จากผลรวมระหว่างผลเฉลยสมทบ (x_h) และผลเฉลยเฉพาะ (x_p) ที่สอดคล้องกับพจน์ที่ 3 ทางซ้ายมือในสมการ (18) และเมื่อพิจารณา

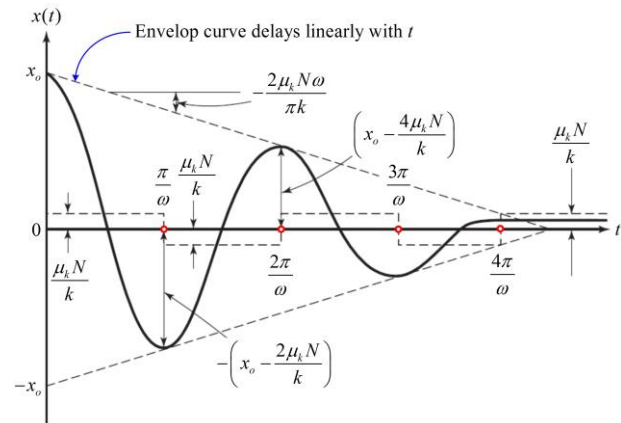
เลือกใช้สมการ (9:[1]) สำหรับ x_h จึงได้ผลเฉลยทั่วไปเป็นดังนี้ คือ [20], [21]

$$x(t) = A_1^+ \cos \omega t + A_2^+ \sin \omega t - f_\mu \quad \text{เมื่อ } \dot{x} > 0 \quad (20)$$

$$x(t) = A_1^- \cos \omega t + A_2^- \sin \omega t + f_\mu \quad \text{เมื่อ } \dot{x} < 0 \quad (21)$$

โดย (A_1^+, A_2^+) และ (A_1^-, A_2^-) คือ ค่าคงที่จากการอินทิเกรตสมการ (18) และสามารถหาค่าที่แน่นอนได้ภายหลังการประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) นอกไปจากนี้ สังเกตได้ว่าพจน์ f_μ มีค่าคงที่และแสดงถึงการกระจัดสมมติ (Virtual displacement) ของสปริงภายใต้ผลของแรง F_μ

สมการ (20) และสมการ (21) มีการเคลื่อนที่เป็นรูปแบบฮาร์มอนิกในแต่ละครึ่งรอบ (Half cycle) ของการเคลื่อนที่ ทั้งนี้ ตำแหน่งสมดุล (Equilibrium position) ของระบบปรากฏขึ้นก็ต่อเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าของ f_μ ไปสู่ค่า $-f_\mu$ ในทุกๆ ครึ่งรอบของการเคลื่อนที่ดังในรูปที่ 6



รูปที่ 6 ประวัติเวลาการสั่นแบบอิสระของแบบจำลองระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงแบบคูลอมบ์

เพื่อให้เข้าใจถึงลักษณะการเคลื่อนที่ได้อย่างชัดเจนจึงกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น ณ เวลา $t=0$ มีค่าดังต่อไปนี้

$$x(t=0) = x(0) = x_o \quad (22)$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}(0) = v_o = 0 \quad (23)$$

จากสมการ (22) และสมการ (23) อธิบายได้ว่า เมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ นั้น ระบบเริ่มต้นการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเริ่มต้นที่เป็นศูนย์ ($v_o = 0$) และมีการกระจัดเริ่มต้นเป็น x_o โดยมีทิศทางการเคลื่อนที่เริ่มจากขวาไปซ้าย (พิจารณารูปที่ 6 ประกอบ) และหากกำหนดให้ค่า $x_o, x_1, x_2, \dots$ คือ ขนาดของการเคลื่อนที่ (Amplitudes of motion) ในแต่ละครึ่งรอบที่ต่อเนื่องกัน (Successive half cycles) ดังนั้น เมื่อทำการแทนสมการ (21) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการ (22) และสมการ (23) จึงสามารถแก้สมการหาค่าคงที่ A_1^- และ A_2^- มาได้ ซึ่งคือ

$$A_1^- = x_o - f_\mu \quad (24)$$

$$A_2^- = 0 \quad (25)$$

เช่นนี้แล้ว สมการ (21) จึงเขียนได้ใหม่เป็น

$$x(t) = (x_o - f_\mu) \cos \omega t + f_\mu \quad \text{เมื่อ } \dot{x} < 0 \quad (26)$$

ทั้งนี้แล้ว สมการ (26) ถูกต้องในกรณีของการเคลื่อนที่ในครึ่งรอบแรกเท่านั้นเมื่อ $0 \leq t \leq \pi/\omega$ และเมื่อ $t = \pi/\omega$ พบว่า ตำแหน่งการกระจัดของมวลนั้นอยู่ทางด้านซ้ายมือสุด (x_1) โดยอ้างอิงกับตำแหน่งสมดุล ซึ่งสามารถหาค่าได้ด้วยการแทน $t = \pi/\omega$ กลับลงในสมการ (26) และมีค่าดังนี้

$$x_1 = (x_o - 2f_\mu) \quad (27)$$

จากนั้น ให้พิจารณาการเคลื่อนที่ในครึ่งรอบที่ 2 ถัดไป โดยมวลมีการเคลื่อนที่จากทางซ้ายไปทางขวา ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่จึงเป็นสมการ (20) ซึ่งเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการเคลื่อนที่ในครึ่งรอบที่ 2 นี้หาได้จากสมการ (26) โดยกำหนดให้ $t = \pi/\omega$ จึงได้เงื่อนไข

$$x(\pi/\omega) = -(x_o - 2f_\mu)$$

$$\dot{x}(\pi/\omega) = -(x_o - f_\mu)\omega \sin(\omega\pi/\omega) = 0$$

ให้ทำการแทนสมการ (20) ลงใน 2 เงื่อนไขดังกล่าวข้างต้น ผลลัพธ์ที่ได้ คือ ค่าคงที่ A_1^+ และ A_2^+ ดังต่อไปนี้

$$A_1^+ = x_o - 3f_\mu \quad (28)$$

$$A_2^+ = 0 \quad (29)$$

เช่นนี้แล้ว สมการ (20) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$x(t) = (x_o - 3f_\mu) \cos \omega t - f_\mu \quad \text{เมื่อ } \dot{x} > 0 \quad (30)$$

โดยสมการ (30) ถูกต้องในกรณีของการเคลื่อนที่ในครึ่งรอบที่ 2 เท่านั้น สำหรับ $\pi/\omega \leq t \leq 2\pi/\omega$ และที่ปลายของครึ่งรอบนี้พบว่า ตำแหน่งการกระจัดของมวลอยู่ทางขวามือสุด (x_2) เมื่ออ้างอิงกับตำแหน่งสมดุล ซึ่งสามารถหาค่า x_2 ได้จากการแทน $t = 2\pi/\omega$ ลงในสมการ (30) จึงได้

$$x_2 = x_o - 4f_\mu \quad (31)$$

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ในครึ่งรอบที่ 3 และในครึ่งรอบลำดับถัดไป สามารถใช้กระบวนการในทำนองเดียวกันต่อเนื่องจนกระทั่งการเคลื่อนที่หยุดนิ่งลงภายใต้เงื่อนไข คือ $x_n \leq f_\mu$ และแรงในสปริง $F_s = kx < F_\mu$ ดังนั้น จึงกำหนดให้ n_h คือ ลำดับจำนวนครั้งของการเคลื่อนที่ในครึ่งรอบก่อนที่มวลหยุดการเคลื่อนที่ลงและมีเงื่อนไขความสัมพันธ์ คือ

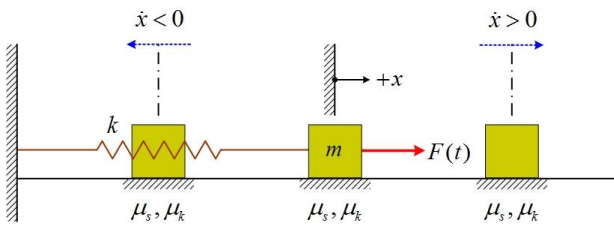
$$x_o - n_h(2f_\mu) \leq f_\mu$$

จึงได้

$$n_h \geq \frac{x_o - f_\mu}{2f_\mu} \quad (32)$$

3.2 การสั่นแบบถูกบังคับที่มีการหน่วงแบบคูลอมบ์

สำหรับแบบจำลองการสั่นแบบถูกบังคับของระบบมวล-สปริงที่มีการหน่วงแบบคูลอมบ์ภายใต้ผลของแรงกระทำจากภายนอกในรูปแบบฮาร์มอนิก $F(t)$ แสดงไว้ในรูปที่ 7



รูปที่ 7 แบบจำลองการสั่นแบบถูกบังคับของระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงแบบคูลอมบ์

กำหนดให้แรง $F(t)$ มีรูปแบบฟังก์ชันเป็นไปตามสมการ (39:[1]) และสมมติให้ $\psi = 0$ ดังนั้น สมการควบคุมการเคลื่อนที่คือ

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \omega^2 f_\mu \operatorname{sgn}(\dot{x}) = f_o \sin \Omega t \quad (33)$$

เมื่อ f_o ได้เคยให้ไว้ในสมการ (41:[1]) โดยที่เครื่องหมายของ f_μ มีค่าเป็นบวก (ลบ) เมื่อมวลมีการเคลื่อนที่จากซ้ายไปขวา (ขวาไปซ้าย)

หากแรงหน่วงจากการเสียดทานแบบแห้ง (F_μ) มีค่ามากส่งผลทำให้การเคลื่อนที่ของมวลเกิดความไม่ต่อเนื่อง (Mass motion discontinuity) และในทางกลับกัน ถ้า F_μ มีค่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของแรงภายนอก F_o ($F_\mu < F_o$) แล้วนั้น ผลเฉลย (การตอบสนองการเคลื่อนที่) แบบสถานะคงตัว (Steady-state solution) ของสมการ (33) นั้นสามารถคาดหมายได้ว่ามีรูปแบบที่ใกล้เคียงฮาร์มอนิก (Nearly harmonic) ซึ่งการประมาณผลเฉลยของสมการ (33) สามารถทำได้ด้วยการประยุกต์ใช้ค่าอัตราส่วนการหน่วงแบบหนืดเทียบเท่า (Equivalent viscous damping ratio: ζ_{eq}) หรือเรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงแบบหนืดเทียบเท่า (Equivalent viscous damping coefficient: c_{eq})

โดยอ้างอิงถึงรูปที่ 17:[1] พบว่า อิทธิพลหลัก (Primary influence) ของการหน่วงที่มีต่อการสั่นส่งผลต่อการจำกัดขนาดของการตอบสนองของระบบเมื่อเกิดการกำทอนขึ้น (Resonance at $\Omega = \omega$) ดังนั้น การหน่วงจึงมีอิทธิพลเล็กน้อย (Little influence) ต่อการตอบสนองในอาณาบริเวณความถี่ (Frequency regions) ที่อยู่ห่างออกไปจากการเกิดการกำทอน อย่างไรก็ตาม เป็นการยากในการจำลองเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical modelling) และการตรวจวัดค่า (Measurements) ของการหน่วงแบบคูลอมบ์ เช่นนี้

แล้ว จึงประมาณหาการหน่วงโดยขึ้นกับความเร็วในแบบเชิงเส้นได้ (Linear dependence on velocity) สำหรับการหน่วงประเภทอื่น ๆ นั้น รูปแบบของการหน่วง (Damping forms) สามารถจัดการได้ในรูปแบบของการหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการตอบสนอง (Force-response) โดยการใช้วิธีการทดสอบระบบเชิงเส้นเทียบเท่า (Equivalent linear system) ที่อยู่บนพื้นฐานของการกระจายพลังงานระหว่างการสั่น (Energy dissipated during vibration)

เริ่มต้นด้วยการพิจารณาระบบที่มีการหน่วงแบบหนืด (Viscously damped system) ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานเทียบกับเวลา (Rate of change of energy with time: dW/dt) มีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned} dW/dt &= \text{force} \times \text{velocity} = F_d v = -c v^2 \\ &= -c(dx/dt)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

โดยที่ เครื่องหมายลบ (Negative sign) แทนการกระจายพลังงาน

เนื่องจากกำหนดให้แรงกระทำจากภายนอกอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชัน $F(t) = F_o \sin \Omega t$ และผลการตอบสนองแบบสถานะคงตัว (Steady-state response) เป็นรูปแบบฮาร์มอนิก ดังนั้น $x(t)$ ในสมการ (34) จึงเขียนให้อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$x(t) = X \sin(\Omega t - \phi_s) \quad (35)$$

กำหนดให้การกระจายพลังงาน (Energy dissipated: ΔW) ของระบบที่มีการหน่วงแบบหนืดต่อรอบ (A complete cycle) มีนิยามเป็น

$$\Delta W = \oint F_d dx = \int_0^{2\pi/\Omega} c \dot{x}^2 dt \quad (36)$$

เมื่อแทนที่สมการ (35) ลงในสมการ (36) และทำการหาค่าอินทิกรัล (Integral) จึงได้

$$\Delta W = \pi c \Omega X^2 \quad (37)$$

สำหรับการกระจายพลังงานจากการหน่วงแบบคูลอมบ์ต่อรอบคือ

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\Omega} F_\mu dx = \int_0^{2\pi/\Omega} F_\mu \dot{x} dt \quad (38)$$

ด้วยการใช้สมการ (15) และสมการ (19) จึงเขียนสมการ (38) ได้ใหม่ดังนี้

$$\Delta W = \mu_k N \int_0^{2\pi/\Omega} \text{sgn}(\dot{x}) \dot{x} dt \quad (39)$$

และเมื่อแทน x จากสมการ (35) จึงได้

$$\Delta W = \mu_k N X \Omega \int_0^{2\pi/\Omega} \text{sgn}(\dot{x}) \cos \Omega t dt$$

ภายหลังการหาค่าอินทิกรัลของพจน์ทางขวามือในสมการข้างต้น ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$\Delta W = 4\mu_k N X \quad (40)$$

กำหนดให้สมการ (37) เทียบเท่ากับสมการ (40) จึงได้ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าที่สอดคล้องกับการหน่วงแบบคูลอมบ์ ดังนี้

$$c_{eq} = \frac{4\mu_k N}{\pi \Omega X} = \frac{4\mu_k mg}{\pi \Omega X} \quad (41)$$

และจากการใช้นิยามตามสมการ (5:[1]) จึงสามารถหาค่าตัวประกอบหรือค่าอัตราส่วนการหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าได้

$$\zeta_{eq} = \frac{2\mu_k N}{\pi \omega \Omega X} = \frac{2\mu_k N}{\pi m \omega \Omega X} \quad (42)$$

ดังนั้นแล้ว จึงสามารถเขียนสมการ (33) สำหรับระบบการหน่วงแบบหนืดเทียบเท่า (Equivalent viscously damped system) ได้เป็น

$$\ddot{x} + 2\zeta_{eq} \omega \dot{x} + \omega^2 x = f_o \sin \Omega t \quad (43)$$

สำหรับการตอบสนองในแบบสภาวะคงตัว (x_p) ที่ให้ไว้ก่อนหน้านี้

นี้ในสมการ (35) เมื่อ $x = x_p$ คือ

$$x_p(t) = X \sin(\Omega t - \phi_s) \quad (44)$$

โดยที่ ปริมาณขนาดการสั่น X และมุมเฟส ϕ_s ของการตอบสนองหาได้ด้วยการแทนที่สมการ (44) กลับลงในสมการ (43) และกำหนดให้พจน์ของสัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน $\sin \Omega t$ และ $\cos \Omega t$ ทั้ง 2 ข้างของสมการมีค่าเท่ากันจึงได้

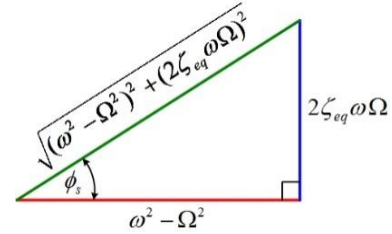
$$X[(\omega^2 - \Omega^2) \cos \phi_s + 2\zeta_{eq} \omega \Omega \sin \phi_s] = f_o \quad (45)$$

$$X[(\omega^2 - \Omega^2) \sin \phi_s - 2\zeta_{eq} \omega \Omega \cos \phi_s] = 0 \quad (46)$$

จากการพิจารณาสมการ (46) เมื่อ $X \neq 0$ พบว่า

$$\tan \phi_s = \frac{2\zeta_{eq} \omega \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (47)$$

ซึ่งมุมเฟส ϕ_s สามารถแสดงความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบของสามเหลี่ยมพีทาโกรัส (Pythagorus' triangle) ดังแสดงในรูปที่ 8



รูปที่ 8 สามเหลี่ยมมุมฉากแสดงความสัมพันธ์ของมุม ϕ_s

โดยแทนสมการ (47) ลงในสมการ (45) ร่วมกับการใช้ความสัมพันธ์ของมุมเฟส ϕ_s จากรูปที่ 8 จึงสามารถหาขนาดการสั่น X ได้ดังนี้

$$X = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta_{eq} \omega \Omega)^2}} \quad (48)$$

เมื่อใช้สมการ (41:[1]) สำหรับ f_o สมการ (4:[1]) สำหรับ ω สมการ (51:[1]) สำหรับค่าอัตราส่วนความถี่ r และสมการ (42) สำหรับ ζ_{eq} ในสมการ (48) พบว่า

$$X = \frac{F_o/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (4\mu_k N/\pi k X)^2}} \quad (49)$$

จากนั้น ทำการแก้สมการ (49) เพื่อหาค่า X ให้อยู่ตามลำพังจึงได้

$$X = (F_o/k) \frac{\sqrt{1 - (4\mu_k N/\pi F_o)^2}}{(1-r^2)} \quad (50)$$

ทั้งนี้แล้ว สมการ (50) สามารถใช้ได้ก็ต่อเมื่อ $F_\mu < F_o$ เท่านั้นดังได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้และเพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดค่าจินตภาพ (Imaginary values) ของ X จึงจำกัดค่าของแรงเสียดทาน F_μ ด้วยเงื่อนไข

$$1 - (4\mu_k N/\pi F_o)^2 > 0$$

หรือ

$$F_o/\mu_k N > 4/\pi \quad (51)$$

สำหรับมุมเฟส ϕ_s ที่ได้จากสมการ (47) สามารถจัดรูปใหม่โดยการใช้สมการ (42) และสมการ (50) ดังนั้น

$$\tan \phi_s = \frac{4\mu_k N/\pi k X}{1-r^2} = \frac{4\mu_k N/\pi F_o}{\sqrt{1 - (4\mu_k N/\pi F_o)^2}} \quad (52)$$

สังเกตได้ว่า $\tan \phi_s$ ให้ค่าคงที่สำหรับแต่ละค่าของ $F_o/\mu_k N$ โดยที่ ϕ_s เกิดความไม่ต่อเนื่องเมื่อมีการกำทอน ($r=1$) และ ϕ_s มีค่าเป็นบวกเมื่อ $r < 1$ และเป็นลบเมื่อ $r > 1$ ดังนั้น สมการ (52) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\tan \phi_s = \frac{\pm 4\mu_k N/\pi F_o}{\sqrt{1 - (4\mu_k N/\pi F_o)^2}} \quad (53)$$

4. การหน่วงเชิงโครงสร้าง

4.1 การสั่นแบบอิสระที่มีการหน่วงเชิงโครงสร้าง

ลำดับถัดไป พิจารณาการสั่นแบบอิสระที่มีการหน่วงจากวัสดุยืดหยุ่นของระบบที่มี 1 ดีกรีอิสระ (Free vibration with

hysteretic damping of SDOF systems) โดยการหน่วงประเภทนี้เป็นการหน่วงจากภายใน (Internal damping) ของวัสดุที่มีการสูญเสียพลังงานเนื่องจากการเสียดทาน (Friction) ระหว่างระนาบภายในขณะเกิดการเสียดรูปภายใต้ผลของภาระภายนอก (External loading)

การสูญเสียพลังงานต่อรอบ (Energy lost per cycle) เป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่ากำลังสองของขนาดการสั่นซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียพลังงาน (Loss coefficient) มีค่าคงที่และมีรูปร่างของวงรอบฮิสเทอเรซิส (Hysteresis loop) ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามขนาดของการสั่นและเป็นอิสระกับอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด (Independent of strain rate) [3] ดังได้แสดงในรูปที่ 3 ทั้งนี้ การสูญเสียหรือการกระจายพลังงานต่อรอบสำหรับการหน่วงแบบหนืดตามสมการ (37) สามารถนิยามให้เป็นค่าความจุการหน่วงจำเพาะ (Specific damping capacity) โดยทำการหารด้วยค่าพลังงานศักย์สูงสุด (Peak potential or strain energy: $U_{\max}$) ซึ่งคือ $\Delta W/U_{\max}$

เนื่องจากปริมาณที่ใช้กันเป็นส่วนใหญ่สำหรับระบบที่มีการหน่วงเชิงโครงสร้าง (Structurally damped system) คือ ค่าตัวประกอบหรือค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียพลังงาน (Loss factor or loss coefficient) โดยแทนด้วย η ซึ่งหมายถึง ค่าความจุการหน่วงจำเพาะต่อเรเดียเนียนและมีนิยามเป็น [2-5,19]

$$\eta = \frac{\Delta W}{2\pi U_{\max}} \quad (54)$$

ในที่นี่ $U_{\max}$ คือ ค่าพลังงานศักย์ที่มีการกระจัด X มากที่สุด (Maximum displacement of X) หรือ พลังงานความเครียด (Strain energy) โดย

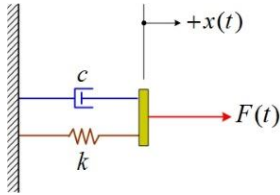
$$U_{\max} = kX^2/2 \quad (55)$$

ค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียพลังงานมีความสัมพันธ์กับค่าอัตราส่วนการหน่วงของระบบที่มีการหน่วงแบบหนืดเมื่อเกิดการกำทอน ดังนั้น ทำการแทนสมการ (37) ลงในสมการ (54) และกำหนดให้ $\Omega = \omega$ ร่วมกับการใช้สมการ (4:[1]) และสมการ (5:[1]) โดยภายหลังการจัดรูปจึงได้

$$\eta = 2\zeta \text{ เมื่อ } \Omega = \omega \quad (56)$$

จากการสังเกตสมการ (56) พบว่า สัมประสิทธิ์การสูญเสียพลังงานมีค่าเป็น 2 เท่าของค่าอัตราส่วนการหน่วงเมื่อเกิดการกำทอน ($\Omega = \omega$)

ก่อนทำการวิเคราะห์การหน่วงเนื่องจากวัสดุยืดหยุ่นให้พิจารณาแบบจำลองของระบบสปริง-ตัวหน่วงแบบหนืด (Spring-viscous damper system) ภายใต้แรงกระทำ $F(t)$ ดังแสดงในรูปที่ 9



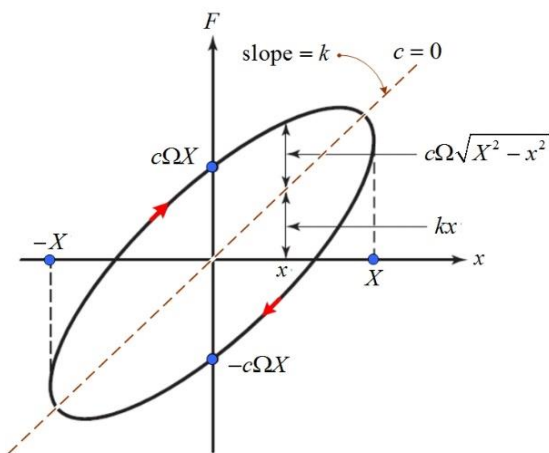
รูปที่ 9 แบบจำลองการสั่นแบบถูกบังคับของระบบสปริง-ตัวหน่วงแบบหนืด

ปริมาณแรงที่ต้องการของ F เพื่อทำให้เกิดการกระจัด $x(t)$ คือ

$$F = kx + c\dot{x} \quad (57)$$

สำหรับการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกด้วยความถี่ Ω และมีขนาด X เมื่อมีการตอบสนองแบบสภาวะคงตัวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$x(t) = X \sin \Omega t \quad (58)$$



รูปที่ 10 ความสัมพันธ์ระหว่างแรง F และการเคลื่อนที่ x ใน 1 วงรอบ

โดยทำการแทนสมการ (58) ลงในสมการ (57) และใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ [21] ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$F = kx \pm c\Omega\sqrt{X^2 - x^2} \quad (59)$$

จากนั้น ให้ทำการยกกำลังสองทั้ง 2 ข้างของสมการ (59) จึงนำไปสู่สมการทั่วไปของรูปวงรีโดยมีค่า $c^2\Omega^2 > 0$ ซึ่งเป็นรูปวงรีที่มีการหมุนรอบจุดกำเนิดบนระนาบ $F-x$ ดังรูปที่ 10 และมีสมการดังต่อไปนี้ [20]

$$F^2 + (c^2\Omega^2 + k^2)x^2 - (2k)c\Omega Fx - c^2\Omega^2 X^2 = 0 \quad (60)$$

วงรีในรูปที่ 10 เรียกว่า วงรอบฮีสเทอเรซิส (Hysteresis loop) และพื้นที่อาณาบริเวณที่อยู่ภายใน (Enclosed area) ของวงรีหมายถึง ปริมาณการสูญเสียพลังงานต่อรอบ ในที่นี้ สังเกตได้ว่าเมื่อ $c = 0$ ส่งผลทำให้รูปวงรีกลายเป็นเส้นตรง (Straight line) ที่มีความชัน (Slope) เท่ากับค่าคงที่ของสปริง (k)

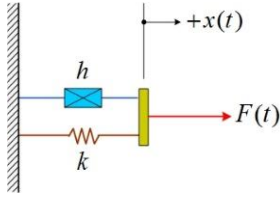
จากการใช้สมการ (57) และสมการ (58) จึงหาปริมาณการสูญเสียพลังงานต่อรอบได้

$$\Delta W = \oint F ds = \int_0^{2\pi/\Omega} k\Omega X (\sin \Omega t \cos \Omega t) dt + \int_0^{2\pi/\Omega} c\Omega^2 X^2 \cos^2 \Omega t dt \quad (61)$$

เมื่อทำการหาค่าอินทิกรัลในสมการ (61) พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับสมการ (37) คือ

$$\Delta W = c\Omega\pi X^2 \quad (62)$$

จากนั้น ให้พิจารณาแบบจำลองของระบบสปริง-ตัวหน่วงจากวัสดุยืดหยุ่นหรือแบบเชิงโครงสร้าง (Spring-material or spring-structural damper system) ภายใต้แรงกระทำ $F(t)$ ดังแสดงในรูปที่ 11



รูปที่ 11 แบบจำลองการสั่นแบบถูกบังคับของระบบสปริง-ตัวหน่วงเชิงโครงสร้าง

กำหนดให้ h เป็นค่าคงที่ของการหน่วงแบบฮิสเทอเรซิส (Hysteresis damping constant) และให้แรงหน่วงแบบฮิสเทอเรซิสแทนด้วย $f_d(t)$ โดยมีความสัมพันธ์ คือ

$$f_d(t) = h\dot{x}/\Omega \quad (63)$$

จากการเปรียบเทียบระหว่างสมการ (1:[1]) และสมการ (63) ข้างต้น จึงสรุปได้ว่า

$$c = h/\Omega \quad (64)$$

เนื่องจากการสูญเสียพลังงานต่อรอบเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่ากำลังสองของขนาดการสั่น (X^2) ดังนั้น

$$\Delta W = \alpha X^2 \quad (65)$$

โดยที่ α เป็นค่าคงที่และมีหน่วยเป็นแรงต่อการกระจัด อีกทั้งยังมีความเป็นอิสระกับค่าความถี่ของการสั่นแบบฮาร์มอนิก (Independent of Ω)

บนหลักการของการหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าโดยทำการพิจารณาสมการ (37) หรือสมการ (62) และสมการ (65) จึงได้ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าดังนี้ คือ

$$c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi\Omega} \quad (66)$$

เมื่อแทนสมการ (66) สำหรับค่า $c_{eq} = c$ ลงในสมการ (64) จึงได้

$$\alpha = \pi h \quad (67)$$

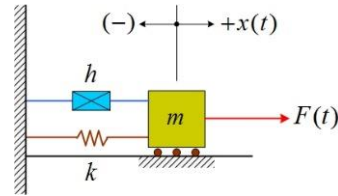
ดังนั้นแล้ว สมการ (65) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\Delta W = \pi h X^2 \quad (68)$$

เช่นนี้แล้ว การวิเคราะห์การสั่นแบบอิสระที่มีการหน่วงเชิงโครงสร้างจึงสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่มีการหน่วงแบบหนืด [1] โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าตามสมการ (66)

4.2 การสั่นแบบถูกบังคับที่มีการหน่วงเชิงโครงสร้าง

สำหรับการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกทั่วไปของแบบจำลองระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงเชิงโครงสร้างภายใต้การสั่นแบบถูกบังคับด้วยแรง $F(t)$ แสดงได้ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12 แบบจำลองการสั่นแบบถูกบังคับของระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงเชิงโครงสร้าง

เมื่อพิจารณาสมดุลเชิงพลวัตของวัตถุแข็งเกร็งตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน พบว่า สมการสำหรับการเคลื่อนที่ของระบบนี้ คือ

$$m\ddot{x} + f_d(t) + f_s(t) = F(t)$$

กำหนดให้แรง $F(t)$ มีรูปแบบเป็นดังสมการ (37:[1]) โดยสมมติให้ $\psi = 0$ จากนั้น ให้แทนที่สมการ (67) ลงในสมการ (63) สำหรับ $f_d(t)$ และแทนสมการ (2:[1]) สำหรับ $f_s(t)$ ลงในสมการควบคุมการเคลื่อนที่ข้างต้น จึงได้

$$\ddot{x} + (\alpha/\pi\Omega)\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} \quad (69)$$

เมื่อการเคลื่อนที่มีรูปแบบฮาร์มอนิก ดังนั้นแล้ว การตอบสนองแบบสภาวะคงตัวของระบบแทนได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$x(t) = X e^{i\Omega t} \quad (70)$$

โดยการแทนสมการ (70) ลงในสมการ (69) และทำการจัดรูปใหม่ได้

$$m\ddot{x} + k(1+i\eta)x = F_0 e^{i\Omega t} \quad (71)$$

ในที่นี้ $k(1+i\eta)$ เรียกว่า ค่าความแกร่งของสปริงเชิงซ้อน (Complex spring stiffness) และกำหนดให้

$$k^* = k(1+i\eta) \quad (72)$$

และเรียกค่า η นี้ใหม่ว่า ตัวประกอบการสูญเสียเชิงโครงสร้าง (Structural loss factor) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\eta = h/k \quad (73)$$

จากการพิจารณาสมการ (5:[1]) สมการ (56) และสมการ (73) พบว่า

$$h = c\sqrt{k/m} \text{ เมื่อ } \Omega = \omega \quad (74)$$

ในการหาค่าการหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าสำหรับกรณีนี้สามารถทำได้ด้วยการพิจารณาสมการ (66) สมการ (67) และสมการ (73) จึงได้

$$c_{eq} = k\eta/\Omega = h/\Omega \quad (75)$$

ซึ่งค่า η สามารถหาได้จากการทดลองผ่านการพิจารณาวงรอบฮิสเทอเรซิส

ดังนั้น ค่าอัตราส่วนการหน่วงแบบหนืดเทียบเท่า (ζ_{eq}) จึงหาได้ด้วยการใช้สมการ (5:[1]) และสมการ (75) เมื่อกำหนดให้ $\Omega = \omega$ เช่นกัน คือ

$$\zeta_{eq} = \eta/2 = h/2k \text{ เมื่อ } \Omega = \omega \quad (76)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (76) ตัวประกอบการสูญเสียเชิงโครงสร้าง (η) มีค่าเป็น 2 เท่าของค่าอัตราส่วนการหน่วงแบบหนืดเทียบเท่า (ζ_{eq}) ที่มีพฤติกรรมตอบสนองแบบกำทอน (Resonant response) ในทำนองเดียวกับสมการ (56)

เมื่อทราบค่าอัตราส่วนการหน่วงแบบหนืดเทียบเท่าของระบบที่

มีการหน่วงเชิงโครงสร้าง (รูปที่ 12) จึงสามารถย้อนกลับไปวิเคราะห์ระบบการสั่นแบบถูกบังคับที่มีการหน่วงแบบหนืดปกติทั่วไปที่มีสมการควบคุมการเคลื่อนที่ตามสมการ (3:[1]) โดยแทนที่ ζ ด้วย ζ_{eq} ที่ได้จากสมการ (76)

จากการเลือกใช้สมการ (39:[1]) และกำหนดให้ $\psi = 0$ สำหรับแรง $F(t)$ ซึ่งผลเฉลยเฉพาะ (x_p) ของสมการควบคุมการเคลื่อนที่คือ ผลการตอบสนองแบบสภาวะคงตัวซึ่งมีรูปแบบฮาร์มอนิก ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะจึงเขียนได้เป็น

$$x_p(t) = X \sin(\Omega t - \phi_s) \quad (77)$$

จากนั้น ให้แทนสมการ (77) ลงในสมการ (3:[1]) พร้อมกับแทนที่ ζ ด้วย ζ_{eq} ที่ได้จากสมการ (76) และทำการพิจารณาพจน์ของสัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน $\sin \Omega t$ และ $\cos \Omega t$ ทั้ง 2 ข้างของสมการโดยกำหนดให้มีค่าเท่ากัน ดังนั้น ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$X[(\omega^2 - \Omega^2) \cos \phi_s + 2\omega\zeta_{eq}\Omega \sin \phi_s] = f_0 \quad (78)$$

$$X[(\omega^2 - \Omega^2) \sin \phi_s - 2\omega\zeta_{eq}\Omega \cos \phi_s] = 0 \quad (79)$$

ทำการแก้สมการ (78) และสมการ (79) เพื่อหาค่า X และ ϕ_s พบว่า

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega\zeta_{eq}\Omega)^2}} \quad (80)$$

$$\phi_s = \tan^{-1} \left(\frac{2\omega\zeta_{eq}\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \quad (81)$$

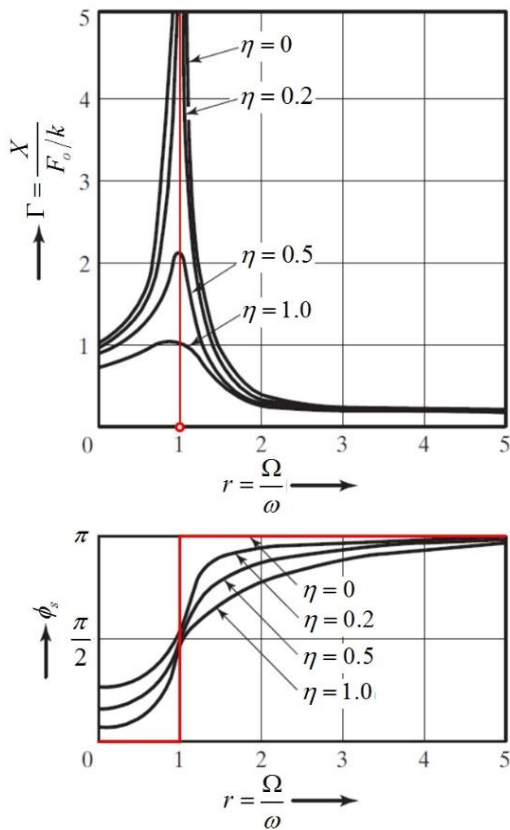
เมื่อพิจารณาสมการ (41:[1]) สมการ (49:[1]) และสมการ (51:[1]) ร่วมกับการใช้สมการ (80) และสมการ (81) โดยภายหลังการจัดรูปสมการจึงได้ตัวประกอบขยาย Γ (Magnification factor) และ ϕ_s ดังต่อไปนี้

$$\Gamma = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta_{eq}r)^2}} \quad (82)$$

$$\phi_s = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_{eq}r}{1-r^2} \right) \quad (83)$$

โดยที่

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{2\omega m} = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{mk}} \quad (84)$$



รูปที่ 13 การแปรเปลี่ยนค่าตัวประกอบขยาย Γ และมุม ϕ_s ตามอัตราส่วนความถี่ r และตัวประกอบ (สัมประสิทธิ์) การสูญเสียพลังงาน η

จากการใช้สมการ (84) สำหรับ ζ_{eq} สมการ (75) สำหรับ c_{eq} สมการ (51:[1]) สำหรับ r และสมการ (4:[1]) สำหรับ ω ดังนั้นสมการ (82) และสมการ (83) จึงเขียนได้เป็น

$$\Gamma = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \eta^2}} \quad (85)$$

$$\phi_s = \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{1-r^2} \right) \quad (86)$$

ผลลัพธ์เชิงรูปภาพสำหรับสมการ (85) และสมการ (86) แสดงในรูปที่ 13 เมื่อมีการแปรเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ r และ η

5. การวิเคราะห์และอภิปราย

จากผลการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นของระบบที่มี 1 ดีกรีอิสระ (SDOF systems) ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์แบบแม่นยำตรง (Exact analytical method) และสามารถได้สมการรูปแบบปิด (Closed-form expression) สำหรับปริมาณที่สนใจศึกษาจึงสามารถทำการวิเคราะห์และอธิบายแปลความหมายของพฤติกรรมการตอบสนองได้อย่างครอบคลุมจากสมการผลลัพธ์ของปริมาณนั้นๆ โดยปราศจากผลการคำนวณเชิงตัวเลขซึ่งเป็นจุดเด่นสำคัญของวิธีการเชิงวิเคราะห์นี้

5.1 การสั่นของระบบที่มีการหน่วงแบบคูลอมบ์

คุณลักษณะบางประการที่สังเกตได้จากสมการ (50) และสมการ (53) สำหรับ X และ ϕ_s ตามลำดับ มีดังต่อไปนี้

- (1) ในกรณีนี้ ทั้ง X และ ϕ_s ที่ได้เป็นเพียงค่าการประมาณสำหรับการพิจารณาผลการตอบสนองแบบสภาวะคงตัวที่ใกล้เคียงฮาร์โมนิกเท่านั้น (Steady-state response nearly harmonic) ซึ่งอยู่ภายใต้เงื่อนไขดังระบุในสมการ (51) ทั้งนี้ เนื่องมาจากสมการ (33) นั้นเป็นสมการอนุพันธ์ไร้เชิงเส้นสอดคล้องตามลักษณะของแรงเสียดทานซึ่งเป็นแรงแบบไม่อนุรักษ์ (Non-conservative force)
- (2) พฤติกรรมของ X และ ϕ_s มีความแตกต่างอย่างชัดเจนเมื่อทำการเปรียบเทียบกับระบบที่มีการหน่วงแบบหนืด (Viscously damped systems) โดยพิจารณาได้จากรูปแบบสมการ (82:[1]) และสมการ (83:[1]) ตามลำดับ
- (3) เมื่อเกิดการกำทอนขึ้น ($r=1$) ขนาดของการสั่น X ที่ได้จากสมการ (50) มีค่าอนันต์ (Infinity) ซึ่งต่างไปจากกรณีของระบบที่มีการหน่วงแบบหนืดดังสมการ (79:[1]) และรูปที่ 17:[1]
- (4) เมื่อเกิดการกำทอนขึ้น ($r=1$) ค่าของมุมเฟส ϕ_s มีความไม่ต่อเนื่องที่ $\phi_s = 90^\circ$ ซึ่งแตกต่างไปจากกรณีของการหน่วงแบบหนืดดังแสดงในรูปที่ 18:[1]
- (5) สำหรับสมการ (50) และสมการ (53) ให้ค่าประมาณที่ดี

(Good approximation) ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขของสมการ (51) นั้นเป็นจริง

5.2 การสั่นของระบบที่มีการหน่วงแบบเชิงโครงสร้าง

คุณลักษณะบางประการที่สามารถสังเกตได้จากระบบที่มีการหน่วงเชิงโครงสร้างในพจน์ของ Γ และ ϕ_r เมื่อเปรียบเทียบกับระบบที่มีการหน่วงแบบหนืด มีดังนี้

- (1) หากพิจารณาสมการ (85) พบว่า ขนาดการสั่นมากที่สุด (Maximum vibration amplitude) ปรากฏเมื่อ $r=1$ ในทุกๆ ค่าของ η ดังนี้

$$\Gamma_{\max} = \frac{1}{\eta} \text{ เมื่อ } r=1 \quad (87)$$

โดยพิจารณาได้จากรูปที่ 13 ซึ่งมีความแตกต่างไปจากกรณีของระบบที่มีการหน่วงแบบหนืดดังรูปที่ 17:[1]

- (2) หากระบบที่พิจารณามีค่าการหน่วงเชิงโครงสร้างที่มีปริมาณน้อย ๆ (Small structural damping) พบว่า เส้นโค้งการตอบสนองดังรูปที่ 13 มีความคล้ายคลึงกับกรณีของการหน่วงแบบหนืดและเริ่มมีความแตกต่างเมื่อ η มีค่าเพิ่มมากขึ้น (η increases) โดยค่ามากที่สุดของ Γ (Maximum Γ) ปรากฏเมื่อ $\Omega = \omega$ ขณะที่ค่ามากที่สุดของ Γ ในกรณีของการหน่วงแบบหนืดปรากฏเมื่อ $\Omega < \omega$
- (3) หากทำการทดสอบค่ามุมเฟส ϕ_r พบว่า การตอบสนองของระบบที่มีการหน่วงเชิงโครงสร้างไม่มีการร่วมเฟส (Not in-phase) กับแรงกระทำจากภายนอก $F(t)$ ซึ่งไม่เป็นจริงสำหรับการหน่วงแบบหนืด
- (4) จากการพิจารณาสมการ (86) โดยกำหนดให้ $\Omega = 0$ พบว่า มุมเฟส (ϕ_r) มีค่าเท่ากับ $\tan^{-1} \eta$ ในกรณีการหน่วงเชิงโครงสร้าง ขณะที่มุม ϕ_r มีค่าเป็นศูนย์ ($\phi_r = 0$) เมื่อ $\Omega = 0$ ในกรณีการหน่วงแบบหนืดซึ่งเป็นการชี้ให้เห็นว่าการตอบสนองของระบบที่มีการหน่วงเชิงโครงสร้างนั้นไม่มีการร่วมเฟสกับแรงกระทำจากภายนอก $F(t)$
- (5) ผลเฉลยเฉพาะ (x_p) หรือผลการตอบสนองแบบสภาวะคงตัวของสมการ (71) สามารถเขียนได้ในรูปแบบดังต่อไปนี้ คือ [20]

$$x(t) = (A - Bi)e^{i\Omega t} = (A^* + B^*i)e^{i\Omega t} \quad (88)$$

- (6) ผลเฉลยเฉพาะ (x_p) ของสมการ (71) อาจทำการเขียนได้ใหม่ให้อยู่ในอีกรูปแบบดังนี้ [20]

$$x(t) = \frac{F_0 e^{i\Omega t}}{k(1 - r^2 + i\eta)} \quad (89)$$

- (7) การเทียบเท่ากันระหว่างระบบที่มีการหน่วงเชิงโครงสร้างและระบบที่มีการหน่วงแบบหนืดมีความถูกต้องและสามารถใช้ได้ภายใต้เงื่อนไขของกรณีการสั่นภายใต้การกระตุ้นจากภายนอกที่มีรูปแบบเป็นฮาร์มอนิกเท่านั้น

6. บทสรุป

เนื่องจากการวิเคราะห์การสั่นของระบบที่มีการหน่วงแบบคูลอมบ์และแบบเชิงโครงสร้างมีความแตกต่างและซับซ้อนไปจากระบบที่มีการหน่วงแบบหนืดทั่วไป [1] อาทิเช่น สาเหตุและกลไกของการเกิดการหน่วงที่มีคุณลักษณะเฉพาะเจาะจงรวมไปถึงสมการควบคุมการเคลื่อนที่ของระบบและพฤติกรรมการตอบสนองต่อการสั่นแม้ว่าระบบที่พิจารณานั้นเป็นระบบที่มีเพียง 1 ดีกรีอิสระก็ตาม สำหรับระบบที่มีการใช้งานในทางปฏิบัติซึ่งโดยส่วนใหญ่เป็นระบบต่อเนื่อง (Continuous or distributed system) [22,23] ที่มีหลายองค์ประกอบเชิงโครงสร้างมายึดโยงเข้าด้วยกันและมีดีกรีอิสระจำนวนมากนั้นค่าดังตัวอย่างเช่น โครงสร้างอาคารและสะพานในงานวิศวกรรมโยธาซึ่งมีองค์อาคารเชิงโครงสร้างจำนวนมากและมีพฤติกรรมและวัสดุที่ใช้แตกต่างกัน เมื่อต้องการวิเคราะห์พฤติกรรมการตอบสนองต่อการสั่นของระบบดังกล่าวจึงจำเป็นต้องสร้างแบบจำลองให้เป็นระบบย่อยที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete or lumped system) โดยมีดีกรีอิสระจำนวนจำกัดที่เพียงพอในการเป็นตัวแทนของระบบจริงบนพื้นฐานของความเข้าใจในการจำลองโครงสร้างของระบบที่ถูกต้องและเหมาะสมตามพฤติกรรม ดังนั้น บทความนี้จะนำเสนอการศึกษาการสั่นแบบอิสระและแบบถูกบังคับของระบบที่มี 1 ดีกรีอิสระภายใต้การหน่วงแบบคูลอมบ์และการหน่วงเชิงโครงสร้างด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์อย่างละเอียดและครอบคลุมเพื่อให้เข้าใจถึงพฤติกรรมการตอบสนองโดยสามารถใช้เป็นแนวทางในสร้างแบบจำลองในการวิเคราะห์ระบบที่มีความซับซ้อนได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง

เอกสารอ้างอิง

- [1] P. Posayanant, W. Wongwanishwatana, P. Premthamkorn and Y. Sompornjaroensuk, "Vibration responses for SDOF system: I – Free and forced vibrations with and without damping," *Eng. Trans. MUT*, 2025, paper submitted for publication. (in Thai)
- [2] W.T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*, 4th Edition, Chapman & Hall, London, 1993.
- [3] S.S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 3rd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1995.
- [4] D.J. Inman, *Engineering Vibration*, 2nd Edition, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 2001.
- [5] W.J. Bottega, *Engineering Vibrations*, Taylor & Francis Group, LLC., Boca Raton, 2006.
- [6] S. Raynor and E. Frank, "Method of computation of damped resonance frequencies for a system of equal masses, equal spring constants, and equal viscous-damping coefficients," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 39, no.2, pp. 269-271, 1966.
- [7] A.E. Anuta, "The modal equations with viscous damping," *Comput. Struct.*, vol. 41, no. 4, pp. 621-627, 1991.
- [8] M.I. Friswell and A.W. Lees, "Resonance frequencies of viscously damped structures," *J. Sound Vib.*, vol. 217, no. 5, pp. 950-959, 1998.
- [9] M. Gurgoze and N.A. Hizal, "Viscously damped mechanical systems subject to several constraint equations," *J. Sound Vib.*, vol. 229, no. 5, pp. 1264-1268, 2000.
- [10] M. Gurgoze, "Receptance matrices of viscously damped systems subject to several constraint equations," *J. Sound Vib.*, vol. 230, no. 5, pp. 1185-1190, 2000.
- [11] M. Gurgoze, "Viscously damped linear systems subjected to damping modifications," *J. Sound Vib.*, vol. 245, no. 2, pp. 353-362, 2001.
- [12] M. Gurgoze, "Non-proportionally damped systems subjected to damping modification by several viscous dampers," *J. Sound Vib.*, vol. 271, pp. 441-452, 2004.
- [13] M. Gurgoze, "On various eigenvalue problem formulations for viscously damped linear mechanical systems," *Int. J. Mech. Eng. Educ.*, vol. 33, no. 3, pp. 235-243, 2005.
- [14] J.P. Den Hartog, "Forced vibrations with combined viscous and Coulomb damping," *Lond. Edinb. Phil. Mag.*, vol. 9, no. 59, pp. 801-817, 1930.
- [15] G.C.K. Yeh, "Forced vibrations of a two-degree-of-freedom system with combined Coulomb and viscous damping," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 39, no.1, pp. 14-24, 1966.
- [16] P.-C. Chen and W.W. Soroka, "Correlation technique for transient response of a hysteretically-damped dynamic system to stationary random excitation," *J. Sound Vib.*, vol. 22, no. 1, pp. 75-79, 1972.
- [17] S.F. Masri, "Forced vibration of the damped bilinear hysteretic oscillator," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, no.1, pp. 106-112, 1975.
- [18] L.Y. Chen, J.T. Chen, C.H. Chen and H.-K. Hong, "Free vibration of a SDOF system with hysteretic damping," *Mech. Res. Commun.*, vol. 21, no. 6, pp. 599-604, 1994.
- [19] L. Meirovitch, *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1997.
- [20] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 2006.
- [21] J.J. Tuma, *Engineering Mathematics Handbook*, 2nd, Enlarged and Revised Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- [22] S.S. Rao, *Vibration of Continuous System*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2007.
- [23] A.W. Leissa and M.s. Qatu, *Vibrations of Continuous Systems*, McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 2011.



ปวริศ โปษะนันท์ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร และปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาเอกในสถาบันเดียวกัน มีประสบการณ์ทางวิชาชีพเกี่ยวกับการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างอาคารขนาดใหญ่ โครงสร้างทางชลศาสตร์ เชื้อเพลิงและประตุน้ำขนาดใหญ่ภายใต้ผลของแรงสั่นสะเทือน

แผ่นดินไหวและโครงสร้างงานระบบเฉพาะทางเช่น โครงสร้างระบบท่อส่งลำเลียงของเหลวหรือน้ำมันและโครงสร้างรองรับระบบบีโตรเคมี มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่องกลศาสตร์การคำนวณเชิงโครงสร้าง การวิเคราะห์โครงสร้างบนพื้นฐานของวิธีการปัญหาค่าปริศนและการสร้างแบบจำลองโครงข่ายใยประสาทเทียม



วิเทศ วงศ์วานิชวัฒนา สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย (AIT) School of Engineering and Construction และเริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2537 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำและตัวเลขและการจัดการงานก่อสร้าง



ดร.ประกิจ เปรมธรรมกร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา จาก Texas A&M University ทำงานเป็นอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2538 มีความสนใจศึกษางานวิจัยทางด้านเสถียรภาพของโครงสร้างและโครงสร้างเพื่อความปลอดภัยสำหรับถนน



ผศ.ดร.ยศ สมพรเจริญสุข สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมโครงสร้าง) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2550 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์การแตกหัก กลศาสตร์การสัมผัส และกลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำ

ตรงและตัวเลข