

# เกณฑ์เสถียรภาพของเสาแบบออยเลอร์ที่มีการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นต่อเนื่อง และมีเงื่อนไขปลายเสาแบบคลาสสิก

## Stability Criteria of an Euler Column with a Continuous Elastic Restraint and Classical End Conditions

ปวิศ โปษะนันท์ วิษเณศ วงศ์วานิชวัฒนา ประกิจ เปรมธรรมกร และ ยศ สมพรเจริญสุข\*

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา สถาบันวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยีอุตสาหกรรม  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร 140 ถนนเชื่อมสัมพันธ์ แขวงกระทุ่มราย เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530

Email: 661900031@mut.ac.th, wikhanes@gmail.com, pprakit@mut.ac.th,

\*Corresponding author: syossyos@mut.ac.th

Manuscript Received May 28, 2025

Revised April 8, 2026

Accepted May 22, 2026

### บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้คือ การมุ่งหาเกณฑ์เสถียรภาพ และฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะที่สอดคล้องกันสำหรับเสาแบบออยเลอร์ที่ยึดรั้งแบบยืดหยุ่นอย่างต่อเนื่องซึ่งการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นสามารถพิจารณาและจำลองเป็นฐานรากประเภทวิงเคิลอร์ โดยได้พิจารณาเสาที่มีการปรับเปลี่ยนผลสมของเงื่อนไขปลายเสาแบบคลาสสิกใน 10 รูปแบบ วิธีการวิเคราะห์ที่ปัญหาเริ่มต้นด้วยการสร้างสมการควบคุมแบบไร้มิติสำหรับการโก่งเดาะของเสาจากนั้นจึงทำการแก้หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ พบว่า เกณฑ์เสถียรภาพที่ได้มาโดยส่วนใหญ่เป็นสมการอดิศัยที่มีรูปแบบไร้เชิงเส้นระดับสูงซึ่งแสดงในพจน์ของพารามิเตอร์เสถียรภาพแอบแฝงที่ต้องการ

**คำสำคัญ:** เกณฑ์เสถียรภาพ การโก่งเดาะ เสาแบบออยเลอร์ ฐานรากยืดหยุ่นประเภทวิงเคิลอร์

### ABSTRACT

*The objective of this research work is aiming at the determination of the stability criteria and corresponding buckling shape function for a continuous elastically restrained Euler column in which the elastic restraint can be viewed and modeled as Winkler-type foundation. The column with 10 combinations of classical end condition is considered. The method of problem analysis starts with formulating the dimensionless governing equation for the column buckling and then analytical solving. It is founded that most of the obtained stability criteria are highly nonlinear transcendental equations represented in terms of the required implicit stability parameters.*

**Keywords:** Stability Criteria, Buckling, Euler Column, Winkler-Type Elastic Foundation

### 1. บทนำและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความสามารถต้านทานการโก่งเดาะ (Buckling resistant capacity) ภายใต้ผลของแรงอัดกระทำตามแนวแกน (Axially compressive

loaded) ของเสายาว (Long column) โดยปราศจากการยึดรั้งในแนวขวางตั้งฉากตลอดความยาวเสาสามารถพิจารณาได้จากค่าน้ำหนักบรรทุกทุกโก่งเดาะวิกฤติหรือเรียกโดยย่อว่า น้ำหนักบรรทุกวิกฤติ (Critical buckling load or critical load:  $P_{cr}$ ) ซึ่งมีคุณลักษณะเป็นค่าเฉพาะประจำตัวของเสาที่ขึ้นอยู่กับค่ากำลังของวัสดุที่ใช้ (Material strength) ค่าความแกร่งและความชะลูด (Stiffness and slenderness) ของเสา รวมไปถึงเงื่อนไขการยึดรั้งบริเวณปลายเสาทั้ง 2 ข้าง (End restraint condition) [1] – [5]

ตัวอย่างการวิบัติอันเนื่องจากการโก่งเดาะของเสาที่กล่าวนี้แสดงในรูปที่ 1 [6] ในกรณีของเสาที่อยู่ภายในอาคาร (Interior columns) ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติสำหรับเสาที่มีการยึดรั้งอย่างต่อเนื่องตลอดช่วงความยาวเสา (Continuously restrained columns) มีค่าแตกต่างไปจากกรณีของเสาเมื่อมีการยึดรั้งเฉพาะบริเวณที่ปลายอย่างเดียว ตัวอย่างของการพิจารณาและวิเคราะห์เสาที่มีลักษณะดังกล่าวนี้เช่น ในกรณีเสาที่มีการยึดติดกับโครงสร้างผนังอาคารซึ่งการวิเคราะห์สามารถจำลองผนังให้เป็นฐานรากยืดหยุ่นได้ (Elastic foundation) [7], [8] โดยมีปฏิสัมพันธ์ของการส่งถ่ายแรงระหว่างเสาและผนัง (Interaction of force transfer) หรือกรณีท่อส่งลำเลียงของเหลว (Pipeline) ที่วางตัวทอดอยู่บนพื้นใต้ทะเลดังรูปที่ 2 [9] รางรถไฟที่วางพาดบนหมอนรองรางดังรูปที่ 3 [10] หรือ ในกรณีของเสาเข็มที่ฝังอยู่ในดินดังรูปที่ 4 [11] และรูปที่ 5 [12] เป็นต้น

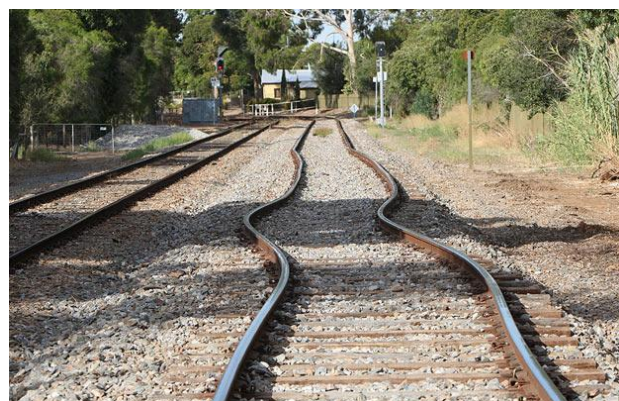
สำหรับการสำรวจผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและใช้เป็นแนวทางในการศึกษามีรายละเอียดพอสังเขปดังต่อไปนี้ Atanackovic and Novakovic [13] ได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งเดาะของเสาที่มีปลายยึดแน่นทั้ง 2 ข้างและวางบนฐานรากยืดหยุ่นประเภทวิงเคิลอร์ (Winkler-type elastic foundation) ดังในรูปที่ 6 โดยสนใจศึกษาเพื่อหาขนาดหน้าตัดเสาที่เหมาะสม (Optimum cross sections) แสดงในพจน์ของโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดเสา (Moment of inertia of cross section) และต่อมาภายหลัง Atanackovic et al. [14] ได้มีการศึกษาเพิ่มเติมในปัญหาลักษณะเดียวกันโดยพิจารณาให้เสาอยู่บนฐานรากเพียงบางส่วนดังแสดงในรูปที่ 7



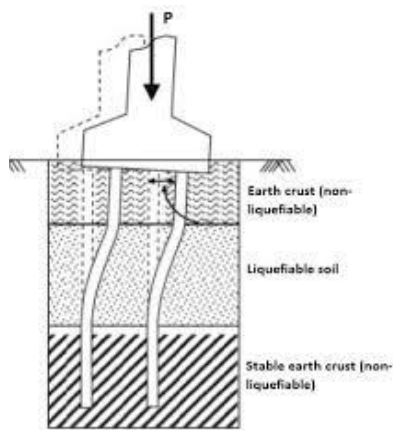
รูปที่ 1 การวิบัติจากการโก่งเดาะของเสาภายในอาคาร [6]



รูปที่ 2 การโก่งเดาะของท่อส่งลำเลียงของเหลวบนพื้นใต้ทะเล [9]



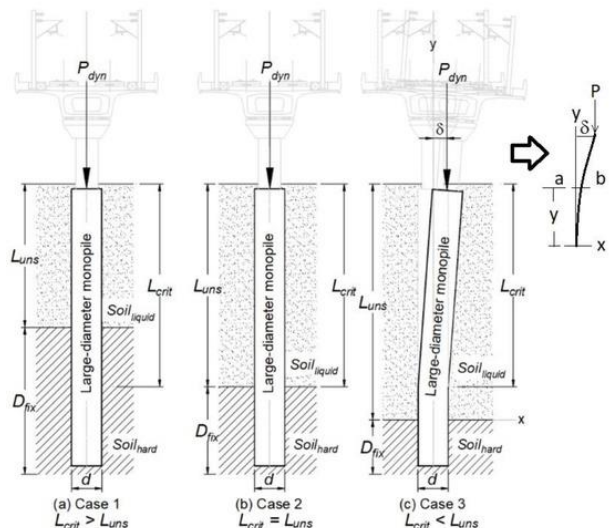
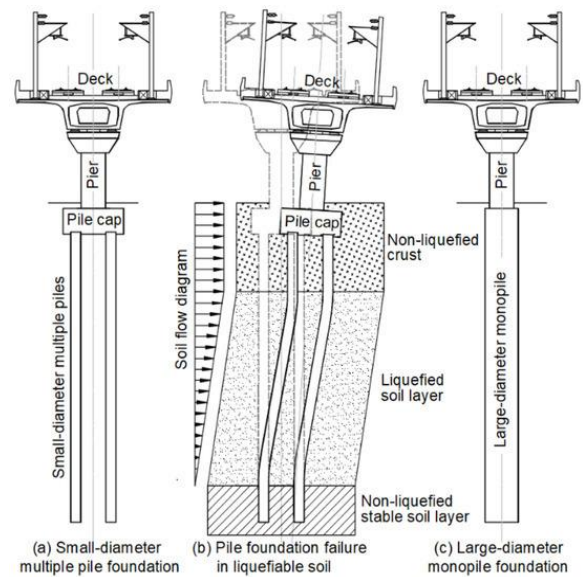
รูปที่ 3 การโก่งเดาะของรางรถไฟที่วางพาดบนหมอนรองราง [10]



รูปที่ 4 การโก่งเดาะของฐานรากเสาเข็ม [11]

Atay and Coskun [15] ทำการทดสอบปัญหาการโก่งเดาะของเสาฐานรากยัดหยุ่นดังแสดงในรูปที่ 8 และกำหนดให้ปลายเสาทั้ง 2 ข้างมีการยึดรั้งแบบคลาสสิกที่แตกต่างกันใน 5 กรณี โดยการวิเคราะห์ปัญหาใช้วิธีกระบวนการวนซ้ำแบบแปรผัน (Variational iteration method: VIM) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical procedure) จากผลการวิเคราะห์สรุปได้ว่า คำนวณกับรทุกวิถีที่ได้มีค่าที่สอดคล้องกันเป็นอย่างดีเมื่อทำการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์เชิงทฤษฎีและในเวลาถัดมา Eryilmaz et al. [16] ได้ศึกษาปัญหาในลักษณะเดียวกันนี้โดยนำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีการวิเคราะห์โฮโมโตปี (Homotopy analysis method) เพื่อหาคำนวณกับรทุกวิถี

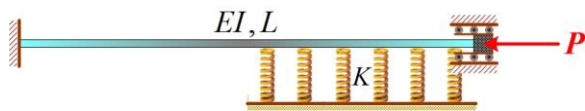
Melissianos and Gantes [17] วิเคราะห์และจำลองพฤติกรรม การโก่งเดาะของท่อส่งลำเลียงของเหลวที่ฝังภายในหรือวางบนดินและมีจุดต่อภายในของท่อ (Interior joint or connection) เป็นแบบยึดหมุนร่วมกับมีสปริงยึดรั้งเชิงมุม (Rotational elastic spring) โดยทำการจำลองให้เป็นปัญหาของเสาที่มีปลายแบบยึดหมุนหรือแบบยึดแน่นและวางบนฐานรากยัดหยุ่นดังรูปที่ 9



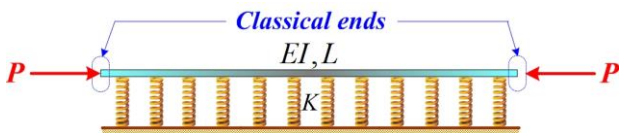
รูปที่ 5 การโก่งเดาะของเสาเข็มกลุ่มหรือเสาเข็มเดี่ยวขนาดใหญ่รองรับเสาตอม่อ [12]



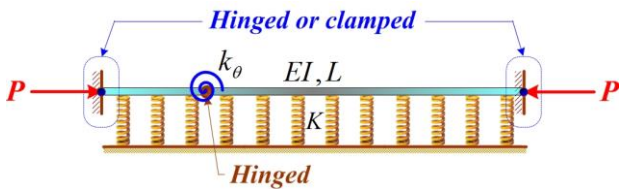
รูปที่ 6 เสามีปลายยึดแน่นทั้ง 2 ข้างวางบนฐานรากยัดหยุ่น



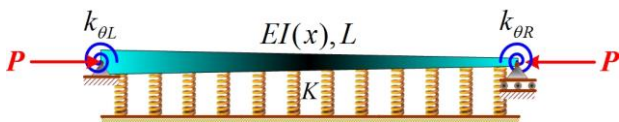
รูปที่ 7 เสาที่มีปลายยึดแน่นทั้ง 2 ข้างวางบนฐานรากยืดหยุ่นบางส่วน



รูปที่ 8 เสาที่มีเงื่อนไขปลายแบบคลาสสิกวางบนฐานรากยืดหยุ่น



รูปที่ 9 เสาวางบนฐานรากยืดหยุ่นและมีจุดต่อภายในยึดหมุนร่วมกับสปริงยึดรั้งเชิงมุม



รูปที่ 10 เสาที่มีหน้าตัดแปรเปลี่ยนวางบนฐานรากยืดหยุ่นและมีปลาย 2 ข้างยึดหมุนร่วมกับสปริงยึดรั้งเชิงมุม [18]

Ghadban *et al.* [18] ศึกษาปัญหาการโก่งเดาะของเสาที่มีหน้าตัดไม่สม่ำเสมอและมีเงื่อนไขการยึดรั้งที่ปลายดังรูปที่ 10 เนื่องจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ความซับซ้อนของปัญหาที่พิจารณาด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์มีความยุ่งยากและซับซ้อนจึงนำเสนอระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical procedure) ด้วยการแบ่งเสาออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ (Segmental elements) โดยสมมติให้มีคุณสมบัติของหน้าตัดเสาที่สม่ำเสมอ (Uniform section) ในแต่ละชิ้นส่วน

เนื่องจากปัญหาการโก่งเดาะของเสามีความสำคัญในเชิงโครงสร้างโดยการวิบัติเนื่องจากการโก่งเดาะเป็นการวิบัติแบบทันทีทันใด

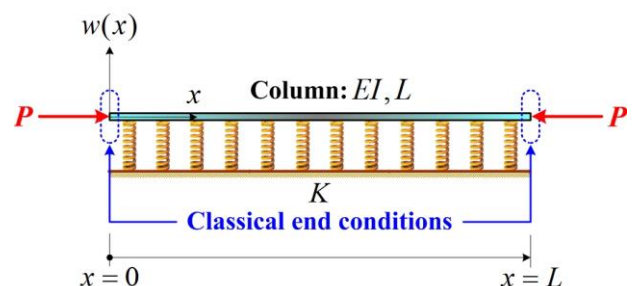
(Sudden failure) เมื่อความสามารถของเสาในการรองรับน้ำหนักบรรทุกจากภายนอกมีค่าเข้าใกล้ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติ ดังนั้น จึงได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางจากนักวิจัย ทั้งนี้ ได้มีการสรุป ทบทวน และวิเคราะห์ผลการศึกษาวิจัยในอดีตอย่างต่อเนื่องและมีรายงานไว้อย่างละเอียดโดย Johnston [19] Thurlimann [20] และ Wang *et al.* [21]

ตารางที่ 1 สัญลักษณ์และความหมายของเงื่อนไขแบบคลาสสิก

| สัญลักษณ์ | ความหมาย                                             |
|-----------|------------------------------------------------------|
| C         | Clamped condition: เงื่อนไขแบบยึดแน่น                |
| S         | Simple or hinged condition: เงื่อนไขแบบยึดหมุน       |
| G         | Guided condition: เงื่อนไขแบบล่อเลื่อนโลลในรางนำร่อง |
| F         | Free end condition: เงื่อนไขแบบปลายอิสระ             |

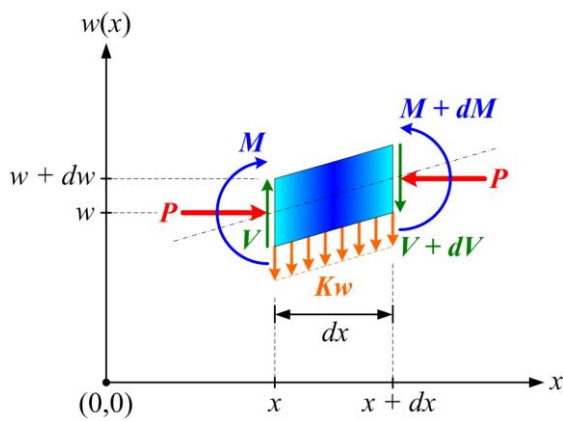
ตารางที่ 2 เสาที่มีการยึดรั้งแบบต่อเนื่องและมีเงื่อนไขของปลายเสาแบบคลาสสิก

| กรณี | ลักษณะเงื่อนไขการยึดรั้งที่ปลายเสา               |
|------|--------------------------------------------------|
| 1    | C - C Column with a continuous elastic restraint |
| 2    | S - C Column with a continuous elastic restraint |
| 3    | G - C Column with a continuous elastic restraint |
| 4    | F - C Column with a continuous elastic restraint |
| 5    | S - S Column with a continuous elastic restraint |
| 6    | G - S Column with a continuous elastic restraint |
| 7    | F - S Column with a continuous elastic restraint |
| 8    | G - G Column with a continuous elastic restraint |
| 9    | F - G Column with a continuous elastic restraint |
| 10   | F - F Column with a continuous elastic restraint |

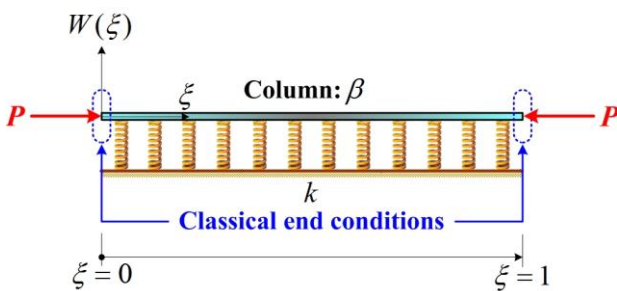


รูปที่ 11 แบบจำลองปัญหาเพื่อการวิเคราะห์

สำหรับบทความนี้เป็นการศึกษาปัญหาการโก่งเดาะของเสาแบบออยเลอร์ (Euler column) [1], [3] ที่มีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่องตลอดความยาวช่วงเสาโดยจำลองให้เป็นฐานรากยึดหยุ่นแบบวงเคิลเลอร์ [7], [8] และมีปลายเสาทั้ง 2 ข้าง ยึดรั้งด้วยเงื่อนไขแบบคลาสสิกใด ๆ (Arbitrary classical end conditions) อาทิเช่น ปลายยึดหมุน ปลายยึดแน่น ปลายเลื่อนไถลในรางนาร่อง และปลายอิสระ ซึ่งมีสัญลักษณ์ระบุไว้ตามตารางที่ 1 และมีแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์แสดงในรูปที่ 11 การศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาใช้ระเบียบวิธีการเชิงวิเคราะห์ (Analytical method) สำหรับเงื่อนไขการยึดรั้งปลายเสาที่แตกต่างกันใน 10 กรณี ดังตารางที่ 2 โดยมุ่งเน้นพิสูจน์หาเกณฑ์เสถียรภาพแม่นยำตรงและฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะในแต่ละกรณีของเสาที่พิจารณา



รูปที่ 12 สมดุลแรงของผังวัตถุอิสระ



รูปที่ 13 พารามิเตอร์ไร้มิติเพื่อการวิเคราะห์

## 2. ระเบียบวิธีการวิเคราะห์

จากรูปที่ 11 กำหนดให้เสามีความยาว  $L$  ความแข็งแรง  $EI$  อยู่

ภายใต้ผลของแรงอัดกระทำตามแนวแกนเสา  $P$  โดย  $E$  และ  $I$  คือ ค่ายังก์มอดูลัส (Young's modulus) และโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดเสา ตามลำดับ โดยจำลองปัญหาให้เป็นกรณีของเสาวางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่นประเภทวงเคิลเลอร์ที่มีค่าความแข็งแรงหรือมอดูลัสของฐานราก (Subgrade stiffness or modulus)  $K$  และเสามีปริมาณการโก่งตัว (Deflection) ที่พิกัด  $x$  ใด ๆ คือ  $w(x)$  และเมื่อพิจารณาสมดุลของแรง (Equilibrium of forces) ของผังวัตถุอิสระ (Free-body-diagram) ในทิศทางแนวขวางกับแนวแกนเสาสำหรับชิ้นส่วนความยาวน้อย ๆ (Infinitesimal length)  $dx$  ดังในรูปที่ 12 โดย  $M$  คือ โมเมนต์ดัดและ  $V$  คือ แรงเฉือนบนหน้าตัดเสา พบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ควบคุมปัญหาการโก่งเดาะคือ [3] – [5]

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{K}{EI} w(x) = 0 \quad (1)$$

กำหนดให้พารามิเตอร์ไร้มิติของพิกัด  $\xi$  และปริมาณการโก่งตัว  $W(\xi)$  ในรูปที่ 13 มีนิยามดังนี้ [22]

$$\xi = x/L \text{ และ } W(\xi) = w(x)/L \text{ เมื่อ } 0 \leq \xi, W(\xi) \leq 1 \quad (2)$$

ดังนั้นแล้ว สมการ (1) สามารถเขียนได้ใหม่ในรูปแบบสมการไร้มิติเป็น

$$\frac{d^4 W(\xi)}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} + kW(\xi) = 0 \quad (3)$$

โดยที่ ค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพ (Stability parameter:  $\beta$ ) พารามิเตอร์แสดงอัตราส่วนของน้ำหนักบรรทุก ( $\alpha$ ) น้ำหนักบรรทุกวิกฤติ ( $P_{cr}$ ) และพารามิเตอร์ความแข็งแรงของฐานราก ( $k$ ) มีนิยามตามลำดับดังต่อไปนี้

$$\beta = \pi\sqrt{\alpha} \quad (4)$$

$$\alpha = P/P_{cr} \quad (5)$$

$$P_{cr} = \pi^2 EI/L^2 \quad (6)$$

$$k = KL^4/EI \quad (7)$$

การหาผลเฉลยของสมการ (3) ทำได้ด้วยการสมมติให้  $W(\xi) = e^{r\xi}$  [23] เมื่อ  $r$  เรียกว่า ค่าเฉพาะจริงหรือค่าเฉพาะ (Eigen- or characteristic values) และนำไปสู่สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

$$r^4 + \beta^2 r^2 + k = 0 \quad (8)$$

ซึ่งมีรากคำตอบของสมการ (Roots) คือ [24]

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -r_2 = R_1 i \\ r_3 &= -r_4 = R_2 i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

โดยที่  $i = \sqrt{-1}$  และ

$$R_{1,2} = \sqrt{\frac{\beta^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{2}\right)^2 - k}} \quad (10)$$

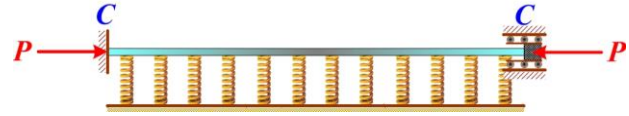
ผลเฉลยทั่วไป (General solution) ของสมการ (3) จึงเขียนได้เป็น

$$W(\xi) = C_1 \cos R_1 \xi + C_2 \sin R_1 \xi + C_3 \cos R_2 \xi + C_4 \sin R_2 \xi \quad (11)$$

ทั้งนี้ ค่า  $C_1$  ถึง  $C_4$  เป็นค่าคงที่ไม่ทราบค่าโดยสามารถหาค่ามาได้ภายหลังจากการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ของปลายเสาทั้ง 2 ข้าง ที่  $\xi = 0$  และ  $\xi = 1$

เนื่องจากบทความนี้สนใจศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาการโก่งเดาะของเสาที่มีการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นต่อเนื่องตลอดความยาวช่วงเสาใน 10 กรณี ซึ่งครอบคลุมทุกเงื่อนไขของปลายเสาที่มีการยึดรั้งแบบคลาสสิกที่แตกต่างกันทั้งหมด (All possible different cases) ดังได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 โดยมีวัตถุประสงค์หลักเพื่อพิสูจน์หาเกณฑ์เสถียรภาพแม่นยำตรง (Exact stability criteria) และฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะในสมการรูปแบบปิด (Closed-form buckling shape function expressions) ที่สอดคล้องกับเสาในแต่ละกรณี ดังนั้นแล้ว การแก้ปัญหาของเสาในแต่ละกรณีจึงจำเป็นต้องทราบเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายเสาแต่ละข้างดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

กรณีที่ 1: เสา C-C และมีการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 14)

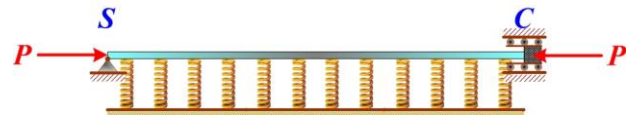


รูปที่ 14 เสา C-C และมีการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นต่อเนื่อง

$$W(0) = \frac{dW(0)}{d\xi} = 0 \quad (12)$$

$$W(1) = \frac{dW(1)}{d\xi} = 0 \quad (13)$$

กรณีที่ 2: เสา S-C และมีการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 15)

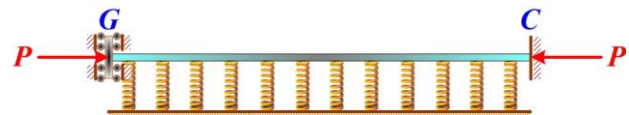


รูปที่ 15 เสา S-C และมีการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นต่อเนื่อง

$$W(0) = \frac{d^2W(0)}{d\xi^2} = 0 \quad (14)$$

$$W(1) = \frac{dW(1)}{d\xi} = 0 \quad (15)$$

กรณีที่ 3: เสา G-C และมีการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 16)

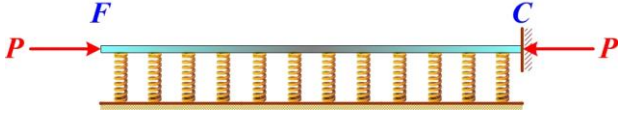


รูปที่ 16 เสา G-C และมีการยึดรั้งแบบยืดหยุ่นต่อเนื่อง

$$\frac{dW(0)}{d\xi} = \frac{d^3W(0)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(0)}{d\xi} = 0 \quad (16)$$

$$W(1) = \frac{dW(1)}{d\xi} = 0 \quad (17)$$

กรณีี่ 4: เสาค  $F-C$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 17)

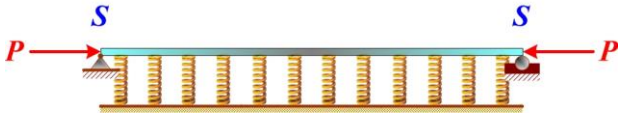


รูปที่ 17 เสาค  $F-C$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง

$$\frac{d^2W(0)}{d\xi^2} = \frac{d^3W(0)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(0)}{d\xi} = 0 \quad (18)$$

$$W(1) = \frac{dW(1)}{d\xi} = 0 \quad (19)$$

กรณีี่ 5: เสาค  $S-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 18)

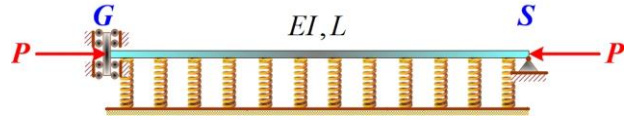


รูปที่ 18 เสาค  $S-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง

$$W(0) = \frac{d^2W(0)}{d\xi^2} = 0 \quad (20)$$

$$W(1) = \frac{d^2W(1)}{d\xi^2} = 0 \quad (21)$$

กรณีี่ 6: เสาค  $G-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 19)

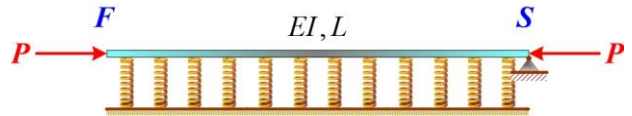


รูปที่ 19 เสาค  $G-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง

$$\frac{dW(0)}{d\xi} = \frac{d^3W(0)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(0)}{d\xi} = 0 \quad (22)$$

$$W(1) = \frac{d^2W(1)}{d\xi^2} = 0 \quad (23)$$

กรณีี่ 7: เสาค  $F-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 20)

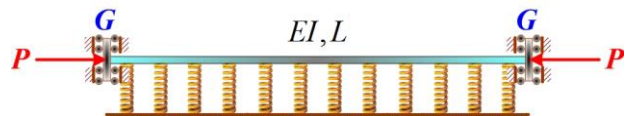


รูปที่ 20 เสาค  $F-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง

$$\frac{d^2W(0)}{d\xi^2} = \frac{d^3W(0)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(0)}{d\xi} = 0 \quad (24)$$

$$W(1) = \frac{d^2W(1)}{d\xi^2} = 0 \quad (25)$$

กรณีี่ 8: เสาค  $G-G$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 21)

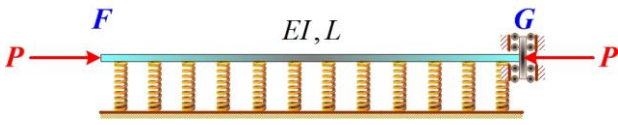


รูปที่ 21 เสาค  $G-G$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง

$$\frac{dW(0)}{d\xi} = \frac{d^3W(0)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(0)}{d\xi} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{dW(1)}{d\xi} = \frac{d^3W(1)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(1)}{d\xi} = 0 \quad (27)$$

กรณีที่ 9: เสาค  $F-G$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 22)

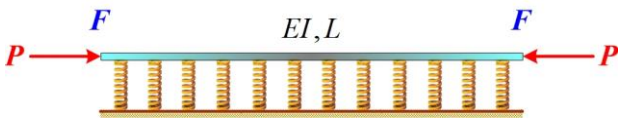


รูปที่ 22 เสาค  $F-G$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง

$$\frac{d^2W(0)}{d\xi^2} = \frac{d^3W(0)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(0)}{d\xi} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{dW(1)}{d\xi} = \frac{d^3W(1)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(1)}{d\xi} = 0 \quad (29)$$

กรณีที่ 10: เสาค  $F-F$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 23)



รูปที่ 23 เสาค  $F-F$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง

$$\frac{d^2W(0)}{d\xi^2} = \frac{d^3W(0)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(0)}{d\xi} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{d^2W(1)}{d\xi^2} = \frac{d^3W(1)}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dW(1)}{d\xi} = 0 \quad (31)$$

### 3. เกณฑ์เสถียรภาพและฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะ

สำหรับการหาเกณฑ์เสถียรภาพและฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะของเสาในแต่ละกรณีสามารถอธิบายและสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้ (1) ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปลายเสาที่  $\xi = 0$  และ  $\xi = 1$  จึงนำไปสู่ระบบสมการร่วมเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ (Homogeneous linear equations system) ในพจน์ของค่าคงที่ไม่ทราบค่า ( $C_i$ ) (2) ทำการจัดระบบสมการร่วมให้อยู่ในรูปแบบสมการแมทริกซ์ (Matrix equation) [25] (3) เกณฑ์เสถียรภาพของเสาได้จากการกำหนดให้ค่า

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าเป็นศูนย์ (4) ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะของเสาหาได้จากการกำหนดค่าคงที่ไม่ทราบค่า ( $C_i$ ) ตัวใดตัวหนึ่งที่ไม่เป็นศูนย์ให้มีค่าที่แน่นอนใด ๆ ค่าหนึ่ง เพื่อความสะดวกจึงกำหนดให้มีค่าเป็น 1 หลังจากนั้นทำการแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าคงที่ไม่ทราบค่าที่เหลือ

จากระเบียบขั้นตอนดังกล่าวข้างต้นจึงหาเกณฑ์เสถียรภาพและฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะของเสาในแต่ละกรณีได้ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1: เสาค  $C-C$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 14)

จากสมการ (11) สมการ (12) และสมการ (13) จึงได้

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (32)$$

$$C_2 R_1 + C_4 R_2 = 0 \quad (33)$$

$$C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1 + C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2 = 0 \quad (34)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1 + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2 = 0 \quad (35)$$

ให้แทนสมการ (32) และสมการ (33) สำหรับ  $C_3$  และ  $C_4$  ตามลำดับ ลงในสมการ (34) และสมการ (35) และจัดในรูปแบบสมการแมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} R_2 (\cos R_1 - \cos R_2) & R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2 \\ R_1 \sin R_1 - R_2 \sin R_2 & -R_1 (\cos R_1 - \cos R_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

กำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (36) ให้มีค่าเป็นศูนย์ ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$2R_1 R_2 (1 - \cos R_1 \cos R_2) - (R_1^2 + R_2^2) \sin R_1 \sin R_2 = 0 \quad (37)$$

ดังนั้น สมการ (37) จึงเป็นเกณฑ์เสถียรภาพของเสาในกรณีที่ 1

กำหนดให้  $C_1 = 1$  ในสมการ (36) และสมการ (11) ร่วมกับ  
พิจารณาสมการ (32) และสมการ (33) จึงได้ฟังก์ชันรูปร่างการโก่ง  
เดาะ

$$W(\xi) = \cos R_1 \xi + C_2 \sin R_1 \xi - \cos R_2 \xi + C_4 \sin R_2 \xi \quad (38)$$

$$C_2 = -\frac{R_2 (\cos R_1 - \cos R_2)}{R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2} \quad (39)$$

$$C_4 = \frac{R_1 (\cos R_1 - \cos R_2)}{R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2} \quad (40)$$

กรณีที่ 2: เสาค S-C และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 15)

พิจารณาสมการ (11) สมการ (14) และสมการ (15) จึงนำไปสู่  
สมการ

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (41)$$

$$C_1 R_1^2 + C_3 R_2^2 = 0 \quad (42)$$

$$C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1 + C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2 = 0 \quad (43)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1 + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2 = 0 \quad (44)$$

เมื่อทำการแก้สมการ (41) และสมการ (42) ผลลัพธ์คือ

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (45)$$

ให้แทนที่สมการ (45) กลับลงสู่สมการ (43) และสมการ (44)  
ผลคือ

$$\begin{bmatrix} \sin R_1 & \sin R_2 \\ R_1 \cos R_1 & R_2 \cos R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

และเมื่อกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ  
(46) ให้มีค่าเป็นศูนย์จึงได้เกณฑ์เสถียรภาพดังนี้

$$R_2 \tan R_1 - R_1 \tan R_2 = 0 \quad (47)$$

กำหนดให้  $C_2 = 1$  ลงในสมการ (46) และสมการ (11) และจาก  
การพิจารณาสมการ (45) จึงได้ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะ

$$W(\xi) = \sin R_1 \xi - \frac{\sin R_1}{\sin R_2} \sin R_2 \xi \quad (48)$$

กรณีที่ 3: เสาค G-C และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 16)  
เมื่อแทนสมการ (11) ลงในสมการ (16) และสมการ (17) ผลที่ได้คือ

$$C_2 R_1 + C_4 R_2 = 0 \quad (49)$$

$$C_2 R_1 (R_1^2 - \beta^2) + C_4 R_2 (R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (50)$$

$$C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1 + C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2 = 0 \quad (51)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1 + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2 = 0 \quad (52)$$

จากการพิจารณาสมการ (49) และสมการ (50) พบว่า

$$C_2 = C_4 = 0 \quad (53)$$

โดยใช้สมการ (53) ดังนั้น สมการ (51) และสมการ (52) เขียน  
ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \cos R_1 & \cos R_2 \\ R_1 \sin R_1 & R_2 \sin R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

เกณฑ์เสถียรภาพได้จากการกำหนดให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ  
แมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (54) เป็นศูนย์

$$R_2 \tan R_2 - R_1 \tan R_1 = 0 \quad (55)$$

โดยกำหนดให้  $C_1 = 1$  ในสมการ (54) และสมการ (11) และ  
พิจารณาสมการ (53) จึงได้

$$W(\xi) = \cos R_1 \xi - \frac{\cos R_1}{\cos R_2} \cos R_2 \xi \quad (56)$$

$$-R_1 R_2 \sin R_1 \sin R_2 [(R_1^2 + R_2^2) - 2\beta^2] = 0 \quad (64)$$

กรณีที่ 4: เสาค  $F-C$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 17)  
จากสมการ (11) จึงเขียนสมการ (18) และสมการ (19) ได้เป็น

$$C_1 R_1^2 + C_3 R_2^2 = 0 \quad (57)$$

$$W(\xi) = \cos R_1 \xi + C_2 \sin R_1 \xi - \frac{R_1^2}{R_2^2} \cos R_2 \xi + C_4 \sin R_2 \xi \quad (65)$$

$$C_2 R_1 (R_1^2 - \beta^2) + C_4 R_2 (R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (58)$$

$$C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1 + C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2 = 0 \quad (59)$$

$$C_2 = \frac{(R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2)(R_2^2 - \beta^2)}{R_2 [(R_2^2 - \beta^2) \cos R_1 - (R_1^2 - \beta^2) \cos R_2]} \quad (66)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1 + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2 = 0 \quad (60)$$

$$C_4 = -\frac{R_1 (R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2)(R_1^2 - \beta^2)}{R_2 [(R_2^2 - \beta^2) \cos R_1 - (R_1^2 - \beta^2) \cos R_2]} \quad (67)$$

ด้วยการพิจารณาสมการ (57) และสมการ (58)

$$C_3 = -C_1 \frac{R_1^2}{R_2^2} \quad (61)$$

กรณีที่ 5: เสาค  $S-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 18)  
โดยการแทนสมการ (11) ลงในสมการ (20) และสมการ (21) จึงนำไปสู่

$$C_4 = -C_2 \frac{R_1 (R_1^2 - \beta^2)}{R_2 (R_2^2 - \beta^2)} \quad (62)$$

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (68)$$

$$C_1 R_1^2 + C_3 R_2^2 = 0 \quad (69)$$

เมื่อทำการแทนสมการ (61) และสมการ (62) ลงสู่สมการ (59) และสมการ (60) ผลลัพธ์คือ

$$C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1 + C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2 = 0 \quad (70)$$

$$\begin{bmatrix} (R_2^2 \cos R_1 - R_1^2 \cos R_2) \times (R_2^2 - \beta^2) & R_2 [R_2 (R_2^2 - \beta^2) \sin R_1 - R_1 (R_1^2 - \beta^2) \sin R_2] \\ (R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2) \times (R_2^2 - \beta^2) & -R_2 [(R_2^2 - \beta^2) \cos R_1 - (R_1^2 - \beta^2) \cos R_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

$$(C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1) R_1^2 + (C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2) R_2^2 = 0 \quad (71)$$

จากการแก้สมการ (68) และสมการ (69)

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (72)$$

กำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (63) ให้มีค่าเป็นศูนย์จึงได้เกณฑ์เสถียรภาพเป็น

และทำการแทนที่สมการ (72) กลับลงในสมการ (70) และสมการ (71) ได้

$$(R_1^4 + R_2^4) - \beta^2 (R_1^2 + R_2^2) - \cos R_1 \cos R_2 [2R_1^2 R_2^2 - \beta^2 (R_1^2 + R_2^2)]$$

$$\begin{bmatrix} \sin R_1 & \sin R_2 \\ R_1^2 \sin R_1 & R_2^2 \sin R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (73)$$

เมื่อให้ดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (73) มีค่าเป็นศูนย์ ผลลัพธ์คือ

$$\sin R_1 \sin R_2 = 0 \quad (74)$$

ในที่นี้ สมการ (74) เป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ  $\sin R_1 = 0$  หรือ  $\sin R_2 = 0$  และจากการพิจารณาสมการ (10) โดยสมมติให้  $k = 0$  พบว่า

$$R_1 = 0, R_2 = \beta \quad (75)$$

เนื่องจากต้องการหาค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพที่ไม่เป็นศูนย์ ( $\beta \neq 0$ ) ดังนั้น เกณฑ์เสถียรภาพของเสาในกรณีนี้คือ

$$\sin R_2 = 0 \quad (76)$$

ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะหาได้จากการกำหนดให้  $C_2 = 1$  ในสมการ (73) และสมการ (11) และพิจารณาสมการ (72)

$$W(\xi) = \sin R_1 \xi - \frac{\sin R_1}{\sin R_2} \sin R_2 \xi \quad (77)$$

กรณีที่ 6: เสา  $G-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 19)

เมื่อแทนสมการ (11) ลงในสมการ (22) และสมการ (23) จึงได้

$$C_2 R_1 + C_4 R_2 = 0 \quad (78)$$

$$C_2 R_1 (R_1^2 - \beta^2) + C_4 R_2 (R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (79)$$

$$C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1 + C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2 = 0 \quad (80)$$

$$(C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1) R_1^2 + (C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2) R_2^2 = 0 \quad (81)$$

และจากการพิจารณาสมการ (78) และสมการ (79) พบว่า

$$C_2 = C_4 = 0 \quad (82)$$

โดยการแทนสมการ (82) ในสมการ (80) และสมการ (81) ได้

$$\begin{bmatrix} \cos R_1 & \cos R_2 \\ R_1^2 \cos R_1 & R_2^2 \cos R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (83)$$

กำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (83) มีค่าเป็นศูนย์ จึงนำไปสู่สมการ

$$\cos R_1 \cos R_2 = 0 \quad (84)$$

ด้วยเหตุผลเดียวกับเงื่อนไขของสมการ (75) และสมการ (76) จึงสรุปได้ว่า เกณฑ์เสถียรภาพในกรณีนี้คือ

$$\cos R_2 = 0 \quad (85)$$

จากการกำหนดให้  $C_1 = 1$  ลงในสมการ (83) และสมการ (11) และพิจารณาสมการ (82) จึงได้ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะเป็นดังนี้

$$W(\xi) = \cos R_1 \xi - \frac{\cos R_1}{\cos R_2} \cos R_2 \xi \quad (86)$$

กรณีที่ 7: เสา  $F-S$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 20)

โดยใช้สมการ (11) ร่วมกับสมการ (24) และสมการ (25) จึงนำไปสู่

$$C_1 R_1^2 + C_3 R_2^2 = 0 \quad (87)$$

$$C_2 R_1 (R_1^2 - \beta^2) + C_4 R_2 (R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (88)$$

$$C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1 + C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2 = 0 \quad (89)$$

$$(C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1) R_1^2 + (C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2) R_2^2 = 0 \quad (90)$$

และเมื่อพิจารณาสมการ (87) และสมการ (88)

$$C_3 = -C_1 \frac{R_1^2}{R_2^2} \quad (91)$$

$$C_4 = -C_2 \frac{R_1(R_1^2 - \beta^2)}{R_2(R_2^2 - \beta^2)} \quad (92)$$

ให้แทนสมการ (91) และสมการ (92) สำหรับ  $C_3$  และ  $C_4$  ตามลำดับ ลงสู่สมการ (89) และสมการ (90) จึงได้

$$\begin{bmatrix} (R_2^2 \cos R_1 - R_1^2 \cos R_2) \times (R_2^2 - \beta^2) & R_2[R_2(R_2^2 - \beta^2) \sin R_1 - R_1(R_1^2 - \beta^2) \sin R_2] \\ R_1(\cos R_1 - \cos R_2) \times (R_2^2 - \beta^2) & R_1(R_2^2 - \beta^2) \sin R_1 - R_2(R_1^2 - \beta^2) \sin R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (93)$$

เมื่อให้ค่าเทอมิแนนท์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (93) มีค่าเป็นศูนย์ จึงได้เกณฑ์เสถียรภาพดังนี้

$$R_1(R_2^2 - \beta^2) \tan R_1 - R_2(R_1^2 - \beta^2) \tan R_2 = 0 \quad (94)$$

โดยการกำหนดให้  $C_1 = 1$  ในสมการ (93) และสมการ (11) ร่วมกับการใช้สมการ (91) และสมการ (92) จึงได้ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเตาะเป็น

$$W(\xi) = \cos R_1 \xi + C_2 \sin R_1 \xi - \frac{R_1^2}{R_2^2} \cos R_2 \xi + C_4 \sin R_2 \xi \quad (95)$$

$$C_2 = -\frac{R_1(\cos R_1 - \cos R_2)(R_2^2 - \beta^2)}{R_1(R_2^2 - \beta^2) \sin R_1 - R_2(R_1^2 - \beta^2) \sin R_2} \quad (96)$$

$$C_4 = \frac{R_1^2(\cos R_1 - \cos R_2)(R_1^2 - \beta^2)}{R_2[R_1(R_2^2 - \beta^2) \sin R_1 - R_2(R_1^2 - \beta^2) \sin R_2]} \quad (97)$$

กรณีที่ 8: เสาค  $G-G$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 21)

พิจารณาสมการ (11) สมการ (26) และสมการ (27) จึงได้

$$C_2 R_1 + C_4 R_2 = 0 \quad (98)$$

$$C_2 R_1(R_1^2 - \beta^2) + C_4 R_2(R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (99)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1 + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2 = 0 \quad (100)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1(R_1^2 - \beta^2) + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2(R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (101)$$

จากการแก้สมการ (98) และสมการ (99) พบว่า

$$C_2 = C_4 = 0 \quad (102)$$

เมื่อแทนสมการ (102) กลับลงในสมการ (100) และสมการ (101) ได้

$$\begin{bmatrix} R_1 \sin R_1 & R_2 \sin R_2 \\ R_1(R_1^2 - \beta^2) \sin R_1 & R_2(R_2^2 - \beta^2) \sin R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (103)$$

โดยพิจารณากำหนดให้ค่าเทอมิแนนท์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (103) เป็นศูนย์ และด้วยเหตุผลเดียวกับเสาในกรณี 5 จึงได้เกณฑ์เสถียรภาพ

$$\sin R_2 = 0 \quad (104)$$

และเมื่อกำหนดให้  $C_1 = 1$  ในสมการ (103) และสมการ (11) และพิจารณาสมการ (102) จึงได้

$$W(\xi) = \cos R_1 \xi - \frac{R_1 \sin R_1}{R_2 \sin R_2} \cos R_2 \xi \quad (105)$$

กรณี 9: เสาค  $F-G$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 22)

จากสมการ (11) สมการ (28) และสมการ (29) พบว่า

$$C_1 R_1^2 + C_3 R_2^2 = 0 \quad (106)$$

$$C_2 R_1 (R_1^2 - \beta^2) + C_4 R_2 (R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (107)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1 + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2 = 0 \quad (108)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1 (R_1^2 - \beta^2) + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2 (R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (109)$$

โดยพิจารณาสมการ (108) และสมการ (109) ได้

$$C_3 = -C_1 \frac{R_1^2}{R_2^2} \quad (110)$$

$$C_4 = -C_2 \frac{R_1 (R_1^2 - \beta^2)}{R_2 (R_2^2 - \beta^2)} \quad (111)$$

เมื่อแทน  $C_3$  และ  $C_4$  จากสมการ (110) และสมการ (111) ตามลำดับ ลงสู่ในสมการ (108) และสมการ (109) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\begin{bmatrix} (R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2) \times (R_2^2 - \beta^2) & -R_2 [(R_2^2 - \beta^2) \cos R_1 - (R_1^2 - \beta^2) \cos R_2] \\ R_2 (R_1^2 - \beta^2) \sin R_1 & -R_2 (\cos R_1 - \cos R_2) \times (R_1^2 - \beta^2) \\ -R_1 (R_2^2 - \beta^2) \sin R_2 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (112)$$

จากการกำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (112) มีค่าเป็นศูนย์ พบว่า

$$R_2 (R_1^2 - \beta^2) \tan R_1 - R_1 (R_2^2 - \beta^2) \tan R_2 = 0 \quad (113)$$

กำหนดให้  $C_1 = 1$  ในสมการ (112) และสมการ (11) และพิจารณาสมการ (110) และสมการ (114) จึงได้ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะดังนี้

$$W(\xi) = \cos R_1 \xi + C_2 \sin R_1 \xi - \frac{R_1^2}{R_2^2} \cos R_2 \xi + C_4 \sin R_2 \xi \quad (114)$$

$$C_2 = \frac{(R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2)(R_2^2 - \beta^2)}{R_2 [(R_2^2 - \beta^2) \cos R_1 - (R_1^2 - \beta^2) \cos R_2]} \quad (115)$$

$$C_4 = -\frac{R_1 (R_2 \sin R_1 - R_1 \sin R_2)(R_1^2 - \beta^2)}{R_2^2 [(R_2^2 - \beta^2) \cos R_1 - (R_1^2 - \beta^2) \cos R_2]} \quad (116)$$

กรณีที่ 10: เสาค  $F - F$  และมีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่อง (รูปที่ 23)

โดยการแทนสมการ (11) ลงในสมการ (30) และสมการ (31) จึงนำไปสู่

$$C_1 R_1^2 + C_3 R_2^2 = 0 \quad (117)$$

$$C_2 R_1 (R_1^2 - \beta^2) + C_4 R_2 (R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (118)$$

$$(C_1 \cos R_1 + C_2 \sin R_1) R_1^2 + (C_3 \cos R_2 + C_4 \sin R_2) R_2^2 = 0 \quad (119)$$

$$(C_1 \sin R_1 - C_2 \cos R_1) R_1 (R_1^2 - \beta^2) + (C_3 \sin R_2 - C_4 \cos R_2) R_2 (R_2^2 - \beta^2) = 0 \quad (120)$$

และจากสมการ (117) และสมการ (118) พบว่า

$$C_3 = -C_1 \frac{R_1^2}{R_2^2} \quad (121)$$

$$C_4 = -C_2 \frac{R_1 (R_1^2 - \beta^2)}{R_2 (R_2^2 - \beta^2)} \quad (122)$$

เมื่อแทนสมการ (121) และสมการ (122) กลับลงในสมการ (119) และสมการ (120) จึงได้

$$\begin{bmatrix} R_1 (\cos R_1 - \cos R_2) \times (R_2^2 - \beta^2) & R_1 (R_2^2 - \beta^2) \sin R_1 \\ R_2 (R_1^2 - \beta^2) \sin R_1 & -R_2 (\cos R_1 - \cos R_2) \times (R_1^2 - \beta^2) \\ -R_1 (R_2^2 - \beta^2) \sin R_2 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (123)$$

และกำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (123) มีค่าเป็นศูนย์ จึงได้เกณฑ์เสถียรภาพดังนี้

$$2R_1R_2(R_1^2 - \beta^2)(R_2^2 - \beta^2)\cos R_1\cos R_2 - 2R_1^3R_2^3 + \beta^2(\beta^4 - 3R_1^2R_2^2)\sin R_1\sin R_2 = 0 \quad (124)$$

จากนั้น กำหนดให้  $C_1 = 1$  ลงในสมการ (123) และสมการ (11) และพิจารณาสมการ (121) และสมการ (122) เช่นนี้แล้ว ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะคือ

$$W(\xi) = \cos R_1\xi + C_2 \sin R_1\xi - \frac{R_1^2}{R_2^2} \cos R_2\xi + C_4 \sin R_2\xi \quad (125)$$

$$C_2 = -\frac{R_1(\cos R_1 - \cos R_2)(R_2^2 - \beta^2)}{R_1(R_2^2 - \beta^2)\sin R_1 - R_2(R_1^2 - \beta^2)\sin R_2} \quad (126)$$

$$C_4 = \frac{R_1^2(\cos R_1 - \cos R_2)(R_2^2 - \beta^2)}{R_2[R_1(R_2^2 - \beta^2)\sin R_1 - R_2(R_1^2 - \beta^2)\sin R_2]} \quad (127)$$

#### 4. บทวิเคราะห์และอภิปราย

ผลการวิเคราะห์และพิสูจน์เกณฑ์เสถียรภาพและฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะของเสาทั้ง 10 กรณี ได้ทำการสรุปไว้ในตารางที่ 3 จากการสำรวจผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับปัญหาต่างๆ ของเสาوابนฐานรากยึดหยุ่นเช่น ปัญหาการตัด การสั่นและการโก่งเดาะสามารถกล่าวได้ว่า ไม่ปรากฏมีการศึกษาและนำเสนอปัญหาของเสาที่มีลักษณะของเงื่อนไขดังในกรณี 7 ถึง 9

สำหรับเกณฑ์เสถียรภาพที่ได้มาโดยส่วนใหญ่ พบว่า มีรูปแบบเป็นสมการอดิศัยที่มีลักษณะไร้เชิงเส้นเป็นอย่างมาก (Highly nonlinear transcendental equation) ซึ่งแตกต่างไปจากกรณีของเสาที่ปราศจากการรองรับด้วยฐานรากยึดหยุ่น [3] – [5], [22] ยกเว้น เสาในกรณีที่ 5 6 และ 8

ตารางที่ 3 สรุปเกณฑ์เสถียรภาพและฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะ

| กรณี | เงื่อนไขที่ปลายเสา | เกณฑ์เสถียรภาพ | ฟังก์ชันการโก่งเดาะ |
|------|--------------------|----------------|---------------------|
|      |                    | สมการที่       | สมการที่            |
| 1    | C - C              | 37             | 38                  |
| 2    | S - C              | 47             | 48                  |
| 3    | G - C              | 55             | 56                  |
| 4    | F - C              | 64             | 65                  |
| 5    | S - S              | 76             | 77                  |
| 6    | G - S              | 85             | 86                  |
| 7    | F - S              | 94             | 95                  |
| 8    | G - G              | 104            | 105                 |
| 9    | F - G              | 113            | 114                 |
| 10   | F - F              | 124            | 125                 |

เมื่อพิจารณากำหนดให้พารามิเตอร์ความแกร่งของฐานรากมีค่าเป็นศูนย์ ( $k = 0$ ) ซึ่งให้ค่า  $R_1 = 0$  และ  $R_2 = \beta$  ดังในสมการ (75) เช่นนี้แล้ว ปัญหาของเสาที่พิจารณาในที่นี้จึงลดรูปกลายมาเป็นปัญหาใหม่ของเสาที่ปราศจากการรองรับด้วยฐานรากยึดหยุ่นและเมื่อแทนสมการ (75) ลงในสมการ (11) พบว่า ฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะทั่วไปที่ได้คือ

$$W(\xi) = C_1 + C_3 \cos \beta\xi + C_4 \sin \beta\xi \quad (128)$$

สังเกตว่า สมการ (128) ไม่เป็นจริงตรงตามสมการของฟังก์ชันรูปร่างการโก่งเดาะของเสาที่ปราศจากการรองรับด้วยฐานรากยึดหยุ่น ซึ่งควรมีรูปแบบสมการเป็นดังนี้ [3-5,22]

$$W(\xi) = C_1 + C_2\xi + C_3 \cos \beta\xi + C_4 \sin \beta\xi \quad (129)$$

และนอกจากนี้แล้ว สมการ (128) มีจำนวนค่าคงที่ไม่ทราบค่า (Unknown constants) เพียง 3 จำนวน ซึ่งไม่เพียงพอในการสอดคล้องกับจำนวนของสมการเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่มี 4 เงื่อนไขหรือในความหมายทางคณิตศาสตร์อาจกล่าวได้ว่า มีจำนวนสมการมากเกินไปสำหรับการหาตัวไม่ทราบค่าที่ต้องการ ส่งผลทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ไม่มีลักษณะของความเป็นหนึ่งเดียวหรือมีความเป็นเอกลักษณ์ (Uniqueness)

ความแตกต่างระหว่างสมการ (128) และสมการ (129) สามารถทำการอธิบายเหตุผลได้โดยพิจารณาจากที่มาของสมการคือ รูปแบบสมการ (129) เป็นผลมาจากสมการลักษณะเฉพาะดังนี้ [22]

$$r^4 + \beta^2 r^2 = r^2(r^2 + \beta^2) = 0 \quad (130)$$

และมีรากคำตอบของสมการ คือ

$$\left. \begin{array}{l} r_{1,2} = 0 \\ r_{3,4} = \pm \beta i \end{array} \right\} \quad (131)$$

โดยมีรากคำตอบที่ซ้ำกัน 1 คู่ (Double repeated roots) คือ  $r_1 = 0$  และ  $r_2 = 0$  เช่นนี้แล้ว รูปแบบของ  $W(\xi)$  จึงเป็นไปตามสมการ (129) [23] ซึ่งแตกต่างไปจากสมการ (11) ที่ได้จากการพิจารณาสมการลักษณะเฉพาะในสมการ (8) และมีรากคำตอบที่ไม่ซ้ำกันหรือแตกต่างกันทั้งหมด (All distinct roots) ดังแสดงในสมการ (9) ดังนั้น เมื่อกำหนดให้  $k = 0$  ลงในสมการ (10) จึงได้รากคำตอบเช่นเดียวกับสมการ (131) จึงไม่สามารถใช้สมการ (11) ในกรณีที่  $k = 0$  ได้ ซึ่งสมการ (128) เป็นผลมาจากการแทนสมการ (75) ที่ได้จากการกำหนดให้  $k = 0$  ลงในสมการ (11)

ดังนั้น หากต้องการคำนวณค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพในเชิงตัวเลข (Numerical values) สำหรับปัญหาของเสาที่ปราศจากการรองรับด้วยฐานรากยึดหยุ่น ( $k = 0$ ) จากเกณฑ์เสถียรภาพที่ได้จากการพิจารณาปัญหาของเสาว่างบนฐานรากยึดหยุ่นจึงไม่สามารถแทนค่า  $k = 0$  ได้โดยตรง แต่ยังคงสามารถทำได้ด้วยการกำหนดให้ค่า  $k$  มีค่าที่น้อยมากๆ ( $k \rightarrow 0$ ) ซึ่งเปรียบเสมือนว่าไม่มีผลกระทบจากฐานรากยึดหยุ่นที่มีต่อผลการตอบสนองของเสา

## 5. บทสรุป

ค่าน้ำหนักบรรทุกทุกโก่งเดาะวิกฤติมีลักษณะเป็นค่าเฉพาะประจำตัวของเสาที่จำเป็นต้องพิจารณาในการวิเคราะห์และออกแบบเสายาวหรือเสาขะลุตเพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการวิบัติจากการโก่งเดาะ ปัญหาของเสาที่มีการยึดรั้งแบบยึดหยุ่นต่อเนื่องตลอดความยาวช่วงเสาสามารถนำไปประยุกต์กับการวิเคราะห์ปัญหาในทางปฏิบัติได้โดยทำการจำลองให้เป็นปัญหาของเสาว่างบนฐานรากยึดหยุ่น ดังนั้น การศึกษาวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งเดาะของเสาแบบออยเลอร์วางบนฐานรากยึดหยุ่น

ประเภทวิงเคิลอร์และมีเงื่อนไขของการยึดรั้งที่ปลายเสาเป็นแบบคลาสสิกที่แตกต่างกัน 10 กรณี โดยใช้ระเบียบวิธีการเชิงวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษานำเสนอในรูปแบบของเกณฑ์เสถียรภาพแม่นยำตรงแสดงในพจน์ของพารามิเตอร์เสถียรภาพที่แฝงอยู่ในสมการและฟังก์ชันแสดงถึงรูปร่างการโก่งเดาะที่สอดคล้องกัน พบว่า โดยส่วนใหญ่ของเกณฑ์เสถียรภาพมีรูปแบบเป็นสมการอดิศัยที่มีลักษณะไร้เชิงเส้นอย่างมาก การคำนวณค่าพารามิเตอร์เสถียรภาพที่ต้องการจึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขในการสืบค้นซึ่งอยู่ในขั้นตอนของการดำเนินการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์และจะมีการนำเสนอในรูปแบบของบทความในอนาคต

## เอกสารอ้างอิง

- [1] J.M. Gere and S.P. Timoshenko, *Mechanics of Materials*, 3<sup>rd</sup> Edition, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1990.
- [2] F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1952.
- [3] S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., Singapore, 1961.
- [4] D.O. Brush and B.O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.
- [5] G.J. Simitses, *An Introduction to the Elastic Stability of Structures*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
- [6] <https://www.structuralguide.com/types-of-column-failures/>
- [7] M. Hetenyi, *Beams on Elastic Foundation*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1946.
- [8] V.Z. Vlasov and U.N. Leont'ev, *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations*, Israel Program for Scientific Translations Ltd, Jerusalem, 1966.
- [9] <https://mardiansyahpipeline.wordpress.com/2015/02/05/pipeline-buckling/>
- [10] <https://www.newcivilengineer.com/latest/network-rail-announces-six-design-winners-of-remote-track-buckle-detection-contest-15-06-2023/>
- [11] <https://civil-engg-world.blogspot.com/2013/01/What-Long-Column-Behavior-Pile-Foundation.html>
- [12] <https://www.mdpi.com/2412-3811/9/8/123>
- [13] T.M. Atanackovic and B.N. Novakovic, "Optimal shape of an elastic column on elastic foundation," *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 25, pp. 154-165, 2006.
- [14] T.M. Atanackovic, B.B. Jakovljevic and M.R. Pethovic, "On the optimal shape of a column with partial elastic foundation," *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 29, pp. 283-289, 2010.
- [15] M.T. Atay and S.B. Coskun, "Elastic stability of Euler columns with a continuous elastic restraint using variational iteration method," *Comput. Math. Appl.*, vol. 58, pp. 2528-2534, 2009.
- [16] A. Eryilmaz, M.T. Atay, S.B. Coskun and M. Basbuk, "Buckling of Euler columns with a continuous elastic restraint via homotopy analysis method," *J. Appl. Math.*, vol. 2013, 341063 (8 pages), 2013.
- [17] V.E. Melissianos and C.J. Gantes, "Buckling and post-buckling behavior of beams with internal flexible joints resting on elastic foundation modeling buried pipelines," *Struct.*, vol. 7, pp. 138-152, 2016.
- [18] A.A. Ghabban, A.H. Al-Rahmani, H.A. Rasheed and M.T. Albahtiti, "Buckling of nonprismatic column on varying elastic foundation

- with arbitrary boundary conditions,” *Math. Probl. Eng.*, vol. 2017, 5976098 (14 pages), 2017.
- [19] B.G. Johnston, “Column buckling theory: Historic highlights,” *J. Struct. Eng.*, vol. 109, no. 9, pp. 2086-2096, 1983.
- [20] B. Thurlimann, “Column buckling – Historical and actual notes,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 17, pp. 95-111, 1990.
- [21] C.M. Wang, S. Kitipornchai and K.M. Liew, “Research on elastic buckling of columns, beams and plates: Focusing on formulas and design charts,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 26, pp. 211-230, 1993.
- [22] P. Posayanant, W. Wongwanishwatana, P. Premthamkorn and Y. Sompornjaroensuk, “Buckling criteria of an Euler column with both ends elastically restrained: Analytical solution and verification,” *Eng. Trans. MUT*, 2025, paper submitted for publication. (in Thai)
- [23] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 2006.
- [24] J.J. Tuma, *Engineering Mathematics Handbook*, 2<sup>nd</sup>, Enlarged and Revised Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- [25] G.H. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, 2<sup>nd</sup> Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1990.



**ปวริศ โพชยะนันท์** สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร และปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาเอกในสถาบันเดียวกัน มีประสบการณ์ทางวิชาชีพเกี่ยวกับการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างอาคารขนาดใหญ่ โครงสร้างทางชลศาสตร์ เชื้อเพลิงและประติรูปบายน้ำขนาดใหญ่ภายใต้ผลของแรงสั่นสะเทือนแผ่นดินไหวและโครงสร้างงาน

ระบบเฉพาะทางเช่น โครงสร้างระบบท่อส่งลำเลียงของเหลวหรือน้ำมันและโครงสร้างรองรับระบบปิโตรเคมี มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่องกลศาสตร์การคำนวณเชิงโครงสร้าง การวิเคราะห์โครงสร้างบนพื้นฐานการประยุกต์วิธีการปัญญาประดิษฐ์ (AI) และการสร้างแบบจำลองโครงข่ายประสาทเทียม (ANN)



**วิมเนศ วงศ์วานิชวัฒนา** สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท จากสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย (AIT) School of Engineering and Construction และเริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2537 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำตรงและตัวเลขและการ

จัดการงานก่อสร้าง



**ดร.ประกิจ เปรมธรรมกร** สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา จาก Texas A&M University ทำงานเป็นอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครตั้งแต่ปี พ.ศ. 2538 มีความสนใจศึกษางานวิจัยทางด้านเสถียรภาพของโครงสร้างและโครงสร้างเพื่อความปลอดภัยสำหรับถนน



**ผศ.ดร.ยศ สมพรเจริญสุข** สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมโครงสร้าง) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เริ่มทำงานที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานครในปี พ.ศ. 2550 มีความสนใจศึกษางานวิจัยในเรื่อง กลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์การแตกหัก กลศาสตร์การสัมผัส และกลศาสตร์เชิงคำนวณด้วยวิธีการแม่นยำตรงและตัวเลข