

วิถันยอินทวชันนสตคบนปรกมอจระยะแบบบ

Intuitionistic fuzzy b-metric spaces

พเรชช ญพชรเจรญ^{1*}, จรพร จันวเส¹, ภาชด ลมปรยูน²

Pheerachate Bunpatcharacharoen^{1*}, Jiraporn Janwised¹, Pasit Limprayoon²

¹ภาควชาคณิตศาสตร คณะวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

¹Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Rambhaibarni Rajabhat University

²กลุ่มงานหลักสูตรและแผนการเรียน กองบริการการศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

²Curriculum and Study Plan, Division of Educational Services, Rambhaibarni Rajabhat University

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้นำแนวคิดของอตานาสซอฟ (Atanassov, 1986) และนาดาแบน (Nadaban, 2016) มาสร้างนิยามของวิถันยอินทวชันนสตคบนปรกมอจระยะทางแบบบและนำเสนอตัวอย่างต่าง ๆ พร้อมทั้งศึกษาสมบัติเชิงทอพอโลยีต่าง ๆ เช่น บอลเปิด เซตเปิด การลู่อู่เข้าของลำดับ ลำดับโคชี เป็นต้น

คำสำคัญ: วิถันยบนปรกมอจระยะทางแบบบ วิถันยบนปรกมอจระยะทาง ปรกมอจระยะทางแบบบ

Abstract

In this paper, we use the ideas of Atanassov (Atanassov, 1986) and Nadaban (Nadaban, 2016) to define the definition of intuitionistic fuzzy b-metric spaces and present some examples. After that we study some topological properties such as open balls, open sets, convergent series, Cauchy sequences, etc.

Keywords: Intuitionistic fuzzy b-metric spaces, Intuitionistic fuzzy metric spaces, b-metric spaces

1. บทนำ

ในปีค.ศ. 1965 ซาเดห์ (Zadeh, 1965) ได้ริเริ่มแนวคิดเซตวิถันย (Fuzzy set) และนำไปสู่การวิวัฒนาการของคณิตศาสตร์เชิงวิถันย ในเวลาต่อมาคราโมซิลและมิคาเลค (Kramosil & Michálek 1975) นำเสนอเกี่ยวกับ ความน่าจะเป็นบนปรกมอจระยะทางโดยใช้หลักการของระยะทางเชิงวิถันยซึ่งได้รับความสนใจเป็นจำนวนมากจากนักคณิตศาสตร์ เช่น จอร์จและวีรามานี (George & Veeramani, 1994) นิยามความหมายของเฮาส์ดอร์ฟ ทอพอโลยีบนวิถันยบนปรกมอจระยะทางโดยปรับเปลี่ยนนิยามของระยะทางเชิง

* Corresponding author : stevie_g_o@hotmail.com

วิภาษนัยเล็กน้อย ซึ่งริเริ่มโดยคราโมซิลและมิกาลเลค นอกจากนี้อัตานาสซอฟ (Atanassov, 1986) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนเซต (Intuitionistic fuzzy set) ซึ่งได้พัฒนาต่อมาจนกลายเป็นแนวคิดใหม่ ๆ มากมาย เช่น วิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง (Intuitionistic fuzzy metric spaces) (Park, 2004) วิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงทอพอโลยี (Intuitionistic fuzzy topology spaces) (Saadati & Park, 2006) วิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอินอร์ม (Intuitionistic fuzzy normed spaces) (Karakus, Demirci & Duman, 2008) วิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบน 2-ปริภูมิอินอร์ม (Intuitionistic fuzzy 2-normed spaces) (Mursaleen & Lohani, 2009) เป็นต้น จนกระทั่งในปี ค.ศ. 2016 โซลิน นาดาแบน (Nadaban, 2016) ได้ขยายแนวคิดเกี่ยวกับปริภูมิอิงระยะทางแบบบีด้วยการนำเสนอวิภาษนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ในงานวิจัยนี้ได้นำแนวคิดของอตานาสซอฟและนาดาแบนมาสร้างนิยามของวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี พร้อมทั้งศึกษาสมบัติพื้นฐานเพื่อให้ได้ข้อสรุปเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric spaces) และสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 1 (Park, 2004) กำหนดให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคจาก $[0,1] \times [0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ จะเรียกการดำเนินการ $*$ ว่ามีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่ (Continuous t -norm) เมื่อ

- (1) $*$ มีสมบัติเปลี่ยนหมู่และสลับที่
- (2) $*$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- (3) สำหรับแต่ละ α $0 \leq \alpha \leq 1$ จะได้ $\alpha * 1 = \alpha$
- (4) สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma, \phi \in [0,1]$ ถ้า $\alpha \leq \gamma$ และ $\beta \leq \phi$ แล้ว $\alpha * \beta \leq \gamma * \phi$

ถ้าให้ $\diamond$ เป็นการดำเนินการทวิภาคจาก $[0,1] \times [0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ จะเรียกการดำเนินการ $\diamond$ ว่ามีความต่อเนื่องแบบคอนอร์มที่ (Continuous t -conorm) เมื่อ $\diamond$ มีสมบัติ (1), (2), (4) และ (3) สำหรับแต่ละ $0 \leq \alpha \leq 1$ จะได้ $\alpha \diamond 0 = \alpha$

บทนิยาม 2 (Park, 2004) กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ การดำเนินการ $*$ มีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่ $\diamond$ มีความต่อเนื่องแบบคอนอร์มที่และ $0, \Theta$ เป็นความสัมพันธ์แบบวิภาษนัยบน (Fuzzy set) $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ $0, \Theta$ มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

- (1) $0(\alpha, \beta, t) + \Theta(\alpha, \beta, t) \leq 1$

- (2) ถ้า $\alpha \neq \beta$ จะได้ $O(\alpha, \beta, t) > 0$
- (3) $O(\alpha, \beta, t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$
- (4) $O(\alpha, \beta, t) = O(\beta, \alpha, t)$
- (5) $O(\alpha, \beta, t) * O(\beta, \gamma, s) \leq O(\alpha, \gamma, s+t)$
- (6) $O(\alpha, \beta, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ มีความต่อเนื่อง
- (7) ถ้า $\alpha \neq \beta$ จะได้ $\Theta(\alpha, \beta, t) < 1$
- (8) $\Theta(\alpha, \beta, t) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$
- (9) $\Theta(\alpha, \beta, t) = \Theta(\beta, \alpha, t)$
- (10) $\Theta(\alpha, \beta, t) \diamond \Theta(\beta, \gamma, s) \geq \Theta(\alpha, \gamma, s+t)$
- (11) $\Theta(\alpha, \beta, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ มีความต่อเนื่อง

เราจะกล่าวว่า (O, Θ) เป็นระยะทางเชิงวิกษัยอินทิวชันนิสติกบน Ψ และเขียนแทนโดย (O, Θ)

ตัวอย่าง 3 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\mathbb{R}, \wedge)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง (Metric space) ให้ $a, b \in [0, 1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ และ $t > 0$ จะนิยาม $*, \diamond, O, \Theta$ โดย

$$a * b = \min\{a, b\},$$

$$a \diamond b = \max\{a, b\},$$

$$O(\alpha, \beta, t) = \frac{t}{t + \wedge(\alpha, \beta)},$$

$$\Theta(\alpha, \beta, t) = \frac{\wedge(\alpha, \beta)}{t + \wedge(\alpha, \beta)}$$

จะได้ว่า $(\mathbb{R}, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง

บทนิยาม 4 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง (Intuitionistic fuzzy metric spaces) และให้ $r \in (0, 1)$ $t > 0$ และ $\alpha \in \Psi$ เราจะเรียกเซต

$B(\alpha, r, t) = \{\beta \in \Psi \mid O(\alpha, \beta, t) > 1-r \text{ และ } \Theta(\alpha, \beta, t) < r\}$ ว่าเป็นบอลเปิด (Open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ α และรัศมี r ณ จุด t

บทนิยาม 5 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง จะเรียกเซตที่นิยามโดย $T_{(M,N)} = \{\Omega \subset X \mid \text{สำหรับทุก } \alpha \in \Omega \text{ จะมี } t > 0, r \in (0,1) \text{ โดยที่ } B(\alpha, r, t) \subset \Omega\}$ ว่าเป็นทอพอโลยีบน $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$

บทนิยาม 6 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง ดังนั้นเซต $U \subset \Psi$ จะกล่าวว่าเป็นเซตเปิด (Open set) ถ้าสำหรับทุก $\alpha \in U$ เป็นจุดศูนย์กลางของบอลเปิดสำหรับบางบอลเปิดที่เป็นเซตย่อยของ U เซตเปิดในวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$

บทนิยาม 7 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง และให้ $\Omega \subseteq \Psi$ จะเรียก Ω ว่ามีขอบเขตแบบวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง เมื่อมี $t > 0$ และ $r \in (0,1)$ โดยที่สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \Omega$ จะได้ $O(\alpha, \beta, t) > 1-r$ และ $\Theta(\alpha, \beta, t) < r$

บทนิยาม 8 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง และ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) เมื่อสำหรับทุก $r \in (0,1)$ และ $t \geq 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก $n \geq n_0$ แล้ว $\alpha_n \in B(\alpha, r, t)$ กล่าวคือ $O(\alpha_n, \alpha, t) > 1-r$ และ $\Theta(\alpha_n, \alpha, t) < r$ ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์แทนคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ หรือ $\alpha_n \xrightarrow{(O, \Theta)} \alpha$

บทนิยาม 9 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางและ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ดังนั้น (α_n) เป็นลำดับโคซี (Cauchy sequence) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $r \in (0,1)$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก $m, n \geq n_0$ จะได้ $O(\alpha_m, \alpha_n, t) > 1-r$ และ $\Theta(\alpha_m, \alpha_n, t) < r$ นอกจากนี้วิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางซึ่งทุก ลำดับโคซีเป็นลำดับลู่เข้าจะเป็นปริภูมิบริบูรณ์ (Complete space)

บทนิยาม 10 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง ลำดับ (α_n) ใน Ψ จะกล่าวลู่เข้าสู่ $L \in \Psi$ บนวิกษัยอนิวัตตนิสติกเมตริก (O, Θ) ถ้าสำหรับทุก $r > 0$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $O(\alpha_n, L, t) > 1-r$ และ $\Theta(\alpha_n, L, t) < r$ ทุก $n \geq n_0$ และเขียนแทนโดย $\alpha_n \xrightarrow{(O, \Theta)} L$ ขณะที่ $n \rightarrow \infty$

บทนิยาม 11 (Park, 2004) กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นวิภันย์อินทิวชั้นนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง จะกล่าวว่า $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ ถ้าทุก ๆ ลำดับโคซีเป็นลำดับลูเข้าบน $T_{(O, \Theta)}$

บทนิยาม 12 (Nadaban, 2016) กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ การดำเนินการ $*$ มีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่ $\diamond$ มีความต่อเนื่องแบบโคนอร์มที่และ O เป็นความสัมพันธ์แบบวิภันย์บน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

$$(bM1) \quad O(\alpha, \beta, 0) = 0$$

$$(bM2) \quad O(\alpha, \beta, t) = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \alpha = \beta$$

$$(bM3) \quad O(\alpha, \beta, t) = O(\beta, \alpha, t)$$

$$(bM4) \quad O(\alpha, \gamma, \rho(s+t)) \geq O(\alpha, \beta, t) * O(\beta, \gamma, s)$$

$$(bM5) \quad O(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ มีความต่อเนื่องทางซ้าย และ } \lim_{t \rightarrow \infty} O(\alpha, \beta, t) = 1$$

จะกล่าวว่า $(\Psi, O, *, \rho)$ เป็นวิภันย์บนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (fuzzy b-metric spaces)

ตัวอย่าง 13 (Nadaban, 2016) สมมติให้ $(\Psi, \wedge)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (b-metric spaces) นิยามสำหรับทุก ๆ $\alpha, \beta \in \Psi$ และ $t > 0$ จะนิยาม $*, \diamond, O, \Theta$ โดย

$$O(\alpha, \beta, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \wedge^\gamma(\alpha, \beta)}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

จะได้ว่า $\Theta(\alpha, \beta, t)$ เป็นวิภันย์บนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี สำหรับทุก ๆ $\gamma \in \mathbb{R}^+$

บทนิยาม 14 (Nadaban, 2016) ให้ $\rho \geq 1$ และ f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่าฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ เมื่อสำหรับแต่ละ $t < s$ จะได้ว่า $f(t) \leq f(\rho s)$

บทนิยาม 15 (Nadaban, 2016) กำหนดให้ $(\Psi, O, *, \rho)$ เป็นวิภันย์บนปริภูมิอิงระยะทาง ลำดับ (α_n) ใน Ψ จะกล่าวว่าลูเข้า เมื่อ มี $\alpha \in \Psi$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $t > 0$ จะได้ $O(\alpha_n, \alpha, t) = 1$ ในกรณีนี้ เราจะกล่าวว่า ลำดับ (α_n) ลูเข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ เขียนแทนโดย $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ หรือ $\alpha_n \rightarrow \alpha$

บทนิยาม 16 (Nadaban, 2016) กำหนดให้ $(\Psi, O, *, \rho)$ เป็นวิภันย์บนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ลำดับ (α_n) ใน Ψ จะกล่าวว่า ลำดับ (α_n) เป็นลำดับโคซี ถ้าสำหรับทุก ๆ $r > 0$ และทุก ๆ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $O(\alpha_n, \alpha_m, t) > 1-r$ ทุก ๆ $n, m \geq n_0$

บทนิยาม 17 กำหนดให้ Ψ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี (Topology spaces) จะกล่าวว่า Ψ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff spaces) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $\alpha, \beta \in \Psi$ โดยที่ $\alpha \neq \beta$ จะมีเซตเปิด Φ_1 และ Φ_2 โดยที่ $\alpha \in \Phi_1$ และ $\beta \in \Phi_2$ และ $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$

บทนิยาม 18 กำหนดให้ Ψ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี เซตปกเปิด (Open cover) ของ Ψ คือ วงศ์ของเซตเปิด $\{\Phi_i \mid i \in I\}$ โดยที่ $\Psi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ เซตปกย่อยของเซตปกเปิด $\{\Phi_i \mid i \in I\}$ คือเซตปกเปิด $\{\Phi_j \mid j \in J\}$ โดยที่ J เป็นเซตย่อยของ I

บทนิยาม 19 กำหนดให้ Ψ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี จะกล่าวว่า Ψ เป็นเซตกระชับ (Compact set) เมื่อ สำหรับทุก ๆ เซตปกเปิดของ Ψ จะมีเซตปกย่อยที่เป็นจำกัด

3. วัตถุประสงค์การวิจัย

1. สร้างนิยามวิภันย์อินวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี
2. สร้างนิยามทอพอโลยีบนวิภันย์อินวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี
3. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของทอพอโลยีบนวิภันย์อินวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

4. วิธีดำเนินการวิจัย

ในการนิยามวิภันย์อินวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี เพื่อใช้ในการศึกษานั้นผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาจากเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ซึ่งได้อ้างอิงให้เห็นบางส่วน

1. Intuitionistic fuzzy set ของ Atanassov (1986)
2. Intuitionistic fuzzy metric space ของ Park (2004)
3. Baire's and Cantor's theorems in intuitionistic fuzzy metric space ของ Mursaleen & Lohani (2009)
4. Fuzzy b-metric spaces ของ Nadaban (2016)

งานวิจัยในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะใช้ในการศึกษา วิภันย์อินทิวชันนิสติกบนเซต วิภันย์บนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี วิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง และศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง รวมทั้งศึกษาแนวทางในการพิสูจน์ทั้งนี้เพื่อผู้วิจัยจะใช้เป็นข้อคิดดาในการศึกษาบนวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีต่อไป

2. สร้างนิยามวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและนิยามทอพอโลยีบนวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

จากการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับวิภันย์บนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง แล้วพบว่าผู้วิจัยสามารถนิยามวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนระยะทางแบบบีและทอพอโลยีบนวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนระยะทางแบบบีได้ นอกจากนั้นยังได้ตัวอย่างนิยามของวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

3. ศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ในการศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี ผู้วิจัยจะเริ่มพิจารณาจากสมบัติต่าง ๆ เช่น เซตเปิด ลำดับลู่เข้า ลำดับโคซี การมีขอบเขตแบบวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี เป็นต้น

5. ผลการวิจัย

1. บทนิยามของวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

บทนิยาม 20 (Park, 2004) กำหนดให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคจาก $[0,1] \times [0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ จะเรียกการดำเนินการ $*$ ว่ามีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่ เมื่อ

- (1) $*$ มีสมบัติเปลี่ยนหมู่และสลับที่
- (2) $*$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- (3) สำหรับแต่ละ α $0 \leq \alpha \leq 1$ จะได้ $\alpha * 1 = \alpha$
- (4) สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma, \phi \in [0,1]$ ถ้า $\alpha \leq \gamma$ และ $\beta \leq \phi$ แล้ว $\alpha * \beta \leq \gamma * \phi$

บทนิยาม 21 (Park, 2004) กำหนดให้ $\diamond$ เป็นการดำเนินการทวิภาคจาก $[0,1] \times [0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ จะเรียกการดำเนินการ $\diamond$ ว่ามีความต่อเนื่องแบบโคเนอร์มที่ เมื่อ

- (1) $\diamond$ มีสมบัติเปลี่ยนหมู่และสลับที่
- (2) $\diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- (3) สำหรับแต่ละ α $0 \leq \alpha \leq 1$ จะได้ $\alpha \diamond 0 = \alpha$
- (4) สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma, \phi \in [0,1]$ ถ้า $\alpha \leq \gamma$ และ $\beta \leq \phi$ แล้ว $\alpha \diamond \beta \leq \gamma \diamond \phi$

ข้อสังเกต 22 (Park, 2004)

- (1) ถ้าให้ $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ และ $\alpha_1 > \alpha_2$ แล้วจะได้ว่ามี $\alpha_3, \alpha_4 \in (0,1)$ โดยที่ $\alpha_1 * \alpha_3 \geq \alpha_2$ และ $\alpha_1 \geq \alpha_4 \diamond \alpha_2$
- (2) ถ้าให้ $\alpha_5 \in (0,1)$ แล้วจะได้ว่ามี $\alpha_6, \alpha_7 \in (0,1)$ โดยที่ $\alpha_6 * \alpha_6 \geq \alpha_5$ และ $\alpha_7 \diamond \alpha_7 \leq \alpha_5$

ตัวอย่าง 23 กำหนดให้ $*, \diamond : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ โดยที่ $\alpha * \beta = \alpha\beta$ และ $\alpha \diamond \beta = \min\{\alpha + \beta, 1\}$ เมื่อ $\alpha, \beta \in [0,1]$ จะได้ว่า $*$ มีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่ และ $\diamond$ มีความต่อเนื่องแบบโคนอร์มที่

พิจารณาการดำเนินการ $*$ จะเห็นได้ชัดว่า $*$ มีสมบัติ (1), (3) และ (4) ลำดับต่อไปกำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และให้ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x$ และ $g(\delta) = \delta$ เมื่อ $x, \delta \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งนิยามโดย $x * \beta = f(x)g(\delta) = x\delta$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจาก $[0,1]$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}$ จะได้ว่า $*: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น $*: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ มีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่

พิจารณาการดำเนินการ $\diamond$ จะเห็นได้ชัดว่า $\diamond$ มีสมบัติ (1) และ (3) ลำดับต่อไปพิจารณา $\alpha + \beta$ จะพบว่าถ้า $\alpha + \beta > 1$ จะได้ $\alpha \diamond \beta = 1$ นั่นคือ $\diamond$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ ดังนั้น $\diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด (α, β) ที่ $\alpha + \beta > 1$ ถ้า $\alpha + \beta < 1$ จะได้ $\alpha \diamond \beta = \alpha + \beta$ เนื่องจากการบวกมีความต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2$ ดังนั้น $\diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด (α, β) ที่ $\alpha + \beta < 1$ ถ้า $\alpha + \beta = 1$ ให้ $\varepsilon > 0$ และ ν เป็นบอลเปิดที่จุด (α, β) รัศมี $\varepsilon/2$ ให้ $(\alpha', \beta') \in \nu$ จะได้ว่า $|\alpha - \alpha'| < \varepsilon/2$ และ $|\beta - \beta'| < \varepsilon/2$ กรณี $\alpha' + \beta' > 1$ จะได้ $|\diamond(\alpha, \beta) - \diamond(\alpha', \beta')| = 0 < \varepsilon$ กรณี $\alpha' + \beta' \leq 1$ จะได้ $|\diamond(\alpha, \beta) - \diamond(\alpha', \beta')| \leq |\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| < \varepsilon$ ดังนั้น $\diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด (α, β) ที่ $\alpha + \beta = 1$ สรุปว่า $\diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2$ เนื่องจาก $[0,1]$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}$ จะได้ว่า $\diamond: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ถ้าให้ $\varepsilon, \varphi \in [0,1]$ โดยที่ $\alpha \leq \varepsilon$ และ $\beta \leq \varphi$ จะได้ $\alpha \diamond \beta = \min\{\alpha + \beta, 1\}$ และ $\varepsilon \diamond \varphi = \min\{\varepsilon + \varphi, 1\}$

ถ้า $\alpha \diamond \beta = 1$ จะได้ $1 \leq \alpha + \beta \leq \varepsilon + \varphi$ ดังนั้น $\varepsilon \diamond \varphi = 1$

ถ้า $\alpha \diamond \beta = \alpha + \beta$ จะได้ $\alpha + \beta \leq 1$

ถ้า $\varepsilon \diamond \varphi = 1$ จะได้ $\alpha + \beta \leq 1 = \varepsilon \diamond \varphi$

ถ้า $\varepsilon \diamond \varphi = \varepsilon + \varphi$ จาก $\alpha + \beta \leq \varepsilon + \varphi$ จะได้ $\alpha \diamond \beta \leq \varepsilon \diamond \varphi$

ดังนั้น $\diamond: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ มีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่

บทนิยาม 24 (Nadaban, 2016) ให้ Ψ ไม่เป็นเซตว่างและ $\rho \geq 1$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน $\wedge: \Psi \times \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$ เป็นระยะทางแบบบี (b-metric) บน Ψ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$

$$(b_1) \wedge(\alpha, \beta) = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \alpha = \beta$$

$$(b_2) \wedge(\alpha, \beta) = \wedge(\beta, \alpha)$$

$$(b_3) \wedge(\alpha, \beta) \leq \rho[\wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta)]$$

จะเรียก $(\Psi, \wedge)$ ว่าเป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ตัวอย่าง 25 (Nadaban, 2016) ให้ $\Psi = \mathbb{R}$ และ $\wedge_b(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)^2$ เป็นระยะทางแบบบี โดยที่ $\rho = 2$ จะได้ว่า $(\mathbb{R}, \wedge_b)$ เป็นปริภูมิองระยะทางแบบบี

บทนิยาม 26 (Nadaban, 2016) กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ * มีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่ $\diamond$ มีความต่อเนื่องแบบโคนอร์มที่ และ O, Θ เป็นความสัมพันธ์แบบวิภันชนบน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O, Θ มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

$$(IFbM_1) \quad O(\alpha, \beta, t) + \Theta(\alpha, \beta, t) \leq 1$$

$$(IFbM_2) \quad O(\alpha, \beta, 0) = 0$$

$$(IFbM_3) \quad O(\alpha, \beta, t) = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \alpha = \beta$$

$$(IFbM_4) \quad O(\alpha, \beta, t) = O(\beta, \alpha, t)$$

$$(IFbM_5) \quad O(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \geq O(\alpha, \gamma, t) * O(\gamma, \beta, s)$$

$$(IFbM_6) \quad O(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ มีความต่อเนื่องทางซ้ายและ } \lim_{t \rightarrow \infty} O(\alpha, \beta, t) = 1$$

$$(IFbM_7) \quad \Theta(\alpha, \beta, 0) = 1$$

$$(IFbM_8) \quad \Theta(\alpha, \beta, t) = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \alpha = \beta$$

$$(IFbM_9) \quad \Theta(\alpha, \beta, t) = \Theta(\beta, \alpha, t)$$

$$(IFbM_{10}) \quad \Theta(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \leq \Theta(\alpha, \gamma, t) \diamond \Theta(\gamma, \beta, s)$$

$$(IFbM_{11}) \quad \Theta(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ มีความต่อเนื่องทางขวาและ } \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(\alpha, \beta, t) = 0$$

จะเรียก $(O, \Theta)_b$ ว่าระยะทางเชิงวิภันชนอินทิวชันนิสติกแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric) บน Ψ และเรียก $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ ว่าวิภันชนอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิองระยะทางแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric)

ตัวอย่าง 27 ให้ $(\Psi, \wedge)$ เป็นปริภูมิองระยะทางแบบบี $\rho \geq 1$ การดำเนินงานทวิภาค * และ $\diamond$ นิยามโดยสำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in [0, 1]$ จะได้ $\alpha * \beta = \alpha\beta$ และ $\alpha \diamond \beta = \min\{\alpha + \beta, 1\}$ และให้ O_b และ Θ_b เป็นความสัมพันธ์วิภันชนบน $\Psi \times \Psi \times [0, \infty)$ โดยที่

$$O_b(\alpha, \beta, t) = \frac{t}{t + \wedge(\alpha, \beta)} \text{ และ } \Theta_b(\alpha, \beta, t) = \frac{\wedge(\alpha, \beta)}{t + \wedge(\alpha, \beta)} \text{ เมื่อ } t > 0 \text{ และ } \alpha, \beta \in \Psi$$

ดังนั้น $(\Psi, O_b, \Theta_b, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภันชนอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิองระยะทางแบบบี

พิสูจน์ ในที่นี้ จะพิสูจน์เพียง $(IFbM_5)$ และ $(IFbM_{10})$ เพราะว่าข้ออื่น ๆ เป็นการพิสูจน์ขั้นพื้นฐาน

ให้ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

และสมมติให้ $O_b(\alpha, \gamma, t) \leq O_b(\gamma, \beta, s)$

ดังนั้น
$$\frac{t}{t + \wedge(\alpha, \gamma)} \leq \frac{s}{s + \wedge(\gamma, \beta)}$$

นั่นคือ
$$t \wedge (\gamma, \beta) \leq s \wedge (\alpha, \gamma)$$

พิจารณา
$$\begin{aligned} O_b(\alpha, \beta, \rho(t+s)) &= \frac{\rho(t+s)}{\rho(t+s) + \wedge(\alpha, \beta)} \\ &\geq \frac{\rho(t+s)}{\rho(t+s) + \rho(\wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta))} \\ &= \frac{\rho(t+s)}{\rho[(t+s) + (\wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta))]} \\ &= \frac{t+s}{t+s + \wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta)} \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า
$$\frac{t+s}{t+s + \wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta)} \geq \frac{t}{t + \wedge(\alpha, \gamma)}$$

จาก
$$s \wedge (\alpha, \gamma) \geq t \wedge (\gamma, \beta)$$

$$\begin{aligned} t^2 + st + t \wedge (\alpha, \gamma) + s \wedge (\alpha, \gamma) &\geq t^2 + st + t \wedge (\alpha, \gamma) + t \wedge (\gamma, \beta) \\ (t+s)(t + \wedge(\alpha, \gamma)) &\geq t(t+s + \wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta)) \end{aligned}$$

$$\frac{t+s}{t+s + \wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta)} \geq \frac{t}{t + \wedge(\alpha, \gamma)}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} O_b(\alpha, \beta, \rho(t+s)) &\geq \frac{t}{t + \wedge(\alpha, \gamma)} \\ &\geq \left(\frac{t}{t + \wedge(\alpha, \gamma)} \right) \left(\frac{s}{s + \wedge(\gamma, \beta)} \right) \\ &= O_b(\alpha, \gamma, t) * O_b(\gamma, \beta, s) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\Theta(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \leq \Theta(\alpha, \gamma, t) \diamond \Theta(\gamma, \beta, s)$

ดังนั้น $(\Psi, O_b, \Theta_b, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษณยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิองระยะทางแบบบี □

บทนิยาม 28 (Nadaban, 2016) ให้ $\rho \geq 1$ และ f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ เมื่อสำหรับแต่ละ $t < s$ จะได้ว่า $f(t) \leq f(\rho s)$ และฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มแบบ ρ เมื่อสำหรับแต่ละ $t < s$ จะได้ว่า $g(t) \geq g(\rho s)$

บทแทรก 29 สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \Psi$ ฟังก์ชัน $O(\alpha, \beta, \cdot)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ จาก $[0, \infty)$ ไปยัง $[0, 1]$ และ $\Theta(\alpha, \beta, \cdot)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มแบบ ρ จาก $[0, \infty)$ ไปยัง $[0, 1]$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\alpha, \beta \in \Psi$ และ $0 < t < s$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad O(\alpha, \beta, \rho s) &= O(\alpha, \beta, \rho(s-t+t)) \\ &\geq O(\alpha, \beta, s-t) * O(\alpha, \beta, t) \\ &= 1 * O(\alpha, \beta, t) \\ &= O(\alpha, \beta, t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $O(\alpha, \beta, \cdot)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ

$$\begin{aligned} \text{ในทำนองเดียวกัน} \quad \Theta(\alpha, \beta, \rho s) &= \Theta(\alpha, \beta, \rho(s-t+t)) \\ &\leq \Theta(\alpha, \beta, s-t) \diamond \Theta(\alpha, \beta, t) \\ &= 0 \diamond \Theta(\alpha, \beta, t) \\ &= \Theta(\alpha, \beta, t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $\Theta(\alpha, \beta, \cdot)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มแบบ ρ □

2. ทอพอโลยีบนวิกษณยอนทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

บทนิยาม 30 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษณยอนทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี สำหรับแต่ละ $r \in \mathbb{R}$, $t > 0$ และ $\alpha \in \Psi$ จะเรียกเซต $B(\alpha, r, t) = \{\beta \in \Psi \mid O(\alpha, \beta, t) > 1-r, \Theta(\alpha, \beta, t) < r\}$ ว่าเป็นบอลเปิด (Open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ α รัศมี r ณ จุดเวลา t

ตัวอย่าง 31 ให้ $(\mathbb{R}, O_b, \Theta_b, *, \diamond, 2)$ เป็นวิกษณยอนทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี ซึ่งกำหนดโดย ระยะทางเชิงวิกษณยอนทิวชันนิสติกแบบบี $\wedge_b$ โดยนิยาม $\wedge_b$ เหมือนกับ ตัวอย่าง 4.6 และให้ $r = \frac{1}{2}$, $t = 1$ และ $0 \in \mathbb{R}$ จะได้

$$B_{d_b}\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = \left\{ \beta \in \mathbb{R} \mid O_{d_b}(0, \beta, 1) > \frac{1}{2}, \Theta_{d_b}(0, \beta, 1) < \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{จาก } O_{d_b}(0, \beta, 1) = \frac{1}{1 + \wedge_b(0, \beta)} > \frac{1}{2} \text{ และ } \Theta_{d_b}(0, \beta, 1) = \frac{\wedge_b(0, \beta)}{1 + \wedge_b(0, \beta)} < \frac{1}{2}$$

$$\text{จะได้ } \wedge_b(0, \beta) < 1$$

$$\text{เนื่องจากเรานิยาม } \wedge_b \text{ เหมือนกับตัวอย่าง 4.6 จะได้ } \wedge_b(0, \beta) = (0 - \beta)^2 = \beta^2 < 1$$

$$\text{ดังนั้น } B_{d_b}\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = \left\{ \beta \in \mathbb{R} \mid \beta^2 < 1 \right\} \quad \square$$

ทฤษฎีบท 32 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และให้

$$T_{(O,\Theta)} = \{\Omega \subseteq \Psi \mid \forall \alpha \in \Omega, \exists t > 0, \exists r \in (0,1), B(\alpha, r; t) \subseteq \Omega\}$$

จะได้ $T_{(O,\Theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$

พิสูจน์ (1) เห็นได้ชัดว่า $\emptyset$ และ Ψ เป็นสมาชิกใน $T_{(O,\Theta)}$

$$(2) \text{ ให้ } \{\tau_i\} \in T_{(O,\Theta)} \text{ และ } \tau = \bigcup_{i \in I} \tau_i$$

เราจะแสดงว่า $\tau \in T_{(O,\Theta)}$ ถ้าให้ $\alpha \in \tau$ จะได้ว่ามี $i_0 \in I$ โดยที่ $\alpha \in \tau_{i_0}$

เนื่องจาก $\tau_{i_0} \in T_{(O,\Theta)}$ จะได้ว่ามี $t > 0$ และ $r \in (0,1)$ โดยที่ $B(\alpha, r, t) \subseteq \tau_{i_0}$

$$\text{นั่นคือ } B(\alpha, r, t) \subseteq \bigcup_{i \in I} \tau_i = \tau$$

$$(3) \text{ ให้ } \tau_1, \tau_2 \in T_{(O,\Theta)} \text{ จะได้ } \tau_1, \tau_2 \subset \Psi \text{ และได้ว่า } \tau_1 \cap \tau_2 \subset \Psi$$

ให้ $\alpha \in \tau_1 \cap \tau_2$ จากนิยามทอพอโลยี $T_{(M,N)}$ จะมี $t_1, t_2 > 0$ และมี $r_1, r_2 \in (0,1)$ ที่ซึ่ง

$$B(\alpha, r_1, t_1) \subseteq \tau_1 \text{ และ } B(\alpha, r_2, t_2) \subseteq \tau_2 \text{ ดังนั้น}$$

$$B(\alpha, r_1, t_1) \cap B(\alpha, r_2, t_2) \subset \tau_1 \cap \tau_2$$

ลำดับต่อไปต้องการแสดงว่า $B(\alpha, r_1, t_1) \cap B(\alpha, r_2, t_2)$ เป็นเซตเปิด

$$\text{สมมติให้ } r = \min\{r_1, r_2\}, t = \min\left\{\frac{t_1}{\rho}, \frac{t_2}{\rho}\right\} \text{ และ } \beta \in B(\alpha, r, t)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad O(\alpha, \beta, t_1) &= O\left(\alpha, \beta, \rho\left(\frac{t_1}{\rho}\right)\right) \\ &\geq O(\alpha, \beta, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &> 1 - r \\ &\geq 1 - r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \Theta(\alpha, \beta, t_1) &= \Theta\left(\alpha, \beta, \rho\left(\frac{t_1}{\rho}\right)\right) \\ &\leq \Theta(\alpha, \beta, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< r \\ &\leq r_1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\beta \in B(\alpha, r_1, t_1)$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $O(\alpha, \beta, t_2) \geq 1-r_2$ และ $\Theta(\alpha, \beta, t_2) \leq r_2$
 เพราะฉะนั้น $\beta \in B(\alpha, r_2, t_2)$ และได้อีกว่า $\beta \in B(\alpha, r_1, t_1) \cap B(\alpha, r_2, t_2)$
 และ $B(\alpha, r, t) \subseteq B(\alpha, r_1, t_1) \cap B(\alpha, r_2, t_2)$
 นั่นคือ $B(\alpha, r_1, t_1) \cap B(\alpha, r_2, t_2)$ เป็นเซตเปิด และได้อีกว่า $\tau_1 \cap \tau_2 \in T_{(0, \theta)}$
 ดังนั้น $T_{(0, \theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ □

ข้อสังเกต 33 สำหรับทุก ๆ $\alpha \in \Psi$ $r \in (0, 1)$ และ $t > 0$ $B(\alpha, r, t)$ เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 34 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอนิวัตินิสดิกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีแล้วจะได้ว่า
 $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ

พิสูจน์ ให้ $\alpha, \beta \in \Psi$ โดยที่ $\alpha \neq \beta$ และ $t > 0$

ดังนั้น $0 < O(\alpha, \beta, s) < 1$ และ $0 < \Theta(\alpha, \beta, s) < 1$

ให้ $r_1 = O(\alpha, \beta, t)$, $r_2 = \Theta(\alpha, \beta, t)$ และ $r = \max\{r_1, 1-r_2\}$ จาก ข้อสังเกต 4.3

สำหรับทุก ๆ $r_0 \in (r, 1)$ จะมี r_3 และ r_4 ที่ซึ่ง $r_3 * r_3 \geq r_0$ และ $(1-r_4) \diamond (1-r_4) \leq 1-r_0$

ต่อจากนั้นให้ $r_5 = \max\{r_3, r_4\}$

พิจารณา $B\left(\alpha, 1-r_5, \frac{t}{2\rho}\right)$ และ $B\left(\beta, 1-r_5, \frac{t}{2\rho}\right)$ เห็นได้ชัดว่า

$$B\left(\alpha, 1-r_5, \frac{t}{2\rho}\right) \cap B\left(\beta, 1-r_5, \frac{t}{2\rho}\right) \neq \emptyset$$

สมมติให้ $\gamma \in B\left(\alpha, 1-r_5, \frac{t}{2\rho}\right) \cap B\left(\beta, 1-r_5, \frac{t}{2\rho}\right)$

จะได้ว่า $r_1 = O(\alpha, \beta, t)$

$$\begin{aligned} &= O\left(\alpha, \beta, \rho\left(\frac{t}{2\rho} + \frac{t}{2\rho}\right)\right) \\ &\geq O\left(\alpha, \gamma, \frac{t}{2\rho}\right) * O\left(\gamma, \beta, \frac{t}{2\rho}\right) \\ &> [1-(1-r_5)] * [1-(1-r_5)] \\ &\geq r_5 * r_5 \\ &\geq r_3 * r_3 \\ &\geq r_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> r_1 \\
 \text{และ} \quad r_2 &= \Theta(\alpha, \beta, t) \\
 &= \Theta\left(\alpha, \beta, \rho\left(\frac{t}{2\rho} + \frac{t}{2\rho}\right)\right) \\
 &\leq \Theta\left(\alpha, \gamma, \frac{t}{2\rho}\right) \diamond \Theta\left(\gamma, \beta, \frac{t}{2\rho}\right) \\
 &< (1-r_5) \diamond (1-r_5) \\
 &\leq (1-r_4) \diamond (1-r_4) \\
 &\leq 1-r_0 \\
 &< r_2
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $r_1 > r_1$ และ $r_2 < r_2$ ซึ่งขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ □

ข้อสังเกต 35 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และให้ $\Omega \subseteq \Psi$ เป็นเซตย่อยกระชับ (Compact subset) จะได้ว่า Ω เป็นเซตปิด

บทนิยาม 36 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และ $\Omega \subseteq \Psi$ จะเรียก Ω ว่ามีขอบเขตแบบวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (IF_b -bounded) เมื่อมี $t > 0$, $r \in (0,1)$ โดยที่สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \Omega$ จะได้ $O(\alpha, \beta, t) > 1-r$ และ $\Theta(\alpha, \beta, t) < r$

ข้อสังเกต 37 สำหรับทุก ๆ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีซึ่งกำหนดโดยระยะทางแบบบี $\wedge$ จะได้ $\Omega \subseteq \Psi$ มีขอบเขตแบบวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีก็ต่อเมื่อ Ω มีขอบเขตบน $(\Psi, \wedge)$

ทฤษฎีบท 38 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และให้ $\Omega \subseteq \Psi$ โดยที่ Ω เป็นเซตกระชับ Ω บน $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ จะได้ว่า Ω มีขอบเขตแบบวิกษัยอนิวัตตนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

พิสูจน์ ให้ $t > 0$ และ $r \in (0,1)$ จากเซตปกเปิด $\{B(\alpha, r, t) | u \in \Omega\}$ ของ Ω เนื่องจาก Ω เป็นเซต

กระชับ จะได้ว่ามี $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Omega$ โดยที่ $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\alpha_i, r, t)$

สมมติให้ $\alpha, \beta \in \Omega$ จะได้ว่า $\alpha \in B(\alpha_i, r, t)$ และ $\beta \in B(\alpha_j, r, t)$ สำหรับบาง i, j

ดังนั้น $O(\alpha, \alpha_j, t) > 1-r$, $\Theta(\alpha, \alpha_j, t) < r$, $O(\beta, \alpha_j, t) > 1-r$ และ

$$\Theta(\beta, \alpha_j, t) < r$$

ถ้าให้ $\delta = \min \{O(\alpha_i, \alpha_j, t) | 1 \leq i, j \leq n\}$ และ $\varepsilon = \max \{\Theta(\alpha_i, \alpha_j, t) | 1 \leq i, j \leq n\}$

ดังนั้น $\delta, \varepsilon > 0$ ตอนนี้เราจะได้

$$\begin{aligned} O(\alpha, \beta, \rho(t+2pt)) &\geq O(\alpha, \alpha_i, t) * O(\alpha_i, \beta, 2pt) \\ &\geq O(\alpha, \alpha_i, t) * O(\alpha_i, \alpha_j, t) * O(\alpha_j, \beta, t) \\ &> (1-r) * \delta * (1-r) \\ &> 1-s_1 \text{ สำหรับบาง } 0 < s_1 < 1 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\Theta(\alpha, \beta, \rho(t+2pt)) < r \diamond \varepsilon \diamond r \diamond s_2$ สำหรับบาง $0 < s_2 < 1$

ให้ $s = \max \{s_1, s_2\}$ และ $t' = \rho(t+2pt)$ จะได้

$$O(\alpha, \beta, t') > 1-s \text{ และ } \Theta(\alpha, \beta, t') < s \text{ เมื่อ } \alpha, \beta \in \Omega$$

ดังนั้น Ω มีขอบเขตแบบวิกษัยอนิวัตินิสดิกบนปริภูมิองระยะทางแบบบี

□

บทนิยาม 39 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอนิวัตินิสดิกบนปริภูมิองระยะทางแบบบีและ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) เมื่อสำหรับทุก ๆ $r \in (0, 1)$ และ $t \geq 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ แล้ว $\alpha_n \in B(\alpha, r, t)$ กล่าวคือ $O(\alpha_n, \alpha, t) > 1-r$ และ $\Theta(\alpha_n, \alpha, t) < r$ ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์แทนคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ หรือ $\alpha_n \xrightarrow{(O, \Theta)} \alpha$

ทฤษฎีบท 40 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอนิวัตินิสดิกบนปริภูมิองระยะทางแบบบี $T_{(O, \Theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน Ψ ซึ่งกำหนดโดยระยะทางเชิงวิกษัยอนิวัตินิสดิกแบบบี (O, Θ) และให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่า ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $t > 0$ จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} O(\alpha_n, \alpha, t) = 1$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(\alpha_n, \alpha, t) = 0$

พิสูจน์ ให้ $t > 0$ และลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) เพราะฉะนั้นสำหรับทุก ๆ $r \in (0, 1)$

จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับแต่ละ $n \geq n_0$ จะได้ $|1 - O(\alpha_n, \alpha, t)| < r$ และ $|0 - \Theta(\alpha_n, \alpha, t)| < r$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} O(\alpha_n, \alpha, t) = 1$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(\alpha_n, \alpha, t) = 0$

กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} O(\alpha_n, \alpha, t) = 1$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(\alpha_n, \alpha, t) = 0$ สำหรับทุก ๆ $t > 0$

ถ้า $\tau \in T_{(0, \Theta)}$ โดยที่ $\alpha \in \tau$ จะมี $t > 0$ และ $r \in (0, 1)$ โดยที่ $B(\alpha, r, t) \subset \tau$

จากสมมติฐานจะได้ว่าสำหรับแต่ละ $n \geq n_0$ จะได้

$$|1 - O(\alpha_n, \alpha, t)| < r \text{ และ } |0 - \Theta(\alpha_n, \alpha, t)| < r$$

นั่นคือ $\alpha_n \in B(\alpha, r, t) \subset \tau$ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$

นั่นคือ $\alpha_n \xrightarrow{(0, \Theta)} \alpha$

□

ทฤษฎีบท 41 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่าลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) ก็ต่อเมื่อลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน $(\Psi, T_{(0, \Theta)_n})$

พิสูจน์ สมมติให้ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) และ U เป็นย่านใกล้เคียงของ α จะได้ว่ามี $\tau \in T_{(0, \Theta)}$ โดยที่ $\alpha \in \tau \subset U$ จาก $\tau \in T_{(0, \Theta)}$ ดังนั้นมี $t > 0$ และ $r \in (0, 1)$ โดยที่ $B(\alpha, r, t) \subset \tau$ และจากสมมติฐานจะมี $k_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $k \geq k_0$ จะได้

$$O(\alpha_k, \alpha, t) > 1 - r \text{ และ } \Theta(\alpha_k, \alpha, t) < r$$

พิจารณาด้านเปิด $B(\alpha, r, t)$ จะได้ $\alpha_k \in B(\alpha, r, t)$ และได้อีกว่า $\alpha_k \in B(\alpha, r, t) \subset \tau \subset U$

สำหรับทุก ๆ $k \geq k_0$ นั่นคือลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน $(\Psi, T_{(0, \Theta)_n})$

ในทางกลับกันสมมติให้ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน $(\Psi, T_{(0, \Theta)_n})$ และให้ $r > 0$ และ

$t > 0$

เนื่องจาก $B(\alpha, r, t)$ เป็นย่านใกล้เคียงของ α และ $\alpha_n \rightarrow \alpha$ จะได้ว่ามี $k_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่

สำหรับแต่ละ $k \geq k_0$ จะได้ $\alpha_k \in B(\alpha, r, t)$

ดังนั้น $O(\alpha_k, \alpha, t) > 1 - r$ และ $\Theta(\alpha_k, \alpha, t) < r$ สำหรับทุก ๆ $k \geq k_0$

นั่นคือ ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ)

□

ข้อสังเกต 42 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภันย์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี $\Omega \subset \Psi$ และให้ Ω เป็นเซตปิด ถ้า $\alpha \in \bar{\Omega}$ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha_n) \in \Omega$ โดยที่ $\alpha_n \rightarrow \alpha$ บน $(\Psi, T_{(0, \Theta)})$

บทนิยาม 43 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษณยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิองระยะทางแบบบี และ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ดังนั้น (α_n) เป็นลำดับโคซี ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $r \in (0, 1)$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ จะได้ $O(\alpha_m, \alpha_n, t) > 1-r$ และ $\Theta(\alpha_m, \alpha_n, t) < r$ นอกจากนี้วิกษณยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิองระยะทางแบบบีซึ่งทุก ๆ ลำดับโคซีเป็นลำดับลู่อู่เข้าจะเป็นปริภูมิบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 44 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษณยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิองระยะทางแบบบีและ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ถ้าลำดับ (α_n) ลู่อู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) เมื่อ $\alpha \in \Psi$ แล้วลำดับ (α_n) จะเป็นลำดับโคซี

พิสูจน์ สมมติให้ $\alpha \in \Psi$ โดยลำดับ (α_n) ลู่อู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) และให้ $r > 0$ และ $t > 0$ จะมี $r_1, r_2 \in (0, 1)$ ที่ทำให้ $(1-r_1) * (1-r_1) \geq 1-r$ และ $r_2 \diamond r_2 \leq r$ ให้ $r^* = \min\{r_1, r_2\}$

จากสมมติฐาน จะได้ว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้

$$O\left(\alpha_n, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) > 1-r^* \text{ และ } \Theta\left(\alpha_n, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) < r^*$$

$$\text{ถ้าให้ } m \geq n_0 \text{ จะได้ } O\left(\alpha_m, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) > 1-r^* \text{ และ } \Theta\left(\alpha_m, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) < r^*$$

$$\text{จาก } O(\alpha_m, \alpha_n, t) \geq O\left(\alpha_m, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) * O\left(\alpha, \alpha_n, \frac{t}{2\rho}\right)$$

$$> (1-r^*) * (1-r^*)$$

$$\geq (1-r_1) * (1-r_1)$$

$$\geq 1-r$$

$$\text{และ } \Theta(\alpha_m, \alpha_n, t) \leq \Theta\left(\alpha_m, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) \diamond \Theta\left(\alpha, \alpha_n, \frac{t}{2\rho}\right)$$

$$< r^* \diamond r^*$$

$$\leq r_2 \diamond r_2$$

$$\leq r$$

ดังนั้น (α_n) เป็นลำดับโคซี

□

ทฤษฎีบท 45 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษณยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิองระยะทางแบบบี และ (α_n) เป็นลำดับโคซีใน Ψ ถ้า (α_n) มีลำดับย่อยที่ลู่อู่แล้ว $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์

พิสูจน์ สมมติให้ (α_{i_n}) เป็นลำดับย่อยของลำดับโคซี (α_n) โดยที่ (α_{i_n}) เป็นลำดับที่ลู่อู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ จะแสดงว่า สำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ และทุก ๆ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้

$$O(\alpha_n, \alpha, t) > 1-r \text{ และ } \Theta(\alpha_n, \alpha, t) < r$$

ให้ $r \in (0,1)$ และ $t > 0$ สมมติให้ $r^* \in (0,1)$ โดยที่ $(1-r^*) * (1-r^*) \geq 1-r$ และ $r^* \diamond r^* \leq r$ เพราะฉะนั้นจะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ จะได้

$$O\left(\alpha_m, \alpha_n, \frac{t}{2\rho}\right) > 1-r^* \text{ และ } \Theta\left(\alpha_m, \alpha_n, \frac{t}{2\rho}\right) < r^*$$

เนื่องจาก $\alpha_{i_n} \xrightarrow{(0,\Theta)} \alpha$ จะมี $i_p \in \mathbb{N}$ โดยที่ $i_p \geq n_0$ และได้ว่า

$$O\left(\alpha_{i_p}, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) > 1-r^* \text{ และ } \Theta\left(\alpha_{i_p}, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) < r^*$$

ถ้า $n \geq n_0$ จะได้

$$\begin{aligned} O(\alpha_n, \alpha, t) &\geq O\left(\alpha_{i_p}, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) * O\left(\alpha_n, \alpha_{i_p}, \frac{t}{2\rho}\right) \\ &> (1-r^*) * (1-r^*) \end{aligned}$$

$$\geq 1-r$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \Theta(\alpha_n, \alpha, t) &\leq \Theta\left(\alpha_{i_p}, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) \diamond \Theta\left(\alpha_n, \alpha_{i_p}, \frac{t}{2\rho}\right) \\ &< r^* \diamond r^* \end{aligned}$$

$$\leq r$$

จากนิยามจะได้ $\alpha_n \xrightarrow{(0,\Theta)} \alpha$ ดังนั้น $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ $\square$

บทนิยาม 46 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิองระยะทางแบบบีและให้ Ω เป็นปริภูมิย่อยของ Ψ จะกล่าวว่า $(O_\Omega, \Theta_\Omega)$ นิยามโดย

$$(O_\Omega, \Theta_\Omega) = (O|_{\Omega \times \Omega \times [0, \infty)}, \Theta|_{\Omega \times \Omega \times [0, \infty)})$$

เป็นระยะทางเชิงวิกษัยอินทิวชันนิสติกแบบบีซึ่งถูกจำกัดโดย Ω

ทฤษฎีบท 47 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิกษณัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี Ω เป็นปริภูมิย่อยของ Ψ และให้ $(O_\Omega, \Theta_\Omega) = (O|_{\Omega \times \Omega \times [0, \infty)}, \Theta|_{\Omega \times \Omega \times [0, \infty)})$ เป็นระยะทางเชิงวิกษณัยอินทิวชันนิสติกแบบบีซึ่งถูกจำกัดโดย Ω ดังนั้น $(\Omega, O_\Omega, \Theta_\Omega, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ Ω เป็นเซตปิด

พิสูจน์ สมมติให้ Ω เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นเซตปิดของ Ψ และลำดับ (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ω

เพราะฉะนั้น (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ψ และยังได้อีกว่ามี $\alpha \in \Psi$ โดยที่ $\alpha_n \rightarrow \alpha$ บน

$T_{(0, \Theta)}$ ดังนั้น $\alpha \in \bar{\Omega} = \Omega$ นั่นคือ (α_n) ลู่เข้าใน Ω และได้อีกว่า $(\Omega, O_\Omega, \Theta_\Omega, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์

สมมติให้ $(\Omega, O_\Omega, \Theta_\Omega, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์และให้ $\alpha \in \bar{\Omega}$

จะมีลำดับ (α_n) ใน Ω โดยที่ $\alpha_n \rightarrow \alpha$ บน $(\Psi, T_{(0, \Theta)})$ และได้ว่า (α_n) เป็นลำดับโคชี

ใน Ψ ให้ $t > 0$ และ $r \in (0, 1)$ แล้วจะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ จะได้

$$O(\alpha_n, \alpha_m, t) > 1-r \text{ และ } \Theta(\alpha_n, \alpha_m, t) < r$$

จาก $\Omega \subseteq \Psi$ นั่นคือสำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ จะได้

$$O_\Omega(\alpha_n, \alpha_m, t) > 1-r \text{ และ } \Theta_\Omega(\alpha_n, \alpha_m, t) < r$$

ดังนั้นลำดับ (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ω

เนื่องจาก Ω เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ ดังนั้น $\alpha_n \rightarrow \beta$ ใน Ω สำหรับบาง $\beta \in \Omega$

แต่จาก Ω เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ จะได้ว่า $\alpha = \beta \in \Omega$

นั่นคือ $\bar{\Omega} \subset \Omega$ และเห็นได้ชัดว่า $\Omega \subseteq \bar{\Omega}$ ดังนั้น $\Omega = \bar{\Omega}$ □

6. สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้ให้นิยามของวิกษณัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และศึกษาสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ เพื่อให้ได้ข้อสรุปเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับวิกษณัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ซึ่งได้ผลการวิจัยเป็นดังนี้

1. นิยามของวิกษณัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ * มีความต่อเนื่องแบบนอร์มที่ $\diamond$ มีความต่อเนื่องแบบโคเนอร์มที่และ O, Θ เป็นความสัมพันธ์แบบวิกษณัยบน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O, Θ มีสมบัติดังนี้สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

$$(IFbM_1) \quad O(\alpha, \beta, t) + \Theta(\alpha, \beta, t) \leq 1$$

$$(IFbM_2) O(\alpha, \beta, 0) = 0$$

$$(IFbM_3) O(\alpha, \beta, t) = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \alpha = \beta$$

$$(IFbM_4) O(\alpha, \beta, t) = O(\beta, \alpha, t)$$

$$(IFbM_5) O(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \geq O(\alpha, \gamma, t) * O(\gamma, \beta, s)$$

$$(IFbM_6) O(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ มีความต่อเนื่องทางซ้ายและ}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} O(\alpha, \beta, t) = 1$$

$$(IFbM_7) \Theta(\alpha, \beta, 0) = 1$$

$$(IFbM_8) \Theta(\alpha, \beta, t) = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \alpha = \beta$$

$$(IFbM_9) \Theta(\alpha, \beta, t) = \Theta(\beta, \alpha, t)$$

$$(IFbM_{10}) \Theta(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \leq \Theta(\alpha, \gamma, t) \diamond \Theta(\gamma, \beta, s)$$

$$(IFbM_{11}) \Theta(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ มีความต่อเนื่องทางขวาและ}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(\alpha, \beta, t) = 0$$

จะเรียก $(O, \Theta)_b$ ว่าระยะทางเชิงวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric) บน Ψ และเรียก $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ ว่าวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric)

2. นิยามของทอพอโลยีบนวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี
เซต $T_{(O, \Theta)} = \{ \Omega \subseteq \Psi \mid \forall \alpha \in \Omega, \exists t > 0, \exists r \in (0, 1), B(\alpha, r; t) \subseteq \Omega \}$ จะเป็นทอพอโลยีบน $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$

3. สมบัติต่างๆ ของทอพอโลยีบนวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

3.1 ทฤษฎีบท 34 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีแล้วจะได้ว่า $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ

3.2 ทฤษฎีบท 38 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและให้ $\Omega \subseteq \Psi$ โดยที่ Ω เป็นเซตกระชับ Ω บน $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ จะได้ว่า Ω มีขอบเขตแบบวิภาษนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

3.3 ทฤษฎีบท 40 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภันซ์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี $T_{(O, \Theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน Ψ ซึ่งกำหนดโดยระยะทางเชิงวิภันซ์อินทิวชันนิสติกแบบบี (O, Θ) และให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่า ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $t > 0$ จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} O(\alpha_n, \alpha, t) = 1$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(\alpha_n, \alpha, t) = 0$

3.4 ทฤษฎีบท 41 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภันซ์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่าลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) ก็ต่อเมื่อลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน $(\Psi, T_{(O, \Theta)_n})$

3.5 ทฤษฎีบท 44 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภันซ์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ถ้าลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O, Θ) เมื่อ $\alpha \in \Psi$ แล้วลำดับ (α_n) จะเป็นลำดับโคซี

3.6 ทฤษฎีบท 45 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภันซ์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และ (α_n) เป็นลำดับโคซีใน Ψ ถ้า (α_n) มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแล้ว $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์

3.7 ทฤษฎีบท 47 ให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \diamond, \rho)$ เป็นวิภันซ์อินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี Ω เป็นปริภูมิย่อยของ Ψ และให้ $(O_\Omega, \Theta_\Omega) = (O|_{\Omega \times \Omega \times [0, \infty)}, \Theta|_{\Omega \times \Omega \times [0, \infty)})$ เป็นระยะทางเชิงวิภันซ์อินทิวชันนิสติกแบบบีซึ่งถูกจำกัดโดย Ω ดังนั้น $(\Omega, O_\Omega, \Theta_\Omega, *, \diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ Ω เป็นเซตปิด

7. เอกสารอ้างอิง

- Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87-96.
[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- Atanassov, K. (1994). New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 61(2), 137-42. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(94\)90229-1](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90229-1)
- Çoker, D. (1997). An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 88(1), 81-89. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(96\)00076-0](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00076-0)
- George, A., & Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3), 395–399. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(94\)90162-7](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90162-7)

- Kramosil, I., & Michálek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric spaces, *Kybernetika*, 11(5), 336–344. <http://dml.cz/dmlcz/125556>
- Mursaleen, M., & Lohani, Q. M. D. (2009). Intuitionistic fuzzy 2-normed space and some related concepts. *Chaos Solitons & Fractals*, 42(1), 224-234. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.11.006>
- Mursaleen, M., Lohani, Q. M. D., & Mohiuddine, S. A. (2009). Intuitionistic fuzzy 2-metric space and its completion. *Chaos Solitons & Fractals*, 42(2), 1258-65. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.03.025>
- Nadaban, S. (2016). Fuzzy b-Metric spaces, *International Journal of Computers, Communications & Control*, 11(2), 273–281. <https://doi.org/10.15837/ijccc.2016.2.2443>
- Park, J. H. (2004). Intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos Solitons & Fractals*, 22(5), 1039-1046. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.051>
- Karakus, S., Demirci, K., & Duman, O. (2008). Statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces. *Chaos Solitons & Fractals*, 35(4), 763-769. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.05.046>
- Saadati, R., & Park, J. H. (2006). On the intuitionistic fuzzy topological spaces. *Chaos Solitons & Fractals*, 27(2), 331-344. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.03.019>
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)