

เกณฑ์การโก่งเดาะของเสาแบบออยเลอร์ที่มีปลายทั้ง 2 ข้างยึดรั้งแบบ ยืดหยุ่น: วิธีแก้ปัญหาคณิตวิเคราะห์และการตรวจสอบ

Buckling Criteria of an Euler Column with Both Ends Elastically Restrained: Analytical Solution and Verification

ปวริศ โปษะนันทน¹ วิชเนศ วงศ์วานิชวัฒนา² ประกิจ เปรมธรรมกร³ และยศ สมพรเจริญสุข*

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา สถาบันวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยีอุตสาหกรรม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร 140 ถนนเชื่อมสัมพันธ์ แขวงกระทุ่มราย เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: 661900031@mut.ac.th¹, wikhanes@gmail.com², pprakit@mut.ac.th³,

*Corresponding author: Email: syossyos@mut.ac.th

Manuscript Received May 24, 25025

Revised July 4, 2025

Accepted October 7, 2025

บทคัดย่อ

การศึกษานี้เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งเดาะของเสาแบบออยเลอร์ที่มีเงื่อนไขของปลายเสาทั้ง 2 ข้างยึดรั้งแบบยืดหยุ่นภายใต้แรงอัดตามแนวแกน ดังนั้น วัตถุประสงค์คือเพื่อพิสูจน์สมการเกณฑ์การโก่งเดาะทั่วไปบนพื้นฐานของวิธีการเชิงวิเคราะห์และแสดงวิธีการตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้ จุดเด่นของการศึกษาคือการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ควบคุมปัญหาและการแก้หาคำตอบในรูปแบบไร้มิติ ที่สำคัญ เสาที่พิจารณาสามารถปรับเปลี่ยนเงื่อนไขไปสู่เสากรณีอื่นที่มีการยึดรั้งปลายเสาที่หลากหลายได้

คำสำคัญ: วิธีการเชิงวิเคราะห์ ปัญหาการโก่งเดาะ เสาแบบออยเลอร์ การยึดรั้งแบบยืดหยุ่น เกณฑ์การโก่งเดาะ

ABSTRACT

This study is concerned with the buckling problem of an Euler column with the condition of both ends elastically restrained under an axial compressive force. The objectives are, therefore, to derive a general buckling criteria equation based on an analytical method and to present verification for the obtained results. The

highlight of the study is that the problem governing differential equation which is formulated and solved in the form of non-dimension. Significantly, the considering column can be re-conditioned to other cases of column having various end restraints.

Keywords: Analytical Method, Buckling Problem, Euler Column, Elastic Restraint, Buckling Criteria

1. บทนำ

สำหรับองค์อาคารที่รับแรงอัดตามแนวแกน (Axial compressive members) เป็นหลักหรือในที่นี้เรียกว่า เสา (Columns) โดยการวิเคราะห์โครงสร้างสามารถจัดจำแนกออกได้เป็น 2 ประเภทตามพฤติกรรมการวิบัติภายใต้แรงอัดดังนี้คือ (1) เสาสั้น (Short columns) ซึ่งความสามารถด้านทานแรงแปรผันโดยตรงกับกำลังวัสดุ (Strength of materials) ของเสาและ (2) เสายาวหรือเรียกว่าเสาชะลูด (Long or slender columns) โดยความสามารถด้านทานแรงของเสาดังกล่าวนอกจากแปรผันตามกำลังวัสดุแล้วยังขึ้นอยู่กับความสามารถในการต้านทานการเสียรูป (Stiffness) ลักษณะทางกายภาพของเสาแสดงในพจน์ของค่า

อัตราส่วนความขะลุ (Slenderness ratios) และสภาพเงื่อนไขของการยึดรั้งที่ปลายเสา (End constraint conditions) [1] และเมื่อทำการเปรียบเทียบความสามารถในการต้านทานแรงอัดที่กระทำระหว่างเสาสั้นและเสายาวโดยกำหนดให้ใช้วัสดุประเภทเดียวกันและมีพื้นที่หน้าตัดเสาที่เท่ากัน พบว่า เสาสั้นสามารถต้านทานแรงอัดได้มากกว่าเสายาว ซึ่งการวิบัติของเสาสั้นเกิดจากการบดอัดแตก (Crushing) ของวัสดุ ส่วนเสายาวมีการวิบัติเนื่องจากเกิดการเสียรูปด้านข้างจนกระทั่งเสาเกิดการโก่งเดาะ (Buckling) และหักลง ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าเสาสั้นมีการใช้กำลังวัสดุได้เต็มประสิทธิภาพเพื่อต้านทานการวิบัติจากแรงอัดที่กระทำได้มากกว่าเสายาวที่มีการวิบัติแบบทันทีทันใดจากการเสียรูปมาก (Large deformation) หรือเกิดการโก่งเดาะขึ้นก่อน

การโก่งเดาะเชิงโครงสร้าง (Structural buckling) หรือเป็นที่ทราบโดยทั่วไปในความหมายของความไร้เสถียรภาพเชิงโครงสร้าง (Structural Instability) อาจจำแนกได้เป็น (1) การโก่งเดาะจากการเปลี่ยนรูปแบบหรือทิศทางการเสียรูป (Bifurcation buckling) จากรูปแบบหนึ่งไปสู่อีกรูปแบบหนึ่ง ดังตัวอย่างเช่น เสายาวเมื่ออยู่ภายใต้ผลของแรงอัดทำให้เกิดการเสียรูปเริ่มแรกจากการหดตัวสั้นลงตามแนวแกน (Axial shortening) จนกระทั่งแรงอัดมีค่าเพิ่มขึ้นถึงระดับหนึ่งจึงส่งผลทำให้เกิดการเสียรูปมาเป็นการโก่งตัวด้านข้าง (Lateral deflection) และเรียกแรงหรือน้ำหนักบรรทุกทุก ณ ขณะนั้นว่า น้ำหนักบรรทุกโก่งเดาะวิกฤติหรือน้ำหนักบรรทุกวิกฤติ (Critical buckling load or critical load) และ (2) การโก่งเดาะจากการจำกัดค่าน้ำหนักบรรทุก (Limit load buckling) ทั้งนี้ โครงสร้างยังคงความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกได้สูงสุด (Maximum load) โดยปราศจากการเปลี่ยนรูปแบบของการเสียรูปเกิดขึ้น [2] – [6]



รูปที่ 1 การวิบัติจากการโก่งเดาะของเสาในอาคาร [7]



รูปที่ 2 การวิบัติจากการโก่งเดาะในชิ้นส่วนรับแรงอัดของโครงสร้างทาวเวอร์เคลน [8]



รูปที่ 3 การวิบัติจากการโก่งเดาะในชิ้นส่วนรับแรงอัดของโครงสร้างหอสายส่งไฟฟ้า [9]

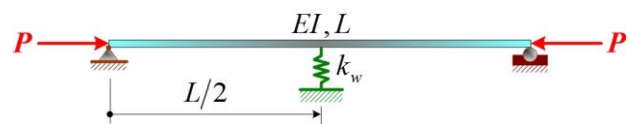
การโก่งเดาะขององค์อาคารเสาเข็มลวดยาว (Column buckling) เป็นพฤติกรรมพื้นฐานสำคัญ (Significant fundamental behaviours) ที่ต้องพึงพิจารณาในการออกแบบเชิงวิศวกรรม โครงสร้างดังได้มีการประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติ อาทิเช่น การออกแบบเสาเข็มในโครงสร้างอาคาร (Building Structures) เพื่อหลีกเลี่ยงการวิบัติจากการโก่งเดาะดังในรูปที่ 1 [7] หรือการพิจารณาออกแบบชิ้นส่วนองค์อาคารรับแรงอัดในโครงสร้างประเภทโครงถักหรือโครงข้อหมุน (Truss structures) ดังในรูปที่ 2 [8] และรูปที่ 3 [9] เป็นต้น ทั้งนี้ ได้มีการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะนี้มาเป็นระยะเวลาที่ยาวนานต่อเนื่องนับจากอดีตจนถึงปัจจุบัน [10-12]

การศึกษาวิจัยเริ่มแรกในเชิงทฤษฎี พบว่า มุ่งเน้นวิเคราะห์เพื่อหาค่าน้ำหนักบรรทุกทุกโก่งเดาะวิกฤติหรือเรียกว่าน้ำหนักบรรทุกทุกโก่งเดาะของออยเลอร์ (Euler buckling load, P_{cr}) ในปัญหาพื้นฐานของเสาเดี่ยวภายใต้เงื่อนไขการยึดรั้งที่ปลายเสาแบบคลาสสิก (Classical end conditions) เช่น ปลายยึดหมุน (Simple or hinged end) ปลายยึดแน่น (Clamped or fixed end) ปลายลื้อเลื่อนไถลบังคับในราง (Sliding guided end) หรือ ปลายอิสระ (Free end) เพื่อให้เสามีเสถียรภาพเชิงโครงสร้างภายใต้ผลของแรงอัดตามแนวแกนต้านทานการโก่งเดาะ [3] – [6]

ในการประยุกต์ใช้งานโครงสร้างทางปฏิบัติซึ่งโดยส่วนมากมักพบว่า เงื่อนไขการยึดรั้งที่ปลายเสาไม่เป็นไปตามเงื่อนไขแบบคลาสสิกโดยสมบูรณ์ตามทฤษฎีหรือสามารถกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า มีเงื่อนไขการยึดรั้งที่ปลายเสาเป็นแบบไม่คลาสสิกหรือมีลักษณะเป็นแบบยืดหยุ่น (Non-classical or flexible end conditions) หรือในทางโครงสร้างเรียกว่า เงื่อนไขแบบกึ่งแข็งเกร็ง (Semi-rigid condition) ซึ่งในกรณีดังกล่าวนี้ การวิเคราะห์ทำได้ด้วยการจำลองรูปแบบเงื่อนไขที่ปลายเสาให้มีการยึดรั้งด้วยสปริงยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linear or translational spring) หรือสปริงยืดหยุ่นแบบเชิงมุม (Rotational or torsional spring) หรือมีการยึดรั้งด้วย

สปริงทั้ง 2 ประเภทร่วมกันหรืออาจมีการยึดรั้งแบบผสมระหว่างสปริงยืดหยุ่นและการยึดรั้งแบบคลาสสิกที่สามารถกำหนดค่าความแข็งแรงของสปริงให้แปรเปลี่ยนได้ตามพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริงหรือใกล้เคียงตามที่ได้กำหนดไว้ในขั้นตอนการวิเคราะห์หรือในทางปฏิบัติ

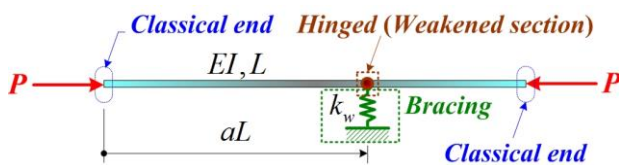
ตัวอย่างการศึกษางานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องมีดังนี้ Baisheng [13] พิจารณาปัญหาการโก่งเดาะของเสาอย่างง่ายที่มีปลายยึดรั้งแบบยืดหยุ่นทั้ง 2 ข้าง โดยมีสปริงยืดหยุ่นต้านทานการเคลื่อนที่เชิงเส้นที่มีค่าความแข็งแรงของสปริง (k_w) รองรับตรงบริเวณกึ่งกลางความยาวเสาดังรูปที่ 4 สำหรับสมการควบคุมปัญหาการโก่งเดาะพิสูจน์ได้ด้วยวิธีพลังงาน (Energy method) และทำการแก้หาคำตอบแบบแม่นยำตรง ผลลัพธ์ที่ได้คือ สมการเกณฑ์การโก่งเดาะแสดงในพจน์ของค่าความแข็งแรงของสปริงโดยไม่มีการแสดงผลลัพธ์เชิงตัวเลข



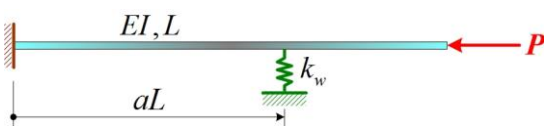
รูปที่ 4 เสาที่มีปลายทั้ง 2 ข้างยึดรั้งแบบยืดหยุ่นและมีสปริงยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นรองรับที่กึ่งกลางความยาวเสา

Wang [14] ได้อธิบายตัวอย่างปัญหาพื้นฐานที่สามารถประยุกต์ใช้ในการจำลองปัญหาในทางปฏิบัติได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยเสนอแบบจำลองการโก่งเดาะของเสาที่มีจุดต่อภายในเป็นแบบยืดหยุ่น (Internally hinged column) ซึ่งกำหนดให้เป็นตัวแทนของหน้าตัดเสาที่อ่อนแอ (Weakened section) หรือมีความเสียหายขึ้น (Damaged section) แต่ยังไม่เกิดการวิบัติโดยสมบูรณ์ (Completely failure) บนหน้าตัดเสาที่พิจารณาและทำการเสริมความแข็งแรง (Strengthening) เสาด้วยการเพิ่มที่รองรับเป็นสปริงยืดหยุ่นเชิงเส้นในการค้ำยันเสาให้คงอยู่ได้ดังรูปที่ 5 ทั้งนี้ ปลายเสาทั้ง 2 ข้างกำหนดให้มีเงื่อนไขการยึดรั้งเป็นแบบคลาสสิก ในเวลาถัดมา Wang and Nazmul [15] นำเสนอเกณฑ์เสถียรภาพแบบแม่นยำตรง (Exact stability criteria) ของเสาในรูปที่ 6 ด้วยการแก้หาคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์ควบคุมปัญหาการโก่งเดาะของเสานอกจากนี้ ได้มีการพิจารณาเพิ่มเติมในกรณีขอบเขตจำกัดบน (Upper limiting case) ของฐานรองรับภายในโดยกำหนดให้ค่าความแข็งแรงของสปริงมีค่าอนันต์ ($k_w \rightarrow \infty$) ซึ่งสอดคล้องในกรณีที่มี

ฐานรองรับแบบยึดหมุนภายใน (Internally hinged support)

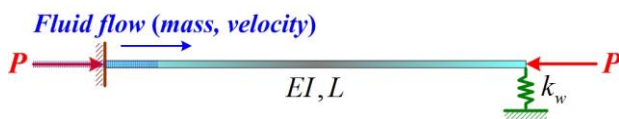


รูปที่ 5 เสาที่มีปลายยึดรั้งทั้ง 2 ข้างแบบคลาสสิกและมีสปริงยึดหมุนแบบเชิงเส้นรองรับค่าที่จุดยึดหมุนภายในเสา



รูปที่ 6 เสาที่มีปลายยึดรั้งแบบยึดแน่นและปลายอิสระและมีสปริงยึดหมุนแบบเชิงเส้นรองรับภายในเสา

Bolotin et al. [16] ได้ศึกษาปัญหาเสถียรภาพเชิงพลวัต (Dynamic stability) ในกรณีของท่อส่งลำเลียงของเหลว (Pipeline) ที่ไม่มีความหนืด (Nonviscous fluid) โดยมีเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายของแบบจำลองแสดงดังแสดงในรูปที่ 7 ทั้งนี้ สมการควบคุมปัญหาได้มีการพิจารณาผลกระทบของมวลของเหลวที่มีความเร็วในท่อร่วมอยู่ในขั้นตอนการร่วางสมการ



รูปที่ 7 แบบจำลองท่อส่งลำเลียงของเหลวที่มีปลายข้างหนึ่งยึดแน่นและปลายอีกข้างรองรับด้วยสปริงยึดหมุนแบบเชิงเส้น

Yan-Ping et al. [17] ศึกษาและวิเคราะห์จุดเปลี่ยนของเสถียรภาพของเสาที่มีเงื่อนไขที่ปลายดังรูปที่ 8 โดยใช้วิธีการอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) บนทฤษฎีการโก่งเดาะของคอยเตอร์ (Koiter's buckling theory)

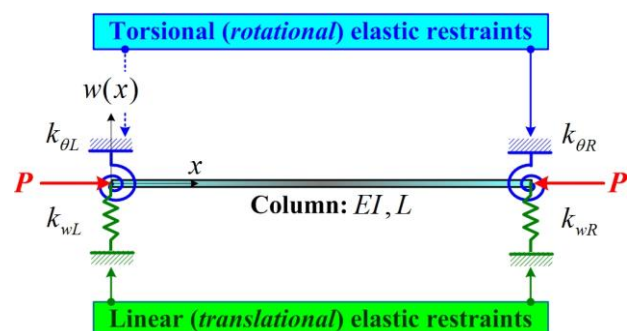


รูปที่ 8 เสาที่มีปลายยึดแน่นและมีปลายอีกข้างบังคับการหมุนและยึดรั้งด้วยสปริงยึดหมุนแบบเชิงเส้น

สำหรับการศึกษานี้ ให้ความสนใจศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาการโก่งเดาะของเสาแบบออยเลอร์ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ โดยกำหนดให้ปลายเสาทั้ง 2 ข้างมีการยึดรั้งแบบยึดหมุนทั่วไปด้วยสปริงยึดหมุนแบบเชิงเส้นและแบบเชิงมุมที่ไม่จำเป็นต้องจำกัดให้ค่าความแกร่งของสปริงประเภทเดียวกันต้องมีค่าเท่ากัน (Arbitrary spring stiffness) ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์แสดงในรูปแบบของสมการเกณฑ์การโก่งเดาะแบบยึดหมุนของเสา (Elastic column buckling criteria equation) และฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะ (Buckling shape function) พร้อมแสดงวิธีการตรวจสอบความถูกต้อง นอกจากนี้ ได้คำนวณค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพวิกฤติ (Critical stability parameters) จากสมการที่นำเสนอในกรณีเงื่อนไขของปลายเสาเป็นแบบคลาสสิกที่แตกต่างกัน

2. ทฤษฎีและการสร้างสมการรั้งมิติควบคุมปัญหา

เริ่มต้นพิจารณาเสายาวจะลุดโดยสมมติให้เป็นเสาตรงที่มีหน้าตัดคงที่สม่ำเสมอและความยาว L ความแกร่ง EI ที่อยู่ภายใต้แรงอัดตามแนวแกนเสา P และมีการรองรับด้วยสปริงยึดหมุนแบบเชิงเส้นและแบบเชิงมุมที่มีความแกร่งของสปริงทางปลายด้านซ้าย k_{wL} และ $k_{\theta L}$ และปลายด้านขวา k_{wR} และ $k_{\theta R}$ ของเสาดังแสดงในรูปที่ 9



รูปที่ 9 แบบจำลองเสาที่มีปลายทั้ง 2 ข้างยึดรั้งแบบยึดหมุน

จากทฤษฎีของออยเลอร์และเบอร์นูลลี (Euler-Bernoulli theory) [1], [3] จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัด (M) และปริมาณการโก่งตัว (w) บนหน้าตัดใด ๆ ที่พิภคระยะทาง x และความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือน (V) และปริมาณการโก่งตัวดังนี้

$$M = EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1)$$

$$V = EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + P \frac{dw(x)}{dx} \quad (2)$$

เมื่อพิจารณาสมดุลของแรงในทิศทางที่ตั้งฉากกับแนวแกนเสา สำหรับชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Infinitesimal element) ที่มีความยาว dx จึงได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation: ODE) คือ

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0 \quad (3)$$

โดยที่สมการ (3) สามารถเรียกได้อีกอย่างเป็นทางการว่าเป็นสมการการโก่งตัวของเสาแบบออยเลอร์ (Euler column buckling equation)

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ในลำดับถัดไปจึงเสนอพารามิเตอร์ไร้มิติ (Non-dimensional parameters) ดังนี้

$$\xi = x/L, \quad W(\xi) = w(x)/L \quad (4)$$

โดยการแทนสมการ (4) ลงในสมการ (3) นำไปสู่สมการไร้มิติ (Non-dimensional equation) คือ

$$\frac{d^4 W(\xi)}{d\xi^4} + \alpha \pi^2 \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} = 0 \quad (5)$$

ทั้งนี้ พารามิเตอร์ไร้มิติ α และน้ำหนักบรรทุกทุกโก่งเดาะวิกฤติ P_{cr} มีนิยามเป็น [1] – [3]

$$\alpha = P/P_{cr} \quad (6)$$

$$P_{cr} = \pi^2 EI/L^2 \quad (7)$$

ผลเฉลย (คำตอบ) ของสมการ (5) คือ ปริมาณ $W(\xi)$ ซึ่งสามารถหามาได้ด้วยการสมมติให้ [18]

$$W(\xi) = e^{r\xi} \quad (8)$$

โดยที่ r คือ ค่าไอเก้น (Eigenvalues) หรือเรียกว่า ค่าเฉพาะ

เมื่อทำการแทนสมการ (8) กลับลงในสมการ (5) จึงได้สมการช่วยหรือสมการลักษณะเฉพาะ (Auxiliary or characteristic equation)

$$r^2(r^2 + \alpha\pi^2) = 0 \quad (9)$$

สมการ (9) มีรากคำตอบ (Roots) คือ [18], [19]

$$\left. \begin{aligned} r_{1,2} &= 0 \\ r_{3,4} &= \pm \pi \sqrt{\alpha i} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ซึ่ง $i = \sqrt{-1}$ และเมื่อพิจารณาสูตรของออยเลอร์ (Euler's formulae) [19]

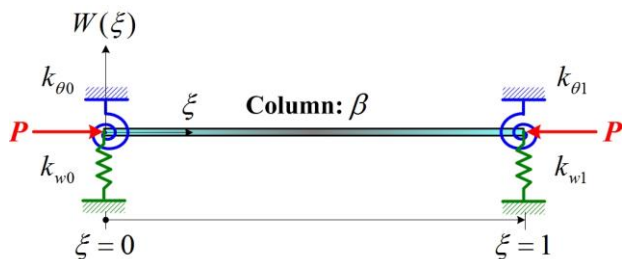
$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad (11)$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (5) จึงเขียนได้เป็น [18], [19]

$$W(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + C_3 \xi + C_4 \quad (12)$$

โดยค่าคงที่จำนวนจริง (Real constants) C_1 ถึง C_4 สามารถหาได้จากการประยุกต์เงื่อนไขที่ปลายเสาทั้ง 2 ข้าง ($\xi = 0, 1$) ดังแสดงในรูปที่ 10 สำหรับพารามิเตอร์เสถียรภาพ (Stability parameter: β) มีนิยามเป็น

$$\beta = \pi \sqrt{\alpha} \quad (13)$$



รูปที่ 10 พารามิเตอร์ไร้มิติเพื่อการวิเคราะห์

จากการแทนสมการ (13) ลงในสมการ (5) จึงได้

$$\frac{d^4 W(\xi)}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} = 0 \quad (14)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (1) สมการ (2) และสมการ (4) ทำให้สามารถเขียนโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนในรูปแบบไร้มิติดังนี้

$$M(\xi) = \frac{EI}{L} \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} \quad (15)$$

$$V(\xi) = \frac{EI}{L^2} \left[\frac{d^3 W(\xi)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(\xi)}{d\xi} \right] \quad (16)$$

3. วิธีวิเคราะห์

ในการวิเคราะห์และแก้ปัญหาสามารถทำได้ด้วยการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายเสาทั้ง 2 ข้าง (End boundary conditions) ดังสมการต่อไปนี้

$$\left[\frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} - k_{\theta 0} \frac{dW(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (17)$$

$$\left[\frac{d^3 W(\xi)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(\xi)}{d\xi} + k_{w0} W(\xi) \right]_{\xi=0} = 0 \quad (18)$$

$$\left[\frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} + k_{\theta 1} \frac{dW(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (19)$$

$$\left[\frac{d^3 W(\xi)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(\xi)}{d\xi} - k_{w1} W(\xi) \right]_{\xi=1} = 0 \quad (20)$$

และพารามิเตอร์ไร้มิติสำหรับความแกร่งของสปริง คือ

$$k_{w0} = k_{wL} L^3 / EI \quad (21)$$

$$k_{w1} = k_{wR} L^3 / EI \quad (22)$$

$$k_{\theta 0} = k_{\theta L} L / EI \quad (23)$$

$$k_{\theta 1} = k_{\theta R} L / EI \quad (24)$$

โดยการแทนสมการ (12) ลงในสมการ (17) ถึง สมการ (20) ผลลัพธ์ที่ได้เป็นดังนี้

$$(C_1 \beta + C_3) k_{\theta 0} + C_2 \beta^2 = 0 \quad (25)$$

$$(C_2 + C_4) k_{w0} + C_3 \beta^2 = 0 \quad (26)$$

$$C_1 \beta (\beta \sin \beta - k_{\theta 1} \cos \beta) + C_2 \beta (\beta \cos \beta + k_{\theta 1} \sin \beta) - C_3 k_{\theta 1} = 0 \quad (27)$$

$$(C_1 \sin \beta + C_2 \cos \beta + C_4) k_{w1} - C_3 (\beta^2 - k_{w1}) = 0 \quad (28)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (26) จึงเขียน C_4 ในพจน์ของ C_2 และ C_3 เป็น

$$C_4 = -(C_2 + C_3 \beta^2 / k_{w0}) \quad (29)$$

จากนั้น ทำการแทนสมการ (29) กลับลงในสมการ (28) จึงได้

$$C_1 k_{w0} k_{w1} \sin \beta - C_2 k_{w0} k_{w1} (1 - \cos \beta) - C_3 [(\beta^2 - k_{w1}) k_{w0} + \beta^2 k_{w1}] = 0 \quad (30)$$

พิจารณาจัดสมการ (25) สมการ (27) และสมการ (29) ให้อยู่ในรูปแบบของสมการแมทริกซ์ (Matrix equation form) [20] ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \beta k_{\theta 0} & \beta^2 \\ \beta (\beta \sin \beta - k_{\theta 1} \cos \beta) & \beta (\beta \cos \beta + k_{\theta 1} \sin \beta) \\ k_{w0} k_{w1} \sin \beta & -k_{w0} k_{w1} (1 - \cos \beta) \\ k_{\theta 0} & \\ -k_{\theta 1} & \\ -[(\beta^2 - k_{w1}) k_{w0} + \beta^2 k_{w1}] \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

4. สมการเกณฑ์การโก่งเดาะและฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะ

เมื่อพิจารณาสมการ (31) พบว่า เป็นระบบสมการร่วมแบบเอกพันธ์ (Homogeneous simultaneous equation system) ในพจน์ของตัวไม่ทราบค่า 3 จำนวน ในที่นี้ คือ C_1 C_2 และ C_3 โดยมีพารามิเตอร์เสถียรภาพ (β) แฝงอยู่ในแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficients or augmented matrix) ดังนั้นแล้ว ผลเฉลยที่มีคุณค่า (Non-trivial

solutions) ของสมการ (31) สามารถหาได้ด้วยการกำหนดให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าเท่ากับศูนย์ [18], [20]

$$\begin{vmatrix} \beta k_{\theta 0} & \beta^2 \\ \beta(\beta \sin \beta - k_{\theta 1} \cos \beta) & \beta(\beta \cos \beta + k_{\theta 1} \sin \beta) \\ k_{w 0} k_{w 1} \sin \beta & -k_{w 0} k_{w 1} (1 - \cos \beta) \\ k_{\theta 0} & -k_{\theta 1} \\ -[(\beta^2 - k_{w 1})k_{w 0} + \beta^2 k_{w 1}] & \end{vmatrix}_{(3 \times 3)} = 0 \quad (32)$$

ภายหลังจากการดำเนินการในสมการ (32) [21] และทำการจัดพจน์ให้อยู่ในรูปแบบกระชับ (Compact form) ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$\begin{aligned} & 2k_{w 0} k_{w 1} k_{\theta 0} k_{\theta 1} - \{\beta(\beta^2 - k_{\theta 0} k_{\theta 1})[(\beta^2 - k_{w 1})k_{w 0} + \beta^2 k_{w 1}] \\ & - \beta k_{w 0} k_{w 1} (k_{\theta 0} + k_{\theta 1})\} \sin \beta \\ & + \{\beta^2 (k_{\theta 0} + k_{\theta 1})[(\beta^2 - k_{w 1})k_{w 0} + \beta^2 k_{w 1}] \\ & - 2k_{w 0} k_{w 1} k_{\theta 0} k_{\theta 1}\} \cos \beta = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

โดยที่ สมการ (33) เรียกว่า สมการเกณฑ์การโก่งเดาะของเสาและมีรูปแบบเป็นสมการอดิศัย (Transcendental equation) ซึ่งไม่สามารถหาพารามิเตอร์ β ที่ต้องการได้โดยตรงจึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical procedure) ในการสืบค้นหารากคำตอบ (Roots searching algorithm) [21] สังเกตว่า จำนวนพจน์ของ β สามารถมีได้เป็นจำนวนอนันต์ค่า (β_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, \infty$) โดยค่าแรกของ β ที่ไม่เป็นศูนย์ ($\beta_1 \neq 0$) และมิต้าน้อยสุด (ค่าต่ำสุด) เรียกว่า ค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพวิกฤติ (Critical stability parameter: $\beta_{cr} = \beta_1$) ซึ่งเป็นค่าที่สอดคล้องกับค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติ (P_{cr}) และสามารถหาค่ามาได้จากความสัมพันธ์ที่ให้ไว้ในสมการ (6) และสมการ (13)

เพื่อความสะดวกในขั้นตอนของการคำนวณเชิงตัวเลข จึงสมมติให้พารามิเตอร์ความแกร่งของสปริงต่าง ๆ ให้เป็นไปตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้ คือ $k_{w 0} \geq k_{\theta 0}, k_{w 1}, k_{\theta 1}$ และกำหนดพารามิเตอร์แสดงสัดส่วนความแกร่งของสปริงดังสมการต่อไปนี้

$$c_1 = k_{\theta 0} / k_{w 0} \quad (34)$$

$$c_2 = k_{\theta 1} / k_{w 0} \quad (35)$$

$$c_3 = k_{w 1} / k_{w 0} \quad (36)$$

$$0 \leq c_1, c_2, c_3 \leq 1 \quad (37)$$

โดยการแทนสมการ (34) ถึง สมการ (36) ลงในสมการ (33) จึงได้

$$\begin{aligned} & 2c_1 c_2 c_3 k_{w 0}^3 - \{\beta(\beta^2 - c_1 c_2 k_{w 0}^2)[(\beta^2 - c_3 k_{w 0}) + c_3 \beta^2] \\ & - \beta(c_1 + c_2) c_3 k_{w 0}^2\} \sin \beta \\ & + \{\beta^2 (c_1 + c_2) k_{w 0}[(\beta^2 - c_3 k_{w 0}) + c_3 \beta^2] \\ & - 2c_1 c_2 c_3 k_{w 0}^3\} \cos \beta = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

สำหรับฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะ (Buckling shape functions) โดยในที่นี้คือ $W(\xi)$ ดังนิยามไว้ในสมการ (12) สามารถหาได้ภายหลังจากการทราบค่า β_i ตามสมการ (33) หรือ สมการ (38) และเมื่อพิจารณาาระบบสมการร่วมที่มีพจน์ของตัวไม่ทราบค่าคงที่คือ C_1, C_2 และ C_3 ดังแสดงในสมการ (31) ซึ่งเป็นระบบสมการแบบเอกพันธ์ ดังนั้น หากกำหนดให้ตัวไม่ทราบค่าตัวใดตัวหนึ่งที่ไม่เป็นศูนย์ (Non-zero unknown constants) มีค่าคงที่ที่แน่นอนใดๆ เช่นนี้แล้ว จึงสามารถแก้ระบบสมการเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าที่เหลือมาได้

จากการพิจารณาสมการ (25) สมการ (27) และกำหนดให้ $C_1 = 1$ จึงได้

$$C_2 \beta^2 + C_3 k_{\theta 0} = -\beta k_{\theta 0} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & C_2 \beta(\beta \cos \beta + k_{\theta 1} \sin \beta) - C_3 k_{\theta 1} \\ & = -\beta(\beta \sin \beta - k_{\theta 1} \cos \beta) \end{aligned} \quad (40)$$

และภายหลังจากการแก้ระบบสมการดังกล่าวข้างต้น ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$C_2 = \frac{k_{\theta 0} (k_{\theta 1} \cos \beta - \beta \sin \beta - k_{\theta 1})}{[\beta k_{\theta 1} + k_{\theta 0} (\beta \cos \beta + k_{\theta 1} \sin \beta)]} \quad (41)$$

$$C_3 = -\beta - \frac{\beta^2 (k_{\theta 1} \cos \beta - \beta \sin \beta - k_{\theta 1})}{[\beta k_{\theta 1} + k_{\theta 0} (\beta \cos \beta + k_{\theta 1} \sin \beta)]} \quad (42)$$

เมื่อแทนสมการ (41) และสมการ (42) สำหรับ C_2 และ C_3 ตามลำดับ กลับลงสู่สมการ (29) จึงได้

$$C_4 = \frac{\beta^3}{k_{w0}} - \left(1 - \frac{\beta^4}{k_{w0}k_{\theta0}}\right) \times \left\{ \frac{k_{\theta0}(k_{\theta1} \cos \beta - \beta \sin \beta - k_{\theta1})}{[\beta k_{\theta1} + k_{\theta0}(\beta \cos \beta + k_{\theta1} \sin \beta)]} \right\} \quad (43)$$

โดยการใช้สมการ (41) ถึง สมการ (43) ในสมการ (12) และกำหนดให้ค่า $C_1 = 1$ จึงสามารถหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะที่สอดคล้องกับค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพ ($\beta = \beta_i$) ดังนี้

$$W(\xi) = \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + C_3 \xi + C_4 \quad (44)$$

5. การตรวจสอบผลเชิงทฤษฎี

เกณฑ์การโก่งเดาะที่พิสูจน์มาได้โดยวิธีการเชิงวิเคราะห์ดังสมการ (33) หรือ สมการ (38) สามารถตรวจสอบความถูกต้องของสมการด้วยการทดสอบจากค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของพารามิเตอร์ความแกร่งของสปริง (Upper and lower limits of spring stiffness parameters) ซึ่งค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างมีค่าเท่ากับค่าอนันต์ (∞) และศูนย์ (0) ตามลำดับ

เนื่องจากปลายเสาแต่ละข้างมีสปริงยึดรั้งที่แตกต่างกัน 2 ประเภท และในแต่ละประเภทของสปริงมีค่าขอบเขต 2 ค่า ดังนั้นเมื่อทำการเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) จึงได้เงื่อนไขการยึดรั้งของเสาใน 16 กรณี แต่มีเพียง 8 กรณีที่เป็นไปได้ของเสาที่มีปลายยึดรั้งแบบคลาสสิกและเสายังคงมีเสถียรภาพภายใน (Internal stability) [22] ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์สปริงของเสากรณีมีปลายยึดรั้งแบบคลาสสิก

กรณี	k_{w0}	$k_{\theta0}$	k_{w1}	$k_{\theta1}$	เงื่อนไข
1	∞	∞	∞	∞	C-C
2	0	∞	∞	∞	G-C
3	∞	0	∞	∞	S-C
4	0	0	∞	∞	F-C
5	∞	∞	0	∞	C-G
6	∞	∞	∞	0	C-S
7	∞	0	∞	0	S-S
8	∞	∞	0	0	C-F

ตารางที่ 2 เกณฑ์การโก่งเดาะของเสากรณีมีปลายยึดรั้งแบบคลาสสิก [3]

กรณี	เงื่อนไข	รูปที่	เกณฑ์การโก่งเดาะ
1	C-C	11	$\sin(\beta/2) = 0^*$, $\tan(\beta/2) = \beta/2^{**}$
2	G-C	12	$\sin \beta = 0$
3	S-C	13	$\tan \beta = \beta$
4	F-C	14	$\cos \beta = 0$
5	C-G	12	$\sin \beta = 0$
6	C-S	13	$\tan \beta = \beta$
7	S-S	15	$\sin \beta = 0$
8	C-F	14	$\cos \beta = 0$

* การโก่งเดาะแบบสมมาตร (Symmetrical buckling)
** การโก่งเดาะแบบปฏิสมมาตร (Anti-symmetrical buckling)

ดังนั้น สมการ (33) หรือ สมการ (38) มีความถูกต้องก็ต่อเมื่อให้ผลลัพธ์ตรงตามสมการเกณฑ์การโก่งเดาะของเสาทั้ง 8 กรณี [3] ดังตารางที่ 2 และในที่นี้ เลือกใช้สมการ (33) ในการตรวจสอบความถูกต้อง

กรณี 1: เสา C-C (รูปที่ 11)



รูปที่ 11 เสาที่มีปลายยึดแน่นทั้ง 2 ข้าง (เสา C-C)

เริ่มต้นจากการหาสมการ (33) ด้วยปริมาณ ($k_{w0}k_{\theta0}k_{w1}k_{\theta1}$) ทั้ง 2 ข้างของสมการ หลังจากนั้น กำหนดให้แต่ละค่าของ k_{w0} $k_{\theta0}$ k_{w1} และ $k_{\theta1}$ มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\sin \frac{\beta}{2} \left(2 \sin \frac{\beta}{2} - \beta \cos \frac{\beta}{2} \right) = 0 \quad (45)$$

สมการ (45) เป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$\sin \frac{\beta}{2} = 0 \quad (46)$$

หรือ

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} \quad (47)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (46) และสมการ (47) พบว่า สมการ (46) เป็นเกณฑ์การโก่งเดาะของเสากรณีแบบสมมาตร (Symmetrical buckling) และสมการ (47) ในกรณีแบบปฏิสมมาตร (Anti-symmetrical buckling) โดยที่ สมการ (46) ให้ค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพวิกฤติ (β_{cr})

สำหรับฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะจากสมการ (44) สามารถลดรูปมาเป็น

$$W(\xi) = \sin \beta \xi + \left(\frac{\sin \beta - \beta}{\cos \beta - 1} \right) (1 - \cos \beta \xi) - \beta \xi \quad (48)$$

กรณี 2: เสา G-C (รูปที่ 12)



รูปที่ 12 เสามีปลายข้างหนึ่งเคลื่อนที่อิสระภายใต้การยึดรั้งเชิงมุมและมีปลายอีกข้างยึดแน่น (เสา G-C)

พิจารณาทารสมการ (33) ด้วยปริมาณ ($k_{\theta 0} k_{w1} k_{\theta 1}$) ทั้ง 2 ข้างของสมการและกำหนดให้แต่ละค่าของ $k_{\theta 0}$ k_{w1} และ $k_{\theta 1}$ ให้มีค่าเข้าใกล้ค่านันต์พร้อมทั้งแทนค่า $k_{w0} = 0$ จึงนำไปสู่สมการต่อไปนี้

$$\sin \beta = 0 \quad (49)$$

เมื่อฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะในกรณีนี้มีรูปแบบสมการ คือ

$$W(\xi) = \cos \beta \xi - 1 \quad (50)$$

กรณี 3: เสา S-C (รูปที่ 13)



รูปที่ 13 เสามีปลายข้างหนึ่งยึดหมุนและปลายอีกข้างยึดแน่น (เสา S-C)

ในกรณีนี้ให้ทำการหารสมการ (33) ด้วยปริมาณ ($k_{w0} k_{w1} k_{\theta 1}$) ทั้ง 2 ข้างของสมการ โดยกำหนดให้แต่ละค่าของ k_{w0} k_{w1} และ $k_{\theta 1}$ มีค่าเข้าใกล้ค่านันต์ร่วมกับการแทนค่า $k_{\theta 0} = 0$ จึงได้

$$\tan \beta = \beta \quad (51)$$

และฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะจากสมการ (44) ลดรูปมาสู่

$$W(\xi) = \sin \beta \xi + \left(\frac{\sin \beta - \beta}{\cos \beta - 1} \right) (1 - \cos \beta \xi) - \beta \xi \quad (52)$$

กรณี 4: เสา F-C (รูปที่ 14)



รูปที่ 14 เสามีปลายข้างหนึ่งอิสระและมีปลายอีกข้างยึดแน่น (เสา F-C)

พิจารณาทารสมการ (33) โดยให้ทำการหารด้วยปริมาณ ($k_{w1} k_{\theta 1}$) ทั้ง 2 ข้างของสมการ จากนั้น กำหนดให้แต่ละค่าของ k_{w1} และ $k_{\theta 1}$ มีค่าเข้าใกล้ค่านันต์และค่าของ k_{w0} และ $k_{\theta 0}$ ให้มีค่าเป็นศูนย์ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\cos \beta = 0 \quad (53)$$

โดยที่ ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะมีรูปแบบเป็น

$$W(\xi) = \cos \beta \xi - 1 \quad (54)$$

กรณี 5: เสา C-G (รูปที่ 12)

สังเกตว่า เสาค $C-G$ มีลักษณะเงื่อนไขที่ปลายเสาเช่นเดียวกับกรณีเสา $G-C$ ซึ่งสมการเกณฑ์การโก่งเดาะของเสาสามารถหามาได้โดยการหารสมการ (33) ด้วยปริมาณ $(k_{w0}k_{\theta0}k_{\theta1})$ ทั้ง 2 ข้างของสมการพร้อมทั้งกำหนดให้ $k_{w0} = k_{\theta0} = k_{\theta1} \rightarrow \infty$ และ $k_{w1} = 0$ จึงนำไปสู่สมการเดียวกันดังสมการ (49) คือ

$$\sin \beta = 0 \quad (55)$$

และฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะมีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ (50) ดังนี้

$$W(\xi) = \cos \beta \xi - 1 \quad (56)$$

กรณี 6: เสาค $C-S$ (รูปที่ 13)

ในทำนองเดียวกันกับเสากรณี 5 ก่อนหน้านี้ โดยที่ เสาค $C-S$ มีลักษณะเงื่อนไขที่ปลายเสาเช่นเดียวกับกรณีเสาค $S-C$ ดังแสดงในรูปที่ 13 ดังนั้น ทำการหารสมการ (33) ด้วยปริมาณ $(k_{w0}k_{\theta0}k_{w1})$ ทั้ง 2 ข้างของสมการร่วมกับการกำหนดให้ $k_{w0} = k_{\theta0} = k_{w1} \rightarrow \infty$ และ $k_{\theta1} = 0$ จึงได้สมการเช่นเดียวกับสมการ (51) ดังนี้

$$\tan \beta = \beta \quad (57)$$

สำหรับฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะมีรูปแบบเดียวกับสมการ (52) คือ

$$W(\xi) = \sin \beta \xi + \left(\frac{\sin \beta - \beta}{\cos \beta - 1} \right) (1 - \cos \beta \xi) - \beta \xi \quad (58)$$

กรณี 7: เสาค $S-S$ (รูปที่ 15)

ให้พิจารณาหารสมการ (33) ด้วยปริมาณ $(k_{w0}k_{w1})$ ทั้ง 2 ข้างของสมการและกำหนดให้ค่า $k_{w0} = k_{w1} \rightarrow \infty$ และค่า $k_{\theta0} = k_{\theta1} = 0$ จึงนำไปสู่สมการต่อไปนี้



รูปที่ 15 เสามีปลายยึดหมุนทั้ง 2 ข้าง (เสาค $S-S$)

$$\sin \beta = 0 \quad (59)$$

สำหรับฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะในกรณีนี้คือ

$$W(\xi) = \sin \beta \xi - \xi \sin \beta \quad (60)$$

กรณี 8: เสาค $C-F$ (รูปที่ 14)

เสาในกรณีนี้มีลักษณะของเงื่อนไขที่ปลายเสาเช่นเดียวกับกรณีเสาค $F-C$ ดังในรูปที่ 14 ทั้งนี้ สมการเกณฑ์การโก่งเดาะสามารถหาได้โดยทำการหารสมการ (33) ด้วยปริมาณ $(k_{w0}k_{\theta0})$ ทั้ง 2 ข้างของสมการพร้อมทั้งกำหนดให้ $k_{w0} = k_{\theta0} \rightarrow \infty$ และ $k_{w1} = k_{\theta1} = 0$ จึงได้สมการ

$$\cos \beta = 0 \quad (61)$$

โดยที่ ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะมีรูปแบบเดียวกับสมการ (54)

$$W(\xi) = \cos \beta \xi - 1 \quad (62)$$

จากผลการตรวจสอบเกณฑ์การโก่งเดาะของเสาทั้ง 8 กรณี ที่ได้จากการกำหนดค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของพารามิเตอร์ความแกร่งของสปริงตามตารางที่ 1 ลงในสมการ (33) พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีสมการรูปแบบเดียวกันกับสมการที่แสดงไว้ในตารางที่ 2 สำหรับตารางที่ 3 แสดงผลการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพวิกฤติของเสา (β_{cr}) ที่มีปลายยึดรูปแบบคลาสสิกแตกต่างกัน 5 กรณี ซึ่งเป็นค่าเดียวกับค่าทางทฤษฎี [3]

ตารางที่ 3 ค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพวิกฤติ (ค่าต่ำสุด) ของเสาในกรณีมีปลายยึดรูปแบบคลาสสิก

เงื่อนไข	$C-C$	$C-S$	$C-G$	$C-F$	$S-S$
β_{cr} (lowest)	2π	1.4303π	π	$\pi/2$	π

6. บทสรุปและข้อเสนอแนะ

การโก่งเดาะของเสาจะลดอายุภายใต้ผลของแรงอัดตามแนวแกนเป็นพฤติกรรมที่สำคัญและต้องพึงระวังในการวิเคราะห์และออกแบบเสาเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาการวิบัติเนื่องจากการโก่งเดาะโดยสามารถพิจารณาได้จากค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความแกร่งและอัตราส่วนความละเอียดของเสา รวมถึงสภาพเงื่อนไขการยึด

รั้งที่ปลายเสา ส่วนใหญ่ของการวิเคราะห์ห้มีการกำหนดให้เงื่อนไขการยึดรั้งที่ปลายเสาเป็นเงื่อนไขแบบคลาสสิกแต่ในสภาพของการใช้งานในความเป็นจริง พบว่า พฤติกรรมของปลายเสามีเงื่อนไขของการยึดรั้งไม่ตรงตามที่ได้กำหนดไว้แต่แรกซึ่งอาจมีสาเหตุมาจาก (1) ขั้นตอนระหว่างการทำก่อสร้างที่ไม่สามารถทำให้ตรงตามเงื่อนไขแบบจำลอง (2) ในระหว่างการใช้งานโครงสร้างหรือระบบส่งผลกระทบทำให้สภาพการยึดรั้งเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม หรือ (3) ปัจจัยที่เกิดจากสภาพสิ่งแวดล้อมรอบข้าง เป็นต้น เพื่อให้เกิดความมั่นใจในการใช้งานและเข้าใจในพฤติกรรมที่เกิดขึ้นตรงตามสภาพความเป็นจริง จึงจำเป็นต้องทบทวนการวิเคราะห์โดยการกำหนดเงื่อนไขการยึดรั้งขึ้นใหม่ให้สอดคล้องกับพฤติกรรมที่เกิดขึ้น วิธีการหนึ่งที่สะดวกและสามารถประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์คือ การจำลองเงื่อนไขการยึดรั้งที่ปลายเสาด้วยสปริงยึดหยุ่นที่สามารถแปรเปลี่ยนค่าความแกร่งของสปริงได้ตรงตามสภาพการตอบสนองที่เกิดขึ้น ดังนั้นวัตถุประสงค์ของการศึกษานี้คือ เพื่อนำเสนอวิธีการเชิงวิเคราะห์ในการแก้ปัญหาการโก่งเดาะของเสาที่มีเงื่อนไขการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นที่ปลายเสาทั้ง 2 ข้าง ด้วยแบบจำลองของสปริงยึดหยุ่นด้านทวนการเคลื่อนที่และการหมุนโดยสามารถแปรเปลี่ยนค่าความแกร่งของสปริงได้ ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์แสดงอยู่ในรูปแบบของสมการเกณฑ์การโก่งเดาะทั่วไปแบบไม่มีมิติในพจน์ของพารามิเตอร์ความแกร่งของสปริงและฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะพร้อมทั้งแสดงวิธีการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

วิธีการวิเคราะห์ปัญหาในการศึกษานี้สามารถประยุกต์ใช้เป็นแนวทางในการศึกษาปัญหาที่มีความซับซ้อนอื่นได้ อาทิเช่น การพิจารณาผลของการเสียรูปตามแนวแกนและการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนในเสา [23] – [25] การวิเคราะห์การโก่งเดาะของเสาที่มีหน้าตัดเกิดความเสียหายบางส่วนหรือมีหน้าตัดที่อ่อนแอ [26], [27] หรือการซ่อมแซม (Retrofitting) และการเสริมกำลัง (Strengthening) เสาเพื่อด้านทวนการโก่งเดาะ [28] เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] J.M. Gere and S.P. Timoshenko, *Mechanics of Materials*, 3rd Edition, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1990.
- [2] C.M. Wang, C.Y. Wang and J.N. Reddy, *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*, CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [3] S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., Singapore, 1961.
- [4] D.O. Brush and B.O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.
- [5] F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1952.
- [6] G.J. Simitses, *An Introduction to the Elastic Stability of Structures*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
- [7] <https://amusementlogic.com/company-news/failures-in-reinforced-concrete-columns/>
- [8] <https://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/16878132221138308>
- [9] <https://www.linkedin.com/pulse/why-did-so-many-south-australias-electricity-towers-kumara-mie-aust->
- [10] B.G. Johnston, "Column buckling theory: Historic highlights," *J. Struct. Eng.*, vol. 109, no. 9, pp. 2086-2096, 1983.
- [11] B. Thurlimann, "Column buckling – Historical and actual notes," *J. Constr. Steel Res.*, vol. 17, pp. 95-111, 1990.
- [12] C.M. Wang, S. Kitipornchai and K.M. Liew, "Research on elastic buckling of columns, beams and plates: Focusing on formulas and design charts," *J. Constr. Steel Res.*, vol. 26, pp. 211-230, 1993.
- [13] W. Baisheng, "Compound buckling of a strut with a lateral elastic support at center," *Mech. Res. Commun.*, vol. 23, no. 1, pp. 29-34, 1996.
- [14] C.Y. Wang, "Buckling of an internally hinged column with an elastic support," *Eng. Struct.*, vol. 24, pp. 1357-1360, 2002.
- [15] C.M. Wang and I.M. Nazmul, "Buckling of columns with intermediate elastic restraints," *J. Eng. Mech.*, vol. 129, no. 2, pp. 241-244, 2003.
- [16] V.V. Bolotin, V.P. Radin, V.P. Chirkov and A.V. Shchugorev, "Stability of a pipeline section with an elastic support," *Mech. Solids*, vol. 44, no. 1, pp. 149-157, 2009.
- [17] Z. Yan-Ping, L. Lin and J. Ming, "Stability of the bifurcation point and the initial post-buckling of an elastic column with a flexible support," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 193-194, pp. 593-600, 2020.
- [18] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 2006.
- [19] J.J. Tuma, *Engineering Mathematics Handbook*, 2nd, Enlarged and Revised Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- [20] G.H. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, 2nd Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1990.
- [21] D.W. Jordan and P. Smith, *Mathematical Techniques*, 2nd Edition, Oxford University Press, New York, 1997.
- [22] A. Kassimali, *Structural Analysis*, 2nd Edition, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, 1999.
- [23] C.M. Wang, Y. Xiang and S. Kitipornchai, "Buckling of restrained columns with shear deformation and axial shortening," *J. Eng. Mech.*, vol. 117, no. 9, pp. 1973-1989, 1991.
- [24] C.M. Wang, S. Kitipornchai and F.G.A. Al-Bermani, "Buckling of columns: Allowance for axial shortening," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 33, no. 8, pp. 613-622, 1991.
- [25] Y. Xiang, C.M. Wang and S. Kitipornchai, "Column buckling under general loads with allowances of pre-buckling shortening and shear deformation," *Arch. Appl. Mech.*, vol. 62, pp. 544-556, 1992.
- [26] C.Y. Wang, C.M. Wang and T.M. Aung, "Buckling of a weakened column," *J. Eng. Mech.*, vol. 130, no. 11, pp. 1373-1376, 2004.
- [27] S. Caddemi, I. Calio and F. Cannizzaro, "Influence of an elastic end support on the dynamic stability of Beck's column with multiple weak section," *Int. J. Non-Linear Mech.*, vol. 69, pp. 14-28, 2015.
- [28] S.C.B. Gurram and A. Deb, "Retrofitting a column with an internal hinge: Analytical and numerical study," *Pract. Period. Struct. Des. Constr.*, vol. 16, no. 1, pp. 24-33, 2011.



ปวริศ โปษะนันท์ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร และปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาเอกในสถาบันเดียวกัน มีประสบการณ์ทางวิชาชีพเกี่ยวกับการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างอาคารขนาดใหญ่ โครงสร้างทางชลศาสตร์ เชื้อเพลิงและประติรูปยาน้ำขนาดใหญ่ภายใต้ผลของแรงสั่นสะเทือนแผ่นดินไหวและโครงสร้างงาน

ระบบเฉพาะทางเช่น โครงสร้างระบบท่อส่งลำเลียงของเหลวหรือน้ำมันและโครงสร้างรองรับระบบปิโตรเคมี มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่องกลศาสตร์การคำนวณเชิงโครงสร้าง การวิเคราะห์โครงสร้างบนพื้นฐานของวิธีการปัญญาประดิษฐ์และการสร้างแบบจำลองโครงข่ายประสาทเทียม



วิษเณศ วงศ์วานิชวัฒนา สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย (AIT) School of Engineering and Construction และเริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2537 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำตรงและตัวเลขและการ

จัดการงานก่อสร้าง



ดร.ประกิจ เปรมธรรมกร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา จาก Texas A&M University ทำงานเป็นอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครตั้งแต่ปี พ.ศ. 2538 มีความสนใจศึกษางานวิจัยทางด้านเสถียรภาพของโครงสร้างและโครงสร้างเพื่อความปลอดภัยสำหรับถนน



ผศ.ดร.ยศ สมพรเจริญสุข สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมโครงสร้าง) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2550 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์การแตกหัก กลศาสตร์การสัมผัส และกลศาสตร์เชิง

คำนวณด้วยวิธีการแม่นยำตรงและตัวเลข