

ผลกระทบของตัวแปรในแบบจำลองโมริ-ทานากะ

บัณฑิต พึ่งสาระ^{*}, วิวัฒน์ จิณนาสิริกุล^{**}, และ นิชาภัส ลิทธิสุข^{***}

สาขาวิชาวิศวกรรมพลังงาน คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม

มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร เลขที่ 9 ถนนแจ้งวัฒนะ เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10220

โทร. 0-2544-8456

บทคัดย่อ

แบบจำลองโมริ-ทานากะเมื่อรวมกับฟังก์ชันความน่าจะเป็นของรูปแบบการกระจายตัวแบบต่อเนื่อง สามารถใช้ในการคำนวณคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบแอนไอโซทรอปิกของวัสดุคอมโพสิตเส้นใยเสริมแรงแบบเส้น การประยุกต์ใช้ของแบบจำลองนี้สามารถทำนายพฤติกรรมของวัสดุคอมโพสิตเส้นใยเสริมแรงแบบเส้นได้ อย่างไรก็ตามค่าคุณสมบัติของวัสดุหลักและวัสดุเสริมแรงมีผลทำให้พฤติกรรมของวัสดุคอมโพสิตเปลี่ยนแปลงไป งานนี้ศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับผลที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงค่าอัตราส่วนคุณสมบัติทางกลของวัสดุหลักต่อวัสดุเสริมแรง ทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเสริมแรง ค่าอัตราส่วนผสมเชิงปริมาตรของวัสดุเสริมแรง เป็นต้น เพื่อหาข้อจำกัดของแบบจำลองนี้

คำสำคัญ: วัสดุเส้นใยเสริมแรงแบบเส้น, การศึกษาตัวแปร, ทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเสริมแรง, แบบจำลองโมริ-ทานากะ

* อาจารย์ สาขาวิชาวิศวกรรมพลังงาน คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม

** อาจารย์ สาขาวิชาวิศวกรรมพลังงาน คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม

*** อาจารย์ สาขาวิชาวิศวกรรมพลังงาน คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม

Parametric Study of a Mori-Tanaka Model

Bundit Phungsara^{*}, Wiwat Jeungthanasirigool^{**} and Nichaphat Sitthisuk^{***}

Department of Energy Engineering, Faculty of Industrial Technology

Phranakhon Rajabhat University, 9 Changwattana Road, Bangkhen Bangkok, 10220, Thailand

Tel. 66 (0) 2544 8456

Abstract

The Mori-Tanaka model combined with an orientation distribution function of the reinforcements can be used to calculate the anisotropic elastic properties of a short fiber reinforced composite from the volume fraction and orientation of the reinforcements. The applicability of the model has been demonstrated in rice husks reinforced polypropylene composite. However, because the elastic moduli of the rice husks and the matrix are within an order of magnitude, the model cannot show the ability to capture the effects of high modulus reinforcements. This work further investigates the responses of the Mori-Tanaka model with an orientation distribution function under a range of model parameters to gain an insight into the model behavior and its limitations. The parameters under study include the reinforcement morphological and geometrical properties, such as orientation distribution, volume fraction and dimensions, and the relative moduli between the matrix and the reinforcements. The model is theoretically shown to be suitable for modeling short fiber reinforced composite but with limitations.

Keywords: Short Fiber Composite, Parametric Study, Fiber Orientation Distribution, Anisotropy, Mori-Tanaka Model

^{*} Lecturer, Department of Energy Engineering, Faculty of Industrial Technology

^{**} Lecturer, Department of Energy Engineering, Faculty of Industrial Technology

^{***} Lecturer, Department of Energy Engineering, Faculty of Industrial Technology

1. บทนำ

ในปัจจุบันวัสดุคอมโพสิตเส้นใยเสริมแรงแบบเส้นนิยมใช้ในอุตสาหกรรม เนื่องจากมีความยืดหยุ่นในการขึ้นรูปได้หลายรูปแบบ และยังสามารถเพิ่มความแข็งแรงของวัสดุได้อย่างไร้ค่าคุณสมบัติทางกล รูปร่าง การเรียงตัว ของวัสดุเส้นใยเสริมแรง มีผลทำให้พฤติกรรมของวัสดุเปลี่ยนแปลงไป

จากงานวิจัยที่ผ่านมา Benveniste [1] ได้ศึกษาแบบจำลองของโมริทานากะ เพื่อทำนายพฤติกรรมของวัสดุคอมโพสิตเส้นใยเสริมแรงแบบเส้น โดยเป็นการกระจายตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงแบบเส้นแบบสม่ำเสมอในทิศทางเดียว Ferrari และ Johnson [4] จึงได้ศึกษาเพิ่มเติมถึงทิศทางการเรียงตัวของแบบจำลองโมริทานากะ แต่ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่ในงานวิจัยที่ผ่านมาตามลำดับ [4,8,10] Fu และ Lauke [5] ได้ศึกษาผลของทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเสริมแรง และผลของความยาวของวัสดุเสริมแรงในวัสดุคอมโพสิตเส้นใยเสริมแรงแบบเส้น โดยวัสดุเป็นแบบแผ่นบาง

งานวิจัยนี้จึงได้ศึกษาขีดจำกัดของแบบจำลองโมริ-ทานากะ ผลกระทบต่อตัวแปรในแบบจำลองของโมริ-ทานากะ ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้จะนำไปสู่การทำนายพฤติกรรมและคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิตเส้นใยเสริมแรงแบบเส้น

2. แบบจำลองโมริ-ทานากะที่รวมผลของฟังก์ชันการกระจายตัวแบบต่อเนื่อง

2.1 แบบจำลองโมริ-ทานากะ

แบบจำลองโมริ-ทานากะ [9] เป็นแบบจำลองสำหรับทำนายคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิตเส้นใยเสริมแรงแบบเส้น โดยใช้วิธีการของ Eshelby's ช่วยในการแก้ปัญหา โดยมีสมมุติฐาน 2 ข้อดังนี้

1) วัสดุเสริมแรงต้องเป็นเนื้อเดียวและมีการเรียงตัวในทิศทางเดียวกัน

2) การเชื่อมยึดระหว่างผิวของวัสดุหลักและวัสดุเสริมแรงต้องสมบูรณ์ (Perfect Bonding)

การคำนวณโครงสร้างของวัสดุสามารถคำนวณจากแบบจำลองโมริ-ทานากะ ซึ่งค่าสตีเฟนส์เทนเซอร์อันดับ 4 เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง ความเค้น กับ ความเครียด ดังสมการ

$$\underline{C}_{MT} = \underline{C}_m + w_f(\underline{C}_f - \underline{C}_m) \left[\underline{I} + \underline{S}_E(\underline{C}_m)^{-1}(\underline{C}_f - \underline{C}_m) \right]^{-1} \left[(1 - w_f)\underline{I} + w_f \left[\underline{S}_E(\underline{C}_m)^{-1}(\underline{C}_f - \underline{C}_m) \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (1)$$

โดย $\underline{C}$ is เป็นสตีเฟนส์เทนเซอร์อันดับ 4, $\underline{I}$ เทนเซอร์เอกลักษณ์อันดับ 4, w อัตราส่วนผสมเชิงปริมาตร, the subscript MT is for the composite, m for the matrix, and f for the inclusions. $\underline{S}_E$ เอชเชลบีเทนเซอร์อันดับ 4 เป็นความสัมพันธ์ของความเครียดในโครงสร้างระดับไมโคร ถ้าคุณสมบัติวัสดุมีความเป็นสมมาตรจะสามารถลดรูปของเอชเชลบีเทนเซอร์ได้ ตามสมการ 2 ตัวอย่างเช่น ถ้าวัสดุมีคุณสมบัติเป็นไอโซโทรปิก สตีเฟนส์เทนเซอร์จะอยู่ในรูปตัวแปร มอดูลัสความยืดหยุ่น E , อัตราส่วนปัวซอง ν โดยรูปร่างของวัสดุเสริมแรงจะมีผลกับเอชเชลบีเทนเซอร์ สำหรับวัสดุเสริมแรงที่มีรูปร่างแบบทรงรี โดยมีแกนของรูปร่าง $[a, b, c]$ และอัตราส่วนปัวซอง ν เอชเชลบีเทนเซอร์แสดงดังสมการ

$$\underline{S}_E = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212} \end{bmatrix} \quad (2)$$

เมื่อ

$$S_{1111} = \frac{3a^2}{8\pi(1-\nu_f)} I_{11} + \frac{1-2\nu_f}{8\pi(1-\nu_f)} I_1, \quad (3-1)$$

$$S_{2222} = \frac{3b^2}{8\pi(1-\nu_f)} I_{22} + \frac{1-2\nu_f}{8\pi(1-\nu_f)} I_2, \quad (3-2)$$

$$S_{3333} = \frac{3c^2}{8\pi(1-\nu_f)} I_{33} + \frac{1-2\nu_f}{8\pi(1-\nu_f)} I_3, \quad (3-3)$$

$$S_{1122} = \frac{b^2}{8\pi(1-\nu_f)} I_{12} + \frac{1-2\nu_f}{8\pi(1-\nu_f)} I_1, \quad (3-4)$$

$$S_{1133} = \frac{c^2}{8\pi(1-\nu_f)} I_{13} + \frac{1-2\nu_f}{8\pi(1-\nu_f)} I_1, \quad (3-5)$$

$$S_{2233} = \frac{c^2}{8\pi(1-\nu_f)} I_{23} + \frac{1-2\nu_f}{8\pi(1-\nu_f)} I_2, \quad (3-6)$$

$$S_{1212} = \frac{a^2+b^2}{16\pi(1-\nu_f)} I_{12} + \frac{1-2\nu_f}{16\pi(1-\nu_f)} (I_1 + I_2), \quad (3-7)$$

$$S_{1313} = \frac{a^2+c^2}{16\pi(1-\nu_f)} I_{13} + \frac{1-2\nu_f}{16\pi(1-\nu_f)} (I_1 + I_3), \quad (3-8)$$

$$S_{2323} = \frac{b^2+c^2}{16\pi(1-\nu_f)} I_{23} + \frac{1-2\nu_f}{16\pi(1-\nu_f)} (I_2 + I_3). \quad (3-9)$$

โดยตัวแปร $I_1, I_2, I_3, I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{22}, I_{23}, I_{33}$ สามารถหาได้จาก

$$I_2 = I_3 = \frac{2\pi ac^2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{a}{c} \left(\frac{a^2}{c^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - \cosh^{-1} \frac{a}{b} \right] \quad (4-1)$$

$$I_1 = 4\pi - 2I_2 \quad (4-2)$$

$$I_{12} = \frac{(I_2 - I_1)}{(a^2 - b^2)} \quad (4-3)$$

$$I_{13} = I_{12} \quad (4-4)$$

$$3I_{11} = \frac{4\pi}{a^2} - 2I_{12} \quad (4-5)$$

$$I_{23} = \frac{\pi}{b^2} - \frac{(I_2 - I_1)}{4(a^2 - b^2)} \quad (4-6)$$

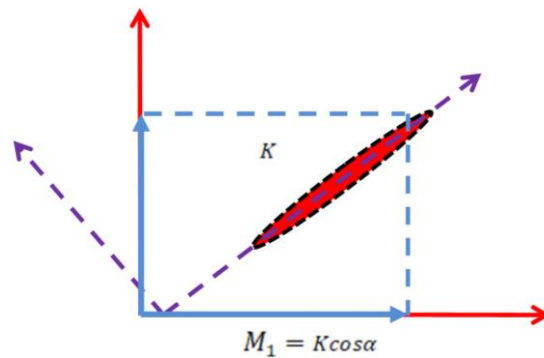
$$I_{22} = I_{23} = I_{33} \quad (4-7)$$

แบบจำลองโมริทานากะใช้สำหรับทำนายคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิตที่มีเส้นใยแบบสั้นเป็นตัวเสริมแรง แต่เงื่อนไขคือสามารถใช้ทำนายได้เฉพาะเส้นใยที่เรียงตัวในทิศทางเดียว ถ้ามีการเรียงตัวแบบกระจายหลาย

ทิศทาง แบบจำลองของโมริทานากะจะทำนายค่าคุณสมบัติได้ไม่แม่นยำ งานวิจัยนี้จึงสนใจทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยเสริมแรงเป็นหลัก

2.2 ทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรง

การกระจายตัวของวัสดุเสริมความแข็งแรงสามารถอธิบายได้จากเทนเซอร์โครงสร้างการกระจายตัว (Fabric Diffusion Tensor) ที่บ่งบอกถึงความหนาแน่นของการเรียงตัวของวัสดุเสริมความแข็งแรงในทิศทางต่างๆ ตามหลักของ Kanatani การกระจายตัวในสองมิติเป็นค่าที่ได้จากข้อมูลทางสถิติของการกระจายตัวแบบวงกลม (Circular Distribution) อธิบายได้ด้วยมุมเฉลี่ยในการเรียงตัว (Mean Angle) $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และค่าความเข้มข้นของการกระจายตัวในมุมเฉลี่ย (Concentration Factor) โดยที่ $K \geq 0$ โดยค่าทั้งสองถูกสร้างเป็นความสัมพันธ์ของข้อมูลเทนเซอร์โครงสร้าง (Input Fabric Tensor Function)



รูปที่ 1 ทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงเทียบกับแกนหลัก

การเรียงตัวในทิศทางของค่าเฉลี่ย $\underline{M}(K, \alpha)$ สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันของค่าความเข้มข้นของการเรียงตัวเทียบกับมุมเฉลี่ยในการเรียงตัวตามรูปที่ 1 ดังสมการที่ (5)

$$\underline{M}(K, \alpha) = K \cos \alpha \underline{e}_1 + K \sin \alpha \underline{e}_2 \quad (5)$$

ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้เทนเซอร์โครงสร้างตามแบบของ Kanatani กล่าวคือเทนเซอร์โครงสร้างการกระจายตัวประเภท 1 (Fabric Tensor of The First Kind) เป็นสมการความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่นำข้อมูลเทนเซอร์โครงสร้างมาเขียนเป็นความสัมพันธ์แบบเทนเซอร์ลำดับสอง (Rank 2) โดยมีคุณสมบัติสมมาตรตามแนวทแยงโดยสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ดังสมการที่ (6)

$$N_{ij} = M_i(K, \alpha) \otimes M_j(K, \alpha) \quad (6)$$

โดยที่ N_{ij} คือ เทนเซอร์โครงสร้างประเภทที่หนึ่ง
 $\otimes$ คือ dyadic product

อักษรห้อย i และ j คือ ตัวแปรอิสระมีค่าตั้งแต่ 1 หรือ 2 ซึ่งแสดงถึงทิศทางในแกน 1 หรือ 2 ตามลำดับ

ส่วนเทนเซอร์โครงสร้างการกระจายตัวประเภท 3 (Fabric Tensor of the Third Kind) $\underline{D}_{ij}$ เป็นเทนเซอร์โครงสร้างการกระจายตัวที่มีคุณสมบัติ Deviatoric คือ ผลรวมของเทนเซอร์ตามแนวทแยงมีค่าเป็นศูนย์ โดยสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ดังสมการที่ (7-1)

$$D_{ij} = N_{ij} - \frac{1}{2} N_{00} I \quad (7-1)$$

โดยที่ I คือ เทนเซอร์เอกลักษณะลำดับสองจะอยู่ในรูป $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ N_{00} คือ Trace ของ N_{ij} องค์ประกอบของเทนเซอร์ D_{ij} อธิบายได้ดังสมการที่ (7-2)

$$\begin{aligned} [D_{11}, D_{12}] &= f(K, \alpha) \\ D_{11} &= K^2 \left[[\cos\alpha]^2 - \frac{1}{2} \right] \\ D_{22} &= K^2 \left[[\sin\alpha]^2 - \frac{1}{2} \right] \\ D_{12} &= D_{21} = K^2 [\cos\alpha][\sin\alpha] \end{aligned} \quad (7-2)$$

สมการความน่าจะเป็นของการกระจายตัวของวัสดุเสริมความแข็งแรงบนระนาบสามารถอธิบายได้โดยอาศัยเทนเซอร์โครงสร้างการกระจายตัวประเภท 3 แบบเทนเซอร์ลำดับสอง (Rank 2) เขียนในรูปของฟังก์ชันการกระจายตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงบนระนาบในทิศทาง $\underline{n} = \cos(\theta)\underline{e}_1 + \sin(\theta)\underline{e}_2$ ได้ดังสมการที่ (8)

$$\rho(\underline{n})_{\text{von Mises Rank2}} = \frac{1}{2\pi} [1 + 4D_{ij}n_i n_j] \quad (8)$$

โดยเมื่อตัวห้อยซ้ำให้มผลเป็นการบวกกันตามหลักของไอน์สไตน์ (Einstein Summation - Convention) จากสมการที่ (8) สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังสมการที่ (8-1)

$$\rho(\underline{n})_{\text{von Mises Rank2}} = \frac{1}{2\pi} [1 + 4(D_{11}n_1n_1 + D_{12}n_1n_2 + D_{21}n_2n_1 + D_{22}n_2n_2)] \quad (8-1)$$

โดยที่ $n_1 = \cos\theta$ และ $n_2 = \sin\theta$ สมการที่ (8-1) จะสามารถรูปใหม่ได้ดังสมการที่ (8-2)

$$\rho(\underline{n})_{\text{von Mises Rank2}} = \frac{1}{2\pi} [4[D_{11}[\cos 2\theta] + D_{12}[\sin 2\theta]] + 1] \quad (8-2)$$

เมื่อแทนสมการที่ (7-2) ลงในสมการที่ (8-2) จะสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังสมการที่ (8-3)

$$\rho(\underline{n})_{\text{von Mises Rank2}} = \frac{1}{2\pi} [1 + 2K^2 [\cos(2(\theta - \alpha))]] \quad (8-3)$$

ผลรวมของการกระจายตัวในทุกมุมหรือค่า Normalization ของการกระจายตัวแสดงดังสมการที่ (9)

$$\begin{aligned} \text{Normalization of von Mises Rank2} &= \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho(\underline{n})_{\text{von Mises Rank2}} d\theta & \end{aligned} \quad (9)$$

ความน่าจะเป็นของการเรียงตัวของสารเสริมความแข็งแรงในทิศทางหนึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการความน่าจะเป็นดังสมการที่ (10-1) ซึ่งเป็นฟังก์ชันการกระจายตัวตามแบบของ Kanatani เมื่อนำมาอยู่ในรูปของ Exponential จะเรียกรูปแบบการกระจายตัวแบบนี้ว่า von Mises Distribution

$$P(\underline{n})_{\text{von Mises Rank2}} = \frac{\exp[\rho(\underline{n})_{\text{von Mises Rank2}}]}{\text{Normalization of von Mises Rank2}} \quad (10-1)$$

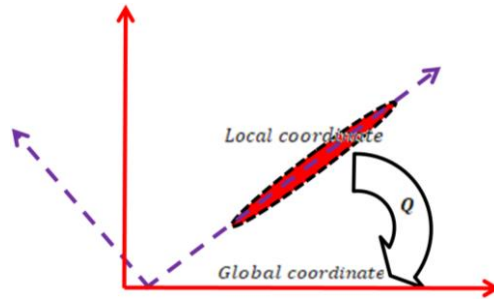
นำสมการที่ (8-3) และ (9) แทนในสมการที่ (10) จะสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังสมการที่ (10-2)

$$P(\underline{n})_{\text{von Mises Rank2}} = \frac{\exp\left[\frac{1}{2\pi} [1 + 2K^2 [\cos(2(\theta - \alpha))]]\right]}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi} \exp\left[\frac{1}{2\pi} [1 + 2K^2 [\cos(2(\theta - \alpha))]]\right] d\theta} \quad (10-2)$$

2.3 The Mori-Tanaka model with orientation distribution function

เมื่อพิจารณาแบบจำลองของโมริทานากะที่ยังไม่รวมผลการกระจายตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงแล้วพบว่าโครงสร้างของสติฟเนสส์เทนเซอร์ C_{ijkl} ที่แสดงพฤติกรรมของแบบจำลองมีลักษณะเหมือนกับวัสดุประเภท Transversely Isotropic Material โดยเป็นวัสดุที่คุณสมบัติทางกลคือมีแนวแกนหลักเป็นแกน $\underline{e}_1$ และระนาบรอบแกนเป็นระนาบสมมาตรโดยเป็นผลมาจากแบบจำลองโมริทานากะจะมีรูปแบบการกระจายตัวของเส้นใยในทิศทางเดียว

ดังนั้นการนำแบบจำลองโมริทานากะมาใช้อธิบายพฤติกรรมของวัสดุสารประกอบที่วัสดุเส้นใยเสริมแรงมีการกระจายตัวไปในทิศทางต่างๆบนระนาบ จำเป็นต้องนำสติฟเนสส์เทนเซอร์ของแบบจำลองโมริทานากะมาประยุกต์รวมเข้ากับรูปแบบการกระจายตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงในทุกทิศทางภายในระนาบ โดยคำนวณจากการหาค่าเฉลี่ยของเทนเซอร์ในทุกทิศทาง เนื่องจากสติฟเนสส์เทนเซอร์ของโมริทานากะอธิบายเฉพาะในทิศหนึ่งๆ (Local Coordinate) เท่านั้น จึงต้องมีการแปลงให้เทนเซอร์นี้อยู่ในทิศทางหลัก (Global Coordinate) จากกฎการแปลงเทนเซอร์ (Tensorial Transformation Law) ด้วยการอาศัยคุณสมบัติของเทนเซอร์การหมุน Q_{ij} สำหรับในสองมิติแสดงดังภาพที่ 2



รูปที่ 2 แสดงการแปลงสตีเฟนส์เทนเซอร์ด้วยเทนเซอร์การหมุนจากทิศทางย่อย (Local) เป็นทิศทางหลัก (Global)

การแปลงแกนทำได้โดยการหมุนรอบแกนอนุกรมและสามารถเขียนเทนเซอร์การหมุนได้ดังสมการที่ (11)

$$Q_{ij}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

สำหรับการแปลงความเค้นด้วยกฎการแปลงเทนเซอร์ (Tensorial Transformation Law) จากพิกัดย่อย (Local) ไปพิกัดหลัก Global สามารถอธิบายได้ตามสมการที่ (12)

$$\sigma_{mn}^G = Q_{mi} Q_{nj} \sigma_{ij}^L \quad (12)$$

โดยที่ σ_{mn}^G คือความเค้น (Stress) บนพิกัดหลักและ σ_{ij}^L คือความเค้น (Stress) บนพิกัดย่อย และเช่นเดียวกันสำหรับการแปลงความเครียดด้วยกฎการแปลงเทนเซอร์แสดงดังสมการที่ (13)

$$\varepsilon_{pq}^G = Q_{pk} Q_{ql} \varepsilon_{kl}^L \quad (13)$$

โดยที่ ε_{pq}^G คือความเครียด (Strain) บนพิกัดหลัก และ ε_{kl}^L คือความเครียด (Strain) บนพิกัดย่อย เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดบนพิกัดหลักและพิกัดย่อย จะได้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (14)

$$\begin{aligned} \sigma_{mn}^G &= C_{mnpq}^G \varepsilon_{pq}^G \\ \sigma_{ij}^L &= C_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^L \end{aligned} \quad (14)$$

เมื่อแทนค่าการแปลงเทนเซอร์สมการที่ (12) และ (13) แทนลงในสมการที่ (14) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดบนพิกัดหลักดังสมการที่ (15)

$$\sigma_{mn}^G = Q_{mi} Q_{nj} C_{ijkl}^L Q_{kp}^T Q_{lq}^T \varepsilon_{pq}^G \quad (15)$$

หรือจะได้ว่า ค่าสตีเฟนส์เทนเซอร์ของวัสดุสารประกอบในพิกัดหลักมีความสัมพันธ์กับสตีเฟนส์เทนเซอร์ของวัสดุสารประกอบในพิกัดย่อยตามสมการที่ (16)

$$C_{mnpq}^G = Q_{mi} Q_{nj} C_{ijkl}^L Q_{kp}^T Q_{lq}^T \quad (16)$$

การรวมผลของทิศทาง การเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงกับแบบจำลองของโมริทานากะสามารถกระทำได้ 3 แบบ ซึ่งแบ่งตามประเภทของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของรูปแบบการกระจายตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรง ที่กล่าวมาข้างต้น

การรวมผลของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของรูปแบบการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงที่คำนวณได้จากภาพถ่ายโดยตรงในทุกทิศทางซึ่งอยู่ในฟังก์ชันของมุม θ กับแบบจำลองของโมริทานากะซึ่งอยู่ในฟังก์ชันของมุม θ เช่นกัน โดยจะใช้วิธีการอินทิเกรตพื้นที่ใต้กราฟแบบฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง (Discrete Function) หรือเรียกวิธีนี้ว่า Direct Integration เพื่อรวมผลฟังก์ชันความน่าจะเป็นกับสตีเฟนส์เทนเซอร์ในทุกทิศทางตั้งแต่ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ แสดงดังสมการที่ (17)

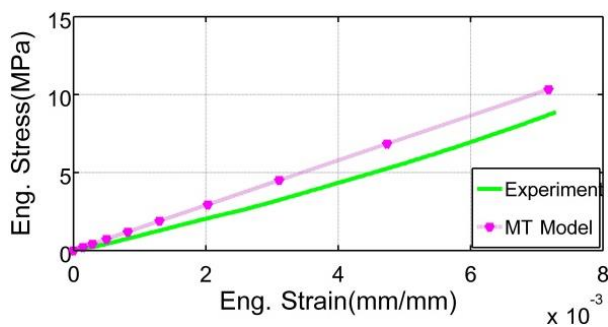
$$C_{mnpq}^{Composite} = \sum_{n=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [P(\theta) C_{mnpq}^G(\theta)] \quad (17)$$

โดยที่ $P(\theta)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของรูปแบบการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงที่ได้จากภาพถ่ายโดยตรง และ $C_{mnpq}^G(\theta)$ คือค่าสตีเฟนส์เทนเซอร์ของวัสดุสารประกอบในพิกัดหลักแสดงดังสมการที่ (16) โดยตัวแปรที่มีผลกับแบบจำลองของโมริทานากะมีดังนี้

- ค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุหลักและวัสดุเสริมแรง: E_m, E_f
- รูปร่างของวัสดุเส้นใยเสริมแรง: a, b, c ,
- ทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรงและความเข้มข้นของการกระจายตัว: α, K

3. การเปรียบเทียบแบบจำลองโมริทานากะกับผลการทดลอง

การทดสอบการรับภาระแรงดึงในแนวแกนของวัสดุสารประกอบโพลิโพรพิลีนผสมแคลบดิ่งด้วยความเร็ว 2.5 มม. ต่อนาทีจนวัสดุเกิดความเสียหายด้วยเครื่อง Universal Testing และวัดระยะเสียรูปด้วย Extensometer ผลการทดสอบของวัสดุสารประกอบโพลิโพรพิลีนผสมแคลบดิ่งที่ได้ในรูปที่ 3 แสดงให้เห็นถึงพฤติกรรมแบบเป็นเชิงเส้นจนกระทั่งเสียหายด้วยการแตกแบบเปราะ เมื่อเทียบพฤติกรรมของแบบจำลองโมริทานากะจะมีค่าความคลาดเคลื่อนอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ และพบว่า การใส่แคลบเป็นวัสดุเส้นใยเสริมความแข็งแรงจะทำให้ค่ามอดูลัสในแนวแกนเพิ่มสูงขึ้น แต่จะทำให้เปอร์เซ็นต์การยืดตัวลดน้อยลง ทำให้เกิดการเสียหายที่การยืดตัวต่ำกว่าโพลิโพรพิลีน



รูปที่ 3 การทดสอบการดึงของวัสดุคอมโพสิตเส้นใยเสริมแรงแบบเส้น

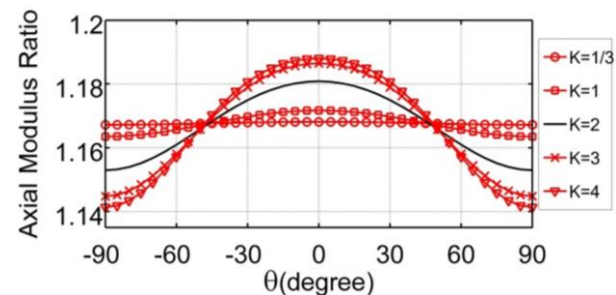
4. การศึกษาตัวแปรที่มีผลกับแบบจำลองของโมริทานากะ

ขอบเขตการศึกษาตัวแปรในแบบจำลองโมริทานากะคือ

- ค่าความหนาแน่นของการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรง K จาก $K = 1/3$ ถึง $K = 4$,
- อัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของวัสดุเส้นใยเสริมแรง a/b , สมมติให้วัสดุเป็นรูปทรงรี $a > b = c$, จากอัตราส่วน $a/b = 1$ ถึง $a/b \rightarrow \infty$.

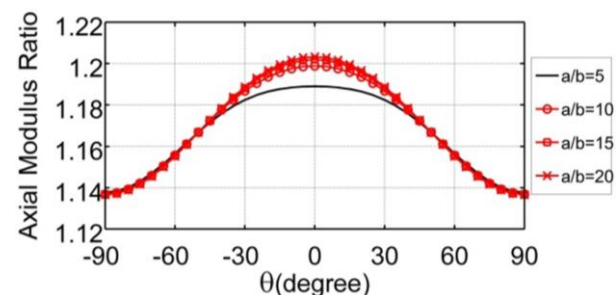
โดยผลที่ได้ แสดงในรูปของอัตราส่วนค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุคอมโพสิตต่อวัสดุหลัก (Axial Modulus Ratio) โดยใช้กรณีอ้างอิงเป็น ($\alpha = 0^\circ$, $K = 2$, $a/b = 5$)

จากภาพที่ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุคอมโพสิตต่อวัสดุหลัก (Axial Modulus Ratio) กับทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรง (θ) ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าเมื่อเพิ่มค่าความหนาแน่นของการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรง K จะมีผลทำให้อัตราส่วนค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุคอมโพสิตต่อวัสดุหลัก (Axial Modulus Ratio) มีค่าสูงขึ้นและจะเริ่มคงที่เมื่อเข้าใกล้ 4 และมีค่ามากที่สุดที่ทิศทางการเรียงตัวเท่ากับ 0 องศา



รูปที่ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนมอดูลัสกับค่าความหนาแน่นการกระจายตัว K

จากภาพที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุคอมโพสิตต่อวัสดุหลัก (Axial Modulus Ratio) กับทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรง (θ) ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าเมื่อเพิ่มอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของวัสดุเส้นใยเสริมแรง a/b จะมีผลทำให้อัตราส่วนค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุคอมโพสิตต่อวัสดุหลัก (Axial Modulus Ratio) มีค่าสูงขึ้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้น และมีค่ามากที่สุดที่ทิศทางการเรียงตัวเท่ากับ 0 องศา



รูปที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนมอดูลัสกับค่าอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของวัสดุเส้นใย

5. สรุป

งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นถึงผลที่เกิดจากการเปลี่ยนของตัวแปรในแบบจำลองของโมริทานากะและผลของทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรง ผลที่ได้สรุปได้ว่าการเปลี่ยนแปลง ค่าความหนาแน่นของการเรียงตัวของวัสดุเส้นใยเสริมแรง K และอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของวัสดุเส้นใยเสริมแรง a/b มีผลต่อค่าคุณสมบัติของวัสดุอย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับผลของทิศทางการเรียงตัวของวัสดุเสริมเส้นใย

6. เอกสารอ้างอิง

1. Benveniste, Y., 1987., A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mechanics of material*, vol.6 February 1987. pp. 147-157.
2. Dunn, L.M., Ledbetter, H., Heyliger, R.P. and Choi, C.S., 1996., Elastic constants of textured short-fiber composites., *Mechanics of solids*, vol. 44(9), January 1996, pp. 1509-1541.
3. Dunn, L.M., and Ledbetter, H., 1997., Elastic-plastic behavior of textured short-fiber composites. *Acta Material*, vol. 45(8), November 1997, pp. 3327-3340.
4. Ferrari, M. and Johnson, G.C., 1989., Effective elasticities of short-fiber composites with arbitrary orientation distribution, *Mechanics of Material*, Vol. 8, November 1989, pp. 67-73.

5. Fu, S.Y., and Lauke, B., 1998., The elastic modulus of misaligned short-fiber-reinforced polymers. *Composites Science and Technology*, Vol. 58, July 1997, pp. 389-400

6. Jearanaisilawong, P., Eahkanong, S., Manonukul, A., and Phungsara. B., **Determination** of in-plane elastic properties of rice husk reinforced composite from orientation distribution of reinforcements and constituent properties, In Press.

7. Kanatani, K., 1984., Distribution of directional data and fabric tensors, *International journal of engineering science*, Vol. 22(2), pp. 149-164.

8. Marzari, N. and Ferrari, M., 1992., Textural and micromorphological effects on the overall elastic response of macroscopically anisotropic composites, *Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 269-275.

9. Mori, T. and Tanaka, K., 1973., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571.

10. Nadeau J.C. and Ferrari, M., 2003., Bounds on Texture Coefficients, *Applied Mechanics*, Vol. 70, March 2003, pp. 200-203

11. Weinberger, C., Cai, W. and Barnett, D., 2005., *Elastic of microscopic structures*, Stanford University, March 2003.