

จำนวนและฟังก์ชันเชิงซ้อนและการวิเคราะห์ฮาร์มอนิกที่เกี่ยวข้องกับ  
ระบบการสั่นสะเทือนเชิงกลและเชิงโครงสร้าง  
**Complex Numbers and Functions and Harmonic  
Analysis Involving Mechanical and Structural  
Vibration System**

ปวริศ โปษะนันท์<sup>1</sup> วิษเณศ วงศ์วานิชวัฒนา<sup>2</sup> ประกิจ เปรมธรรมกร<sup>3</sup> และยศ สมพรเจริญสุข\*

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา สถาบันวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยีอุตสาหกรรม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร 140 ถนนเชื่อมสัมพันธ์ แขวงกระทุ่มราย เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: 661900031@mut.ac.th<sup>1</sup>, wikhanes@gmail.com<sup>2</sup>, pprakit@mut.ac.th<sup>3</sup>,

\*Corresponding author: Email: syosyos@mut.ac.th

Manuscript Received May 16, 25025

Revised July 4, 2025

Accepted October 7, 2025

#### บทคัดย่อ

เป้าประสงค์ของบทความวิชาการนี้คือ เพื่อทบทวนและสรุปพื้นฐานของจำนวนและฟังก์ชันเชิงซ้อนรวมถึงการวิเคราะห์ฮาร์มอนิกที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของระบบเชิงกลและระบบโครงสร้าง เนื่องจากความซับซ้อนในการวิเคราะห์ระบบที่ใช้ในงานในทางปฏิบัติจึงได้แสดงตัวอย่างการสร้างแบบจำลองย่อยซึ่งเหมาะสำหรับการวิเคราะห์ระบบต่อเนื่องที่ซับซ้อน

**คำสำคัญ:** จำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชันเชิงซ้อน การวิเคราะห์ฮาร์มอนิก ระบบเชิงกล ระบบโครงสร้าง การสั่นสะเทือน แบบจำลองย่อย ระบบต่อเนื่อง

#### ABSTRACT

*The purposes of the present academic paper are to review and summarize the basic of complex numbers and functions including the harmonic analysis as necessary that involved to analyze the vibration of*

*mechanical and structural systems. Because of a complexity in analyzing the practical used systems example of discrete modelling is thus demonstrated, which is suitable for analyze a complex continuous system.*

**Keywords:** Complex Numbers, Complex Functions, Harmonic Analysis, Mechanical System, Structural System, Vibration, Discrete Model, Continuous System

#### 1. บทนำ

หลากหลายปัญหาในเชิงกายภาพและเชิงวิศวกรรมสามารถจำลอง วิเคราะห์และหาคำตอบ (ผลเฉลย) ของปัญหาด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงซ้อน (Complex analysis) [1-2] โดยการประยุกต์ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและจำนวนเชิงซ้อน เช่น การศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า (Electric circuits) ไฟฟ้าสถิต (Electrostatics) การไหลของของไหล (Fluid flow) อุทกพลศาสตร์ (Hydrodynamics) การนำความร้อน (Heat conduction) หรือการวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือนเชิงกลหรือเชิงโครงสร้าง (Mechanical or structural vibrating systems) เป็นต้น [3]

เมื่อพิจารณาปัญหาการสั่นสะเทือน [4-8] พบว่า จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers) สามารถปรากฏขึ้นได้จากการวิเคราะห์หาผลเฉลยของสมการควบคุมการเคลื่อนที่ (Motion governing equation) ซึ่งส่วนใหญ่มีรูปแบบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) โดยเป็นผลมาจากการผ่านขั้นตอนของสมการลักษณะเฉพาะทางพีชคณิต (Algebraic characteristic equation) [7]

หากพิจารณาในมุมมองทางด้านวิศวกรรมโยธา (Civil engineering viewpoints) โครงสร้างเมื่ออยู่ภายใต้การสั่นสะเทือนเนื่องจากผลของการกระตุ้นจากภายนอก เช่น โครงสร้างอาคารที่พักอาศัย อาคารสำนักงาน หรือโครงสร้างอาคารสาธารณูปโภคพื้นฐานที่มีความสำคัญต่างๆ ภายใต้ผลของแรงลม (Wind load) หรือแรงสั่นสะเทือนจากแผ่นดินไหว (Seismic load) อาจส่งผลกระทบต่อตรงต่อชีวิตและทรัพย์สินรวมถึงสมรรถภาพและประสิทธิภาพในการใช้งานเชิงโครงสร้าง ดังนั้นแล้ว ถ้าพิจารณาการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีการเชิงสถิต (Static analysis) โดยพิจารณาแรงดังกล่าวที่แปรตามเวลาเสมือนให้เป็นแรงสถิตเทียบเท่า (Equivalent static load) อาจมีความไม่เหมาะสมหรือไม่สอดคล้องต่อพฤติกรรมเชิงโครงสร้างที่เกิดขึ้นจริงที่นำไปใช้ในการออกแบบโครงสร้างเพื่อต้านทานแรงที่มากระทำจึงจำเป็นต้องวิเคราะห์ด้วยวิธีการเชิงพลศาสตร์ (Dynamic analysis) [9-11] ซึ่งการวิเคราะห์ระบบโครงสร้างอาคารในทางปฏิบัตินั้น ส่วนใหญ่เป็นโครงสร้างที่มีขนาดใหญ่โดยมีหลายองค์ประกอบมาประกอบกันอย่างต่อเนื่องที่มีความซับซ้อน จึงจำเป็นต้องจำลองโครงสร้างให้เป็นระบบย่อยไม่ต่อเนื่องอย่างเหมาะสมแทนที่โครงสร้างจริงเพื่อสะดวกในการวิเคราะห์ในลำดับถัดไป

หลักการจำลองให้เป็นระบบย่อย (Discrete or lumped system) ที่มีหลายดีกรีอิสระจำนวนจำกัด (Multidegree of freedom: MDOF) มีพื้นฐานแนวคิดแรกเริ่มมาจากการพิจารณาแบบอย่างง่ายที่มี 1 ดีกรีอิสระ (Single degree of freedom) หรือมีตัวแปรที่ไม่รู้ค่า (Unknown) เพียง 1 ค่า [12], [13] ดังนั้น ในกรณีของการวิเคราะห์ระบบ MDOF จึงเป็นการแก้หาตัวไม่ทราบค่าจำนวน  $n$  ค่า ที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการแมทริกซ์ (Matrix equation) [14] โดยมีความสะดวกในการจัดการและดำเนินการคำนวณหาคำตอบทางคณิตศาสตร์

สำหรับบทความนี้มีวัตถุประสงค์ในการทบทวนและสรุปเนื้อหา

ความรู้เรื่องจำนวนและฟังก์ชันเชิงซ้อนและการวิเคราะห์ฮาร์มอนิกเฉพาะเท่าที่จำเป็นและเกี่ยวข้องในการประยุกต์และวิเคราะห์ปัญหา โดยมุ่งเน้นปัญหาการสั่นสะเทือนของระบบเชิงกลหรือระบบโครงสร้างพร้อมทั้งแสดงตัวอย่างการจำลองระบบเพื่อการวิเคราะห์

## 2. จำนวนและฟังก์ชันเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน ( $z$ ) มีนิยามและแสดงอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$z = a + bi \quad (1)$$

โดยที่  $a$  คือ จำนวนจริง (Real number) และเรียกว่า ส่วนจริงของ  $z$  (Real part of  $z$ )  $b$  คือ จำนวนจริงและเรียกว่า ส่วนจินตภาพของ  $z$  (Imaginary part of  $z$ ) และ  $i = \sqrt{-1}$  [1-3]

จากการพิจารณาสมการ (1) จึงเขียนองค์ประกอบ (Components) ของ  $z$  ได้ดังนี้

$$\text{Re } z = a \quad (2)$$

$$\text{Im } z = b \quad (3)$$

สำหรับคู่สังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate) ของ  $z$  แทนด้วย  $z^c$  และมีนิยาม คือ

$$z^c = a - bi \quad (4)$$

ดังนั้น พบว่า

$$z + z^c = 2a \quad (5)$$

$$z - z^c = 2bi \quad (6)$$

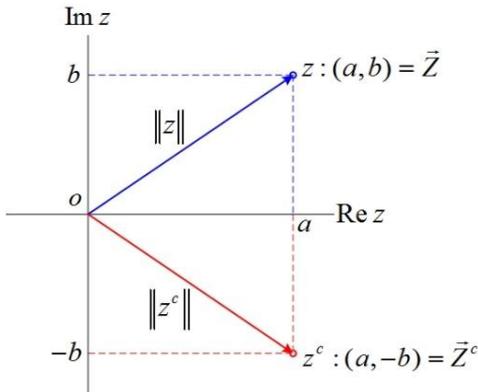
เมื่อทำการเขียนสมการ (5) และสมการ (6) ใหม่ในพจน์ของ  $z$  และ  $z^c$  จึงได้

$$\text{Re } z = a = (z + z^c)/2 \quad (7)$$

$$\text{Im } z = b = (z - z^c)/2i \quad (8)$$

จำนวน  $z$  และคู่สังยุค  $z^c$  สามารถแทนในรูปแบบเวกเตอร์ (Vector form) คือ

$$\vec{Z} = z = (a, b)$$



รูปที่ 1 ระนาบเชิงซ้อนแสดงตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อน

$$\vec{Z}^c = z^c = (a, -b) \quad (10)$$

โดย  $z$  และ  $z^c$  คือ จุดพิกัด (Coordinates) บนระนาบเชิงซ้อน (Complex plane) ดังแสดงในรูปที่ 1

### 3. คุณสมบัติและการดำเนินการทางเลขคณิต

คุณสมบัติที่มีประโยชน์มาก (Useful property) ของจำนวนเชิงซ้อน คือ ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) หรือเรียกว่า มอดูลัส (Modulus) หรือ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อน (Magnitude of complex number) และแทนด้วย  $\|z\|$  ซึ่งมีความหมายเป็นระยะทางที่วัดจากจุดเริ่มต้น (Origin) ไปสู่จุดพิกัด  $z$  ดังนั้น จากนิยามในสมการ (1) และ (4) จึงได้ [3], [15]

$$|\vec{Z}| = \|z\| = \text{mag}(z) = \|a + bi\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |\vec{Z}^c| &= \|z^c\| = \text{mag}(z^c) = \|a - bi\| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (12)$$

ทั้งนี้ สัญลักษณ์  $|\cdot|$  ใช้สำหรับค่าจริง (Real-valued) ของจำนวนจริงหรือฟังก์ชันจำนวนจริง (Real numbers or functions) ส่วน  $\|\cdot\|$  ใช้สำหรับค่าเชิงซ้อน (Complex-valued) ของจำนวนเชิงซ้อนหรือฟังก์ชันเชิงซ้อน (Complex numbers or functions)

ผลคูณระหว่าง  $z$  และ  $z^c$  มีค่าเป็นจำนวนจริงและมีคุณสมบัติ

(9) ดังนี้

$$\begin{aligned} zz^c &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2(-1) \\ zz^c &= a^2 + b^2 = \|z\|^2 = \|z^c\|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

ดังนั้น จากสมการ (11) และสมการ (12) ร่วมกับการใช้สมการ (13) จึงได้ขนาดเป็น

$$\text{mag}(z) = \text{mag}(z^c) = \sqrt{zz^c} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (14)$$

เช่นนี้แล้ว จึงสรุปได้ว่า จำนวนเชิงซ้อนและคู่สังยุคมีค่ามอดูลัสเดียวกัน

กฎต่าง ๆ (Rules) ที่อยู่บนพื้นฐานของเลขคณิตจำนวนจริง (Real arithmetic) สามารถนำมาใช้ได้กับจำนวนเชิงซ้อน โดยกำหนดให้

$$z_1 = c + di \quad \text{และ} \quad z_2 = e + fi \quad (15)$$

ผลบวกระหว่างจำนวนเชิงซ้อน  $z_1$  และ  $z_2$  นิยามได้เป็น การแยกการบวกกันระหว่างส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ  $z_1$  และ  $z_2$  ดังนี้

$$z_1 + z_2 = (c + e) + (d + f)i \quad (16)$$

การคูณจำนวนเชิงซ้อน ( $z$ ) ด้วยจำนวนจริง ( $\beta$ ) ใดๆ มีผลลัพธ์คือ

$$\beta z = \beta(a + bi) = \beta a + \beta bi \quad (17)$$

สำหรับผลคูณระหว่างจำนวนเชิงซ้อน  $z_1$  และ  $z_2$  สามารถพิจารณาได้เป็น

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (c + di)(e + fi) = ce + cfi + dei - df \\ &= (ce - df) + (cf + de)i \end{aligned} \quad (18)$$

โดยที่ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ  $z_1 z_2$  คือ

$$\text{Re}(z_1 z_2) = (ce - df) \quad (19)$$

$$\text{Im}(z_1 z_2) = (cf + de) \tag{20}$$

ในการหาขนาดของ  $z_1 z_2$  ทำได้โดยใช้นิยามจากสมการ (11) จึงได้

$$\text{mag}(z_1 z_2) = \sqrt{(ce - df)^2 + (cf + de)^2} \tag{21}$$

ส่วนกลับของจำนวนเชิงซ้อน  $z$  เขียนแทนได้ด้วย  $z^{-1} = 1/z$  โดยมีเงื่อนไขเมื่อ  $z \neq 0$  ดังนี้

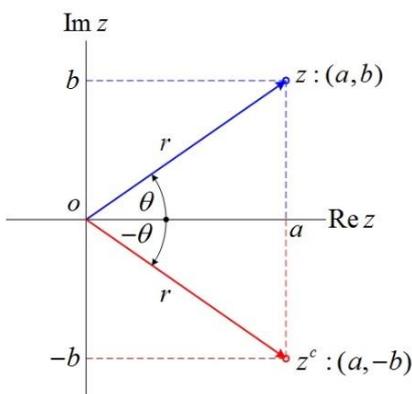
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = (a + bi)^{-1} \tag{22}$$

เช่นนี้แล้ว ผลหารระหว่างจำนวนเชิงซ้อน  $z_1$  และ  $z_2$  เมื่อ  $z_2 \neq 0$  คือ

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (c + di)(e + fi)^{-1} \tag{23}$$

เมื่อทำการเขียนสมการ (23) ขึ้นใหม่ร่วมกับการประยุกต์สมการ (18) จึงได้

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_2} = \frac{z_1 z_2}{(z_2)^2} = \frac{(c + di)(e - fi)}{e^2 + f^2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{e^2 + f^2} [(ce + df) + (de - cf)i] \end{aligned} \tag{24}$$



รูปที่ 2 จำนวนเชิงซ้อนในพิกัดเชิงขั้วบนระนาบเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน  $z$  สามารถแสดงในพจน์ของระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate system) ดังแสดงในรูปที่ 2 เมื่อกำหนดให้  $\theta$  คือ มุมที่วัดอ้างอิงออกจากแกนราบ (Horizontal axis) ไปยังส่วนของเส้นรัศมี ส่วน  $r$  คือ ขนาดความยาวของรัศมีเมื่อวัดจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดพิกัด  $(a, b)$  หรือ  $(a, -b)$

ดังนั้น จึงสามารถเขียนสมการ (1) และสมการ (4) ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้เป็น

$$z = a + bi = r(\cos \theta + \sin \theta i) \tag{25}$$

$$z^c = a - bi = r(\cos \theta - \sin \theta i) \tag{26}$$

เมื่อ

$$a = r \cos \theta \text{ และ } b = r \sin \theta \tag{27}$$

โดยที่

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z z^c} = \|z\| = \|z^c\| \tag{28}$$

$$\theta = \tan^{-1}(b/a) \tag{29}$$

หลังจากนั้น ให้ทำการกระจายพจน์  $\cos \theta$  และ  $i \sin \theta$  ให้อยู่ในรูปแบบอนุกรม (Series) ต่อไปนี้ [15]

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \dots \\ &= 1 + (i\theta)^2/2! + (i\theta)^4/4! + \dots \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} i \sin \theta &= i[\theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \dots] \\ &= i\theta + (i\theta)^3/3! + (i\theta)^5/5! + \dots \end{aligned} \tag{31}$$

เมื่อพิจารณาสมการ (30) และสมการ (31) จึงนำไปสู่เอกลักษณ์

$$\cos \theta + i \sin \theta = 1 + i\theta + (i\theta)^2/2! + (i\theta)^3/3! + \dots = e^{i\theta} \tag{32}$$

$$\cos \theta - i \sin \theta = 1 - i\theta + (i\theta)^2/2! - (i\theta)^3/3! + \dots = e^{-i\theta} \tag{33}$$

หรือ สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 \quad (34)$$

$$\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i \quad (35)$$

โดยที่ ทั้งสมการ (34) และสมการ (35) เรียกว่า สูตรของออยเลอร์ (Euler's formulae) และนอกจากนี้ ยังสามารถแสดงให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic functions) ได้ คือ [15]

$$\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2 \quad (36)$$

$$\sinh \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2 \quad (37)$$

เมื่อทำการประยุกต์สมการ (32) และสมการ (33) ลงในสมการ (25) และสมการ (26) ผลที่ได้ คือ

$$z = a + bi = re^{i\theta} \quad (38)$$

$$z^c = a - bi = re^{-i\theta} \quad (39)$$

สำหรับกฎของการดำเนินการทางเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential operations) ระหว่าง  $z_1 = A_1 e^{i\theta_1}$  และ  $z_2 = A_2 e^{i\theta_2}$  สรุปได้ดังต่อไปนี้ [3]

**การคูณ (Multiplication) :**

$$z_1 z_2 = A_1 A_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (40)$$

**การหาร (Division) :**

$$z_1 / z_2 = (A_1 / A_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{และ } z_2 \neq 0 \quad (41)$$

**การบวก (Addition) :**

$$z_1 + z_2 = A e^{i\theta} \quad (42)$$

เมื่อ

$$A = [A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{1/2} \quad (43)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{A_1 \sin \theta_1 + A_2 \sin \theta_2}{A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2} \right] \quad (44)$$

**การยกกำลัง (Powers) :**

$$z^n = A^n e^{in\theta} \quad (45)$$

$$z^{1/n} = A^{1/n} e^{i\theta/n} \quad (46)$$

จากการสร้างสูตรทางพีชคณิต (Algebraic formulation) สำหรับจำนวนเชิงซ้อนสามารถขยายไปสู่ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนได้ (Complex variable functions) โดยที่ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันเชิงซ้อน (Complex functions) มีอนุพันธ์ที่ต่อเนื่องในทุก ๆ อันดับ (Continuous derivatives of all orders) ณ จุดๆ หนึ่ง แต่ตัวของฟังก์ชันเชิงซ้อนเองอาจไม่สามารถมีอนุพันธ์ก็ได้

ถ้า  $z$  เป็นตัวแปรเชิงซ้อนแล้ว  $f(z)$  เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนด้วยซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$f(z) = u(z) + v(z)i \quad (47)$$

โดย  $u(z)$  และ  $v(z)$  เป็นฟังก์ชันค่าจริง (Real-valued functions)

สำหรับคู่สังยุคของฟังก์ชันเชิงซ้อน (Conjugate of complex function) แทนด้วย  $f^c(z)$  และมีนิยามเป็น

$$f^c(z) = u(z) - v(z)i \quad (48)$$

สูตรต่าง ๆ สำหรับทางเลขคณิต (Arithmetic) ของจำนวนเชิงซ้อนยังคงสามารถประยุกต์ใช้ได้กับฟังก์ชันเชิงซ้อนโดยมีความคล้ายคลึงกัน ดังนั้น

$$\|f(z)\| = \sqrt{u^2(z) + v^2(z)} \quad (49)$$

$$\|f^c(z)\| = \sqrt{u^2(z) + v^2(z)} \quad (50)$$

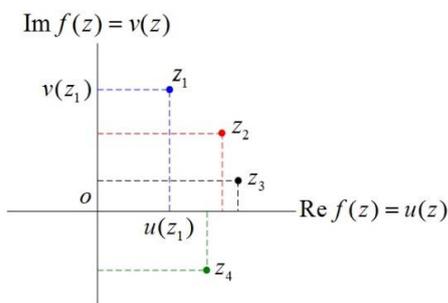
$$f(z)f^c(z) = u^2(z) + v^2(z) \quad (51)$$

$$f(z)f^c(z) = \|f(z)\|^2 = \|f^c(z)\|^2 \quad (52)$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{u^2(z) + v^2(z)} [u(z) - v(z)i] \quad \text{เมื่อ } f(z) \neq 0 \quad (53)$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{f^c(z)}{f(z)f^c(z)} = \frac{f^c(z)}{u^2(z)+v^2(z)} \tag{54}$$

สำหรับการแสดงผลของฟังก์ชันเชิงซ้อนในเชิงรูปภาพ (Graphical representation) นั้นทำได้ยากเนื่องจากทั้งตัวแปร  $z$  และฟังก์ชัน  $f(z)$  ต่างมี 2 มิติ อย่างไรก็ตาม ยังมีอีกแนวทางหนึ่งคือการพล็อตความสัมพันธ์ระหว่าง  $u(z)$  และ  $v(z)$  สำหรับตัวแปร  $z$  ที่แตกต่างกันดังในรูปที่ 3 และเรียกว่า การพล็อตแบบไนควิสต์ (Nyquist plots) [7]



รูปที่ 3 การพล็อตแบบไนควิสต์ (Nyquist plots) สำหรับฟังก์ชันเชิงซ้อน  $f(z)$

#### 4. การวิเคราะห์ฮาร์มอนิก

แม้ว่าการเคลื่อนที่โดยส่วนใหญ่ของระบบที่มีการสั่นสะเทือน (Vibratory systems) ไม่เป็นรูปแบบฮาร์มอนิก (Harmonic motion or vibration) แต่ในหลายกรณี พบว่า การเคลื่อนที่ของระบบมีลักษณะที่เป็นคาบ (Periodic) [4-8] ดังนั้น ฟังก์ชันคาบใดๆ (Periodic functions) ที่มีตัวแปรอิสระซึ่งในที่นี้กำหนดให้เป็นเวลา ( $t$ ) สามารถแสดงอยู่ในรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ได้ (Fourier series) [16,17] โดยให้เป็นผลรวมของพจน์ฟังก์ชัน sine และ cosine ที่มีความสัมพันธ์เป็นแบบฮาร์มอนิก [18] ทั้งนี้ ฟังก์ชันคาบ  $f(t)$  มีคุณสมบัติ คือ  $f(t) = f(t+T)$  เมื่อ  $T$  คือ คาบเวลา (Time period)

ถ้า  $f(t)$  เป็นฟังก์ชันคาบแล้วจึงสามารถแทนให้อยู่ในรูปแบบอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series representation) ดังนี้ [3], [16], [17]

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{55}$$

โดย  $\omega = 2\pi/T$  คือ ค่าความถี่ธรรมชาติมูลฐาน (Fundamental natural frequency) และมีคุณสมบัติ  $\omega_n = n\omega$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$  ส่วน  $a_0, a_n$  และ  $b_n$  คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ (Fourier coefficients) ของฟังก์ชันคาบ  $f(t)$  และสามารถหาค่าได้ด้วยการประยุกต์คุณสมบัติของเงื่อนไขสภาวะตั้งฉาก (Orthogonality conditions) ดังนี้ [3], [15] – [17]

$$\int_0^T \sin n\omega t \sin k\omega t dt = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ T/2, & n = k \end{cases} \tag{56}$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cos k\omega t dt = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ T/2, & n = k \end{cases} \tag{57}$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \sin k\omega t dt = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 0, & n = k \end{cases} \tag{58}$$

โดยที่  $n$  และ  $k$  คือ จำนวนเต็ม (Integer numbers)

เมื่อประยุกต์เงื่อนไขสภาวะตั้งฉากในสมการ (55) จึงได้ค่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ดังต่อไปนี้

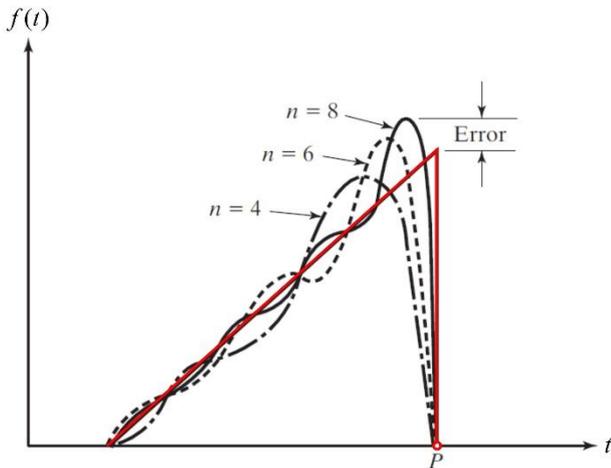
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \tag{59}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt; \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{60}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt; \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{61}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชันที่มีลักษณะเป็นคาบใด ๆ สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic functions) ถึงอย่างไรก็ตาม พบว่า มีปรากฏการณ์สำคัญเรียกว่า ปรากฏการณ์ของกิบส์ (Gibbs phenomenon) [5], [16], [17] โดยมีพฤติกรรมในการประมาณฟังก์ชันใด ๆ ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ที่มีจำนวนพจน์แตกต่างกัน ดังนี้ เมื่อจำนวนพจน์ของอนุกรมที่ใช้มีค่าเพิ่มขึ้น พบว่า สามารถปรับปรุงการประมาณฟังก์ชันให้ได้ใกล้เคียงกับฟังก์ชันเดิม ยกเว้นบริเวณที่อยู่ใกล้กับความไม่ต่อเนื่อง (Discontinuity) ของฟังก์ชัน

(จุด  $P$  บนแกน  $t$ ) ดังแสดงในรูปที่ 4 สำหรับฟังก์ชันสามเหลี่ยม (Triangular function) ซึ่งความคลาดเคลื่อน (Error) ยังคงปรากฏให้เห็นประมาณร้อยละ 10 ถึงแม้ว่าจำนวนพจน์ของอนุกรมที่ใช้เข้าใกล้ค่าอนันต์ ( $n \rightarrow \infty$ ) [5]



รูปที่ 4 ปรากฏการณ์ของกิบส์ (Gibbs phenomenon)

จากสมการ (55) สามารถเขียนให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential functions) หรือ จำนวนเชิงซ้อนได้ด้วยการแทนสูตรของออยเลอร์จากสมการ (34) และสมการ (35) โดยกำหนดให้  $\theta = n\omega t$

$$f(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_n^* e^{-in\omega t}) \tag{62}$$

ในที่นี้  $c_o$ ,  $c_n$  และ  $c_n^*$  คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อน (Complex Fourier coefficients) และให้นิยามในพจน์ของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ค่าจริง (Real-valued Fourier coefficients) ดังต่อไปนี้

$$c_o = \frac{a_o}{2} = \frac{1}{2}(a_o - b_o i) \text{ เมื่อ } b_o = 0 \tag{63}$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) \tag{64}$$

$$c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) \tag{65}$$

จากการพิจารณาสมการ (28) สมการ (29) และสมการ (64)

พบว่า

$$\|2c_n\| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{66}$$

$$\phi = \tan^{-1}(b_n/a_n) \tag{67}$$

สำหรับสมการ (62) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบ คือ

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \tag{68}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \tag{69}$$

เพื่อความสะดวกในการลดขั้นตอนระหว่างการคำนวณหากพบว่า ฟังก์ชัน  $f(t)$  นั้นสามารถเขียนแยกให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันคู่ (Even function) และฟังก์ชันคี่ (Odd function) ได้เป็น

$$f(t) = E(t) + O(t) \tag{70}$$

ซึ่งฟังก์ชันคู่  $E(t)$  มีความเป็นสมมาตร (Symmetric) รอบจุดเริ่มต้นที่  $t=0$  ส่วนฟังก์ชันคี่  $O(t)$  มีความเป็นปฏิสมมาตร (Anti-symmetric) ตามคุณสมบัติต่อไปนี้

$$E(t) = E(-t) \tag{71}$$

$$O(t) = -O(-t) \tag{72}$$

โดยมีคุณสมบัติของค่าอินทิกรัล (Integrals) ที่เป็นประโยชน์ดังนี้ [15] - [17]

$$\int_0^T E(t) \sin n\omega t dt = 0 \tag{73}$$

$$\int_0^T O(t) \cos n\omega t dt = 0 \tag{74}$$

ดังนั้น จำนวนพจน์ที่ปรากฏในอนุกรมฟูเรียร์ตามสมการ (55) และสมการ (62) จึงมีจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขลดลงมาก ส่งผลทำให้ค่าผลรวมของอนุกรมมีอัตราการใช้ (Rate of convergence) ที่เร็วขึ้นเนื่องจากลดปัญหาความคลาดเคลื่อนจาก

การปัดเศษ (Rounded off errors) หากพิจารณาผลของการตัดเศษเดียวกัน (Truncated errors)

5. แนวทางการจำลองระบบ

เนื่องจากบทความนี้ให้ความสนใจศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของระบบ ซึ่งในการจำลองและการวิเคราะห์ระบบสามารถพิจารณาแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทหลัก คือ ระบบต่อเนื่อง (Continuous or distributed parameter systems) [19,20] และระบบย่อยที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete or lumped systems) [12,13]

โดยระบบทั้ง 2 ประเภทนี้มีลักษณะเฉพาะที่ต่างกันซึ่งมีข้อดีและข้อจำกัดดังนี้

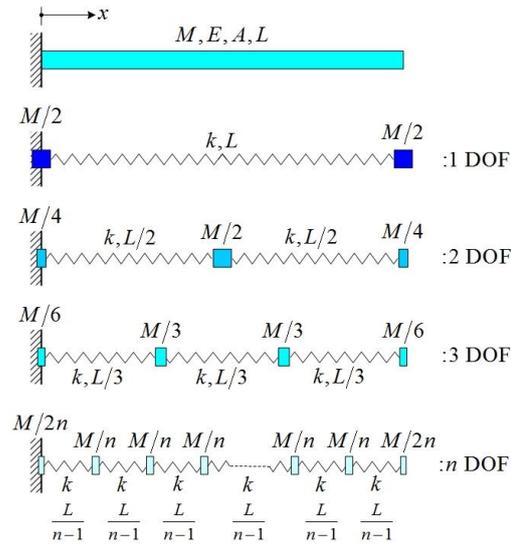
(1) ระบบต่อเนื่องเป็นตัวแทนระบบที่แท้จริงของปัญหาที่สนใจพิจารณาโดยมีจำนวนดีกรีอิสระอนันต์ค่า (Infinite DOFs) ในการวิเคราะห์เริ่มต้นจากการพิจารณาสมการควบคุมการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกส่วน (Partial differential equation: PDE) หากต้องการวิเคราะห์ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ (Analytical methods) ผลลัพธ์ของปริมาณต่างๆ ที่สนใจศึกษาเช่น การตอบสนองต่อการสั่น ความถี่ ขนาดหรือปริมาณของการสั่น เป็นต้น สามารถแสดงให้อยู่ในรูปแบบของสมการรูปแบบปิดได้ (Closed-form expressions) โดยสามารถอธิบายพฤติกรรมได้อย่างครอบคลุมในเชิงกายภาพซึ่งเป็นข้อดีของการจำลองด้วยระบบนี้ อย่างไรก็ตาม พบว่า ระบบในทางปฏิบัติมักเป็นระบบที่มีความซับซ้อนเนื่องจากพฤติกรรมของแต่ละองค์ประกอบรวมถึงวัสดุที่ใช้แตกต่างกันและไม่สามารถทำการหาผลเฉลยหรือหาคำตอบจากสมการ PDE ได้โดยตรง ดังนั้น จึงเป็นข้อจำกัดที่สำคัญในการจำลองและวิเคราะห์ระบบดังกล่าว

(2) ระบบย่อยที่ไม่ต่อเนื่องคือ ระบบที่มีการจำลองและการประมาณระบบจริงที่ต่อเนื่องให้เป็นระบบย่อยๆ ที่มาเชื่อมต่อเข้าด้วยกันทั้งระบบโดยกำหนดให้จำนวนดีกรีอิสระมีจำนวนจำกัด  $n$  ค่า (Finite DOFs or MDOFs) [21-26] ที่สอดคล้องตามจำนวนดีกรีอิสระในแต่ละระบบย่อยซึ่งมีสมการควบคุมการเคลื่อนที่ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equations: ODE) หรือสมการ PDE ในแต่ละระบบย่อยนั้น สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาสามารถแยกพิจารณาสมมูลของการเคลื่อนที่ในแต่ละระบบย่อยและนำไปสู่ระบบสมการสมมูลรวมที่มีจำนวน  $n$  สมการ แสดงในพจน์ของดีกรีอิสระที่ไม่ทราบค่าจำนวน  $n$  ค่า ซึ่งสามารถทำการหาค่ามาได้

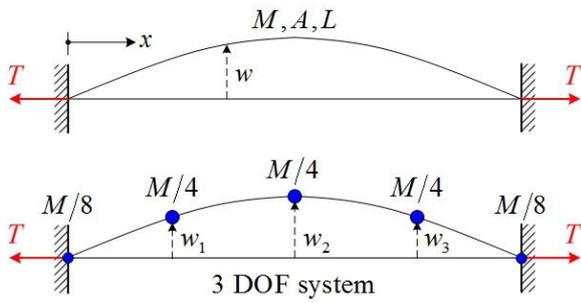
ด้วยระเบียบวิธีการทางคณิตศาสตร์ [14,27] ภายหลังจากการประยุกต์เงื่อนไขค่าเริ่มต้น (Initial conditions) โดยผลลัพธ์สุดท้ายที่ได้คือ ค่าของดีกรีอิสระในแต่ละระบบย่อยทั้งหมดที่ใช้เป็นตัวแทนในการอธิบายพฤติกรรมการตอบสนองของระบบจริง ความแม่นยำถูกต้องของการจำลองด้วยระบบนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนในการแบ่งเป็นระบบย่อยที่เพียงพอเสมือนเป็นตัวแทนของระบบต่อเนื่อง ในปัจจุบัน วิธีการที่สะดวกและเป็นที่ยอมรับในการวิเคราะห์คือ วิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite element method) [28]

รูปที่ 5 แสดงการจำลองระบบต่อเนื่องขององค์อาคารเชิงโครงสร้างภายใต้การสั่นแบบอิสระตามแนวแกน (Axial vibration) ของท่อน (Bar) รับแรงดึงหรือแรงอัดและตัวอย่างสาธิตการจำลองเป็นระบบย่อยที่มีจำนวนดีกรีอิสระแตกต่างกัน  $n$  ค่า ส่วนรูปที่ 6 แสดงปัญหาการสั่นแบบอิสระในแนวขวาง (Transverse vibration) ของเส้นลวด (String) ภายใต้แรงดึงคงที่และทำการจำลองให้เป็นระบบย่อย 3 DOF [20]

รูปที่ 7 ถึง รูปที่ 9 แสดงตัวอย่างในการจำลองระบบย่อยอย่างง่ายเพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นของระบบเชิงกล โดยที่โครงสร้างรวมของรถจักรยานยนต์ในรูปที่ 7 และแท่นรองรับเครื่องจักรในรูปที่ 8 พิจารณาให้เป็นวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid bodies) ส่วนในรูปที่ 9 เป็นกรณีระบบที่ไร้อากาศโดยสมมติให้ฐานของเครนเป็นแบบแข็งเกร็ง (Rigid base) และยึดต่อกับชิ้นส่วนต่างๆ เป็นแบบจุดตรึงหรือจุดยึดแน่น (Fixed points)



รูปที่ 5 ท่อนต่อเนื่องและแบบจำลองย่อยของท่อน 1 2 3 และ  $n$  DOF



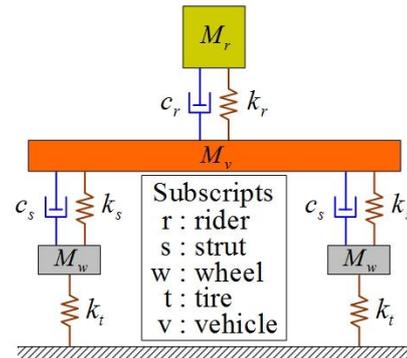
รูปที่ 6 เส้นลวดรับแรงดึงและแบบจำลองระบบย่อย 3 DOF

พิจารณาปัญหาการสั่นแบบอิสระของท่อนรับแรงตามแนวแกน ในรูปที่ 5 เมื่อ  $M E A L$  คือ มวลรวม ค่ายังก์มอดูลัส พื้นที่หน้าตัดและความยาวของท่อนรับแรง ตามลำดับ การจำลองด้วยระบบย่อยทำได้ด้วยการพิจารณาให้เป็นมวลแบบก้อน (Lumped mass) จำนวน  $n+1$  ก้อน ที่มีระยะห่างเท่ากันและเชื่อมต่อกันด้วยสปริงโดยไม่มีการพิจารณามวลของสปริง (Massless spring) ทั้งนี้  $n$  คือ จำนวนดีกรีอิสระของระบบย่อย ในที่นี้ แต่ละค่าคงที่ของสปริงหรือเรียกว่าค่าความแกร่งของสปริง (Spring constant or spring stiffness:  $k$ ) มีค่าเป็น

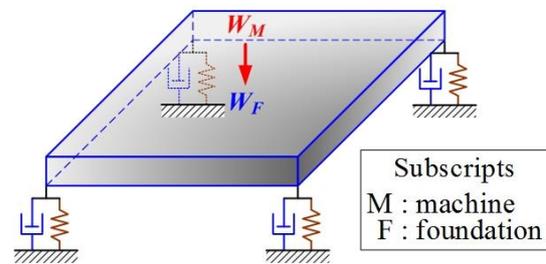
$$k = n(AE/L) \tag{75}$$

สำหรับการสั่นแบบอิสระที่ไร้การหน่วงของท่อนรับแรงตามแนวแกน มีค่าความถี่ธรรมชาติเชิงมุม (Circular natural frequency) คือ  $\omega$  และเมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ไร้หน่วย (Non-dimensional parameter) ของค่าความถี่ธรรมชาติเชิงมุม คือ  $\omega^*$  ซึ่งมีนิยามดังนี้

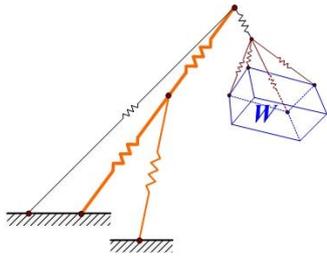
$$\omega^* = \omega \sqrt{ML/AE} \tag{76}$$



รูปที่ 7 ผู้ขับขี่และจักรยานยนต์ (บน) [29] และการจำลองระบบย่อย (ล่าง)



รูปที่ 8 การจำลองระบบย่อยของแท่นรองรับเครื่องจักรหนัก



รูปที่ 9 เครนแบบเคลื่อนที่ (Mobile crane) (บน) [30] และการจำลองระบบย่อย (ล่าง)

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์ไร้หน่วย ( $\omega_m^*$ ) ของระบบย่อยที่มี  $n$  ดิกรีอิสระ ใน 5 รูปแบบแรกของการสั่น

$\omega_m^*$	$m = 1$	2	3	4	5
$n = 1$	1.4142	-	-	-	-
2	1.5307	3.6955	-	-	-
3	1.5529	4.2426	5.7956	-	-
4	1.5607	4.4446	6.6518	7.8463	-
5	1.5643	4.5399	7.0711	8.9101	9.8769
7	1.5675	4.6239	7.4484	9.8995	11.8541
10	1.5692	4.6689	7.6537	10.4500	12.9890
15	1.5701	4.6930	7.7646	10.7510	13.6197
20	1.5704	4.7015	7.8036	10.8576	13.8447
$\infty$ (exact)	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372

กรณีระบบต่อเนื่องของท่อนรับแรงตามแนวแกนที่มีเงื่อนไขที่ปลายทั้ง 2 ข้างดังในรูปที่ 5 มีค่าความถี่ธรรมชาติเชิงมุมในแต่ละรูปแบบการสั่น (Modes of vibration) คือ  $\omega_m$  เมื่อ  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$  คือ ลำดับที่ของรูปแบบการสั่นและสามารถหาได้ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ได้เป็น

$$\omega_m \sqrt{\frac{ML}{AE}} = \frac{(2m-1)\pi}{2} \tag{77}$$

จากการพิจารณาสมการ (76) จึงได้พารามิเตอร์ไร้หน่วย  $\omega_m^*$  ในแต่ละรูปแบบของการสั่นลำดับที่  $m$  คือ [19], [20]

$$\omega_m^* = \frac{(2m-1)\pi}{2} \tag{78}$$

ในกรณีของระบบย่อย  $n$  ดิกรีอิสระ ค่าพารามิเตอร์  $\omega_m^*$  สามารถหาค่ามาได้ด้วยการพิจารณาสมการของการเคลื่อนที่ในแต่ละระบบย่อยและนำไปสู่สมการความถี่ (Frequency equation) ดังต่อไปนี้

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & & & & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \frac{(2-\lambda)}{2} \end{vmatrix}_{n \times n} = 0 \tag{79}$$

$$\lambda = (\omega_m^*/n)^2 \tag{80}$$

สังเกตได้ว่า เมื่อทำการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) ของพจน์ทางซ้ายมือในสมการ (79) นำไปสู่ผลลัพธ์สุดท้ายที่ได้โดยเป็นสมการเชิงอดิศัย (Transcendental equation) ซึ่งไม่สามารถหาค่า  $\omega_m^*$  ได้ด้วยวิธีการทางตรง (Direct method) แต่ค่าเชิงตัวเลขสำหรับ  $\omega_m^*$  สามารถหาได้ด้วยการใช้ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical procedure) [14], [27] โดยกระบวนการค้นหารากคำตอบ (Roots searching algorithm)

ผลการคำนวณหาค่า  $\omega_m^*$  สำหรับการจำลองระบบย่อย  $n$  ดิกรีอิสระจากสมการ (79) แสดงไว้ในตารางที่ 1 กรณีของรูปแบบการสั่น (First five vibration modes) ใน 5 รูปแบบแรก [20]

จากตารางที่ 1 พบว่า จำนวนของรูปแบบการสั่นปรากฏตามจำนวนของดิกรีอิสระที่ใช้ ( $n$ ) ในแบบจำลองระบบย่อย เมื่อจำนวนดิกรีอิสระมีค่าเพิ่มขึ้น เห็นได้ว่า ค่า  $\omega_m^*$  ในแต่ละรูปแบบการสั่นลำดับที่  $m$  มีค่าลู่เข้าค่า  $\omega_m^*$  ที่แน่นอน ( $n = \infty$ ) ของระบบต่อเนื่องที่ได้จากสมการ (78) นอกจากนี้ ยังพบว่า ความคลาดเคลื่อนของ  $\omega_m^*$  มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมีรูปแบบการสั่นในลำดับที่สูงขึ้นโดยทำการเปรียบเทียบกับค่าแน่นอน ดังนั้น ในการหาค่า  $\omega_m^*$  สำหรับรูปแบบ

การสั้นในลำดับที่สูงจึงควรพิจารณาใช้จำนวนดิกรีอิสระที่มากเพียงพอในการจำลองระบบย่อยและให้ทำการทดสอบการลู่เข้า (Convergent test) ของค่า  $\omega_m^*$  ตามจำนวน  $n$  ที่เพิ่มขึ้น

## 6. บทสรุป

การวิเคราะห์ในบางปัญหาเชิงกายภาพอาจปรากฏจำนวนเชิงซ้อนหรือฟังก์ชันเชิงซ้อนระหว่างขั้นตอนของการวิเคราะห์หรือในบางกรณี พบว่า การใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงซ้อนอาจมีความสะดวกในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สำหรับบทความนี้นำเสนอการทบทวนและสรุปพื้นฐานที่จำเป็นของจำนวนและฟังก์ชันเชิงซ้อนและการวิเคราะห์ฮาร์มอนิกที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของระบบเชิงกลและระบบโครงสร้างรวมไปถึงการแนะนำแนวทางการสร้างแบบจำลองระบบย่อยเพื่อเป็นตัวแทนในการวิเคราะห์ระบบต่อเนื้อที่มีความซับซ้อนหรือไม่สามารถทำการวิเคราะห์ได้ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างในการจำลองระบบย่อย

## เอกสารอ้างอิง

- [1] N.W. McLachlan, Complex Variable Theory and Transform Calculus, 2<sup>nd</sup> Edition, The Syndics of the Cambridge University Press, New York, 1963.
- [2] F.J. Flanigan, Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions, Dover publications, Inc., New York, 1972.
- [3] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 2006.
- [4] W.T. Thomson, Theory of Vibration with Applications, 4<sup>th</sup> Edition, Chapman & Hall, London, 1993.
- [5] S.S. Rao, Mechanical Vibrations, 3<sup>rd</sup> Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1995.
- [6] L. Meirovitch, Principles and Techniques of Vibrations, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1997.
- [7] D.J. Inman, Engineering Vibration, 2<sup>nd</sup> Edition, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 2001.
- [8] W.J. Bottega, Engineering Vibrations, Taylor & Francis Group, LLC., Boca Raton, 2006.
- [9] R.W. Clough and J. Penzien, Dynamics of Structures, 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill, Inc., Singapore, 1993.
- [10] A.K. Chopra, Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice-Hall of India, New Delhi, 1998.
- [11] G.C. Hart and K. Wong, Structural Dynamics for Structural Engineers, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
- [12] P. Posayanant, W. Wongwanishwatana, P. Premthamkorn and Y. Sompornjaroensuk, "Vibration responses for SDOF system: I – Free and forced vibrations with and without damping," *Eng. Trans. MUT*, 2025, paper submitted for publication. (in Thai)
- [13] P. Posayanant, W. Wongwanishwatana, P. Premthamkorn and Y. Sompornjaroensuk, "Vibration responses for SDOF system: II – Coulomb and structural damping," *Eng. Trans. MUT*, 2025, paper submitted for publication. (in Thai)
- [14] G.H. Golub and C.F. Van Loan, Matrix Computations, 2<sup>nd</sup> Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1990.
- [15] J.J. Tuma, Engineering Mathematics Handbook, 2<sup>nd</sup>, Enlarged and Revised Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- [16] M. Cartwright, Fourier Methods for Mathematicians, Scientists and Engineers, Ellis Horwood Limited, West Sussex, 1990.
- [17] R.V. Churchill and J.W. Brown, Fourier Series and Boundary Value Problems, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill Book Company, Auckland, 1978.
- [18] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey, Harmonic function Theory, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [19] S.S. Rao, Vibration of Continuous System, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2007.
- [20] A.W. Leissa and M.S. Qatu, Vibrations of Continuous Systems, McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 2011.
- [21] S. Raynor and E. Frank, "Method of computation of damped resonance frequencies for a system of equal masses, equal spring constants, and equal viscous-damping coefficients," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 39, no.2, pp. 269-271, 1966.
- [22] A.E. Anuta, "The modal equations with viscous damping," *Comput. Struct.*, vol. 41, no. 4, pp. 621-627, 1991.
- [23] M.I. Friswell and A.W. Lees, "Resonance frequencies of viscously damped structures," *J. Sound Vib.*, vol. 217, no. 5, pp. 950-959, 1998.
- [24] M. Gurgoze and N.A. Hizal, "Viscously damped mechanical systems subject to several constraint equations," *J. Sound Vib.*, vol. 229, no. 5, pp. 1264-1268, 2000.
- [25] M. Gurgoze, "Viscously damped linear systems subjected to damping modifications," *J. Sound Vib.*, vol. 245, no. 2, pp. 353-362, 2001.
- [26] M. Gurgoze, "Non-proportionally damped systems subjected to damping modification by several viscous dampers," *J. Sound Vib.*, vol. 271, pp. 441-452, 2004.
- [27] D.W. Jordan and P. Smith, Mathematical Techniques, 2<sup>nd</sup> Edition, Oxford University Press, New York, 1997.
- [28] M. Petyt, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, 2<sup>nd</sup> Edition, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [29] <https://www.checkraka.com/motorcycle/article/111508/>
- [30] <https://www.istockphoto.com/th/search/2/image-film?phrase=crane+lift>



ปวริศ โปชยะนันท์ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร และปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาเอกในสถาบันเดียวกัน มีประสบการณ์ทางวิชาชีพเกี่ยวกับการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างอาคารขนาดใหญ่ โครงสร้างทางชลศาสตร์ เขื่อนและประตูปรับน้ำขนาดใหญ่ภายใต้ผลของแรงสั่นสะเทือนแผ่นดินไหวและโครงสร้างงานระบบเฉพาะทางเช่น โครงสร้างระบบท่อส่งลำเลียงของเหลวหรือน้ำมันและโครงสร้างรองรับระบบปิโตรเคมี มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่องกลศาสตร์การคำนวณเชิงโครงสร้าง การวิเคราะห์โครงสร้างบนพื้นฐานของวิธีการปัญญาประดิษฐ์และการสร้างแบบจำลองโครงข่ายประสาทเทียม



**วิษเณศ วงศ์วานิชวัฒนา** สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย (AIT) School of Engineering and Construction และเริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2537 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำและตัวเลขและการ

จัดการงานก่อสร้าง



**ดร.ประกิจ เปรมธรรมกร** สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา จาก Texas A&M University ทำงานเป็นอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครตั้งแต่ปี พ.ศ. 2538 มีความสนใจศึกษางานวิจัยทางด้านเสถียรภาพของโครงสร้างและโครงสร้างเพื่อความปลอดภัยสำหรับถนน



**ผศ.ดร.ยศ สมพรเจริญสุข** สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมโครงสร้าง) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2550 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง

กลศาสตร์การแตกหัก กลศาสตร์การสัมผัส และกลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำและตัวเลข