

เมทริกซ์จacobsthal M ขนาด 3×3 ที่สัมพันธ์กับจำนวนจacobsthal
JACOBSTHAL'S MATRIX M OF 3×3 DIMENSION RELATED WITH
THE JACOBSTHAL NUMBERS

ทิวาพร ชันผณี^{1*}, ชัยณรงค์ ชันผณี¹

Tiwabhorn Khunpanuk^{1*}, Chainarong Khunpanuk¹

¹หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

¹Mathimatics Department, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีจุดหมายเพื่อสร้างเมทริกซ์จacobsthal M ขนาด 3×3 บางเมทริกซ์ ที่มีความสัมพันธ์กับลำดับจacobsthal และศึกษาสมบัติบางประการของเมทริกซ์ M^n ซึ่งสัมพันธ์กับจำนวนจacobsthal ผลการวิจัยพบว่า

ในกรณีที่ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ได้ M^n มีความสัมพันธ์กับจำนวนจacobsthal J_n ที่แตกต่างกันเมื่อ n เป็นจำนวน

เต็มบวกคู่ และคี่ ตามลำดับ

คำสำคัญ: ลำดับจacobsthal เมทริกซ์จacobsthal

Abstract

This study aimed to find some Jacobsthal matrix M of 3×3 dimension relating with the Jacobsthal numbers and to focus on some properties of M^n related with some Jacobsthal numbers. The study shows that the matrix In addition, it was shown that the matrix

$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ and M^n is closely related to different Jacobsthal numbers when they are

positive, even and odd integers.

Keywords: JACOBSTHAL SEQUENCE, JACOBSTHAL MATRIX

* Corresponding author : mathiproof@gmail.com

1. บทนำ

การศึกษาคุณสมบัติบางประการของจำนวนจาโคบส์ธาล มีการนำเสนอหลากหลายวิธี โดยอาศัยความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence relations) ของสมการสูตรทั่วไปของจำนวนจาโคบส์ธาล ซึ่งเป็นจำนวนเวียนเกิดในรูปแบบหนึ่ง ต่อมานักวิจัยชื่อ Fikri Köken และ Durmus Bozkurt ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของจำนวนจาโคบส์ธาลโดยวิธีเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งได้รับแนวความคิดมาจากการสร้างเมทริกซ์ ขนาด 2×2 เพื่อศึกษาคุณสมบัติจำนวนฟีโบนัชชี ของ R.J.Sinvester, 1979 ซึ่ง Fikri Köken และ Durmus Bozkurt ได้ตีพิมพ์บทความทางวิชาการทางคณิตศาสตร์ เรื่อง On the Jacobsthal Numbers by Matrix Methods ในวารสาร International Journal of Contemporary Mathematical Sciences 3(13), 605-614 ในปี ค.ศ. 2008 แนวคิดของนักวิจัยข้างต้นเหมือนกันตรงที่พยายามสร้างเมทริกซ์ของจำนวนเวียนเกิดเพื่อหาความสัมพันธ์ให้สอดคล้องกับสมการเวียนเกิดรูปทั่วไปและสมการความสัมพันธ์อื่น ๆ ของจำนวนเวียนเกิดดังกล่าวที่มีผู้สืบค้นไว้ก่อนแล้ว เช่น Cassini's formula ด้วยการแสดงแทนในรูปการ แก่สมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งการคิดค้นวิธีการสร้างเมทริกซ์นี้ มีความสอดคล้องกับสมบัติเมทริกซ์การแปลง (Transformation metrics) ด้วยหลักการดังกล่าว ผู้วิจัย จึงมีแนวคิดที่จะใช้สมบัติของเมทริกซ์จัตุรัส ขนาด 3×3 สร้างเมทริกซ์การแปลง ซึ่งสัมพันธ์กับค่าเฉพาะและความเป็น อิสระเชิงเส้นของเมทริกซ์จาโคบส์ธาล อธิบายความสัมพันธ์บางประการของจำนวนจาโคบส์ธาล ที่เกิดขึ้น

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

ในการศึกษารั้งนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างเมทริกซ์จาโคบส์ขนาด 3×3 ที่มีสัมพันธ์กับค่าเฉพาะและความเป็นอิสระเชิงเส้นของเมทริกซ์จาโคบส์ธาลและ รวมถึงเพื่อศึกษาสมบัติบางประการของจำนวนจาโคบส์ธาล

3. ความรู้พื้นฐาน

การศึกษาวิจัยเริ่มจากการศึกษานิยามและสมบัติบางประการของจำนวนจาโคบส์ธาล ฟังก์ชันก่อนกำเนิดของความสัมพันธ์เวียนเกิด สมการลักษณะเฉพาะจาโคบส์ธาล รวมถึงสมบัติของเมทริกซ์จัตุรัสและสมบัติที่เกี่ยวกับสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ เพื่อนำไปใช้เป็นเงื่อนไขการสร้างเมทริกซ์ขนาด 3×3 ที่เป็นเครื่องมือในการสร้างเมทริกซ์ที่จะแสดงความสัมพันธ์กับลำดับจาโคบส์ธาล

จากการศึกษาสมบัติของเมทริกซ์จัตุรัสและสมบัติที่เกี่ยวกับสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ แล้วจะสามารถนำไปมาใช้เป็นเครื่องมือในการสร้างเมทริกซ์ M ขนาด 3×3 เพื่อนำไปสู่การสร้างเมทริกซ์จาโคบส์ธาลขนาด 3×3 ที่จะแสดงความสัมพันธ์กับจำนวนในลำดับจาโคบส์ธาล และศึกษาสมบัติของ M^n ที่เกี่ยวข้องกับผลบวกย่อยของลำดับจาโคบส์ธาล ในเบื้องต้นได้ดังนี้

บทนิยาม 1.1 จำนวนจาโคบส์ธาล (Jacobsthal numbers) หมายถึง จำนวนเต็มที่เป็นสมาชิกใด ๆ ใน ลำดับ $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n, \dots$ โดยที่ $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $J_0 = 0, J_1 = 1$

จากบทนิยาม 1.1 สามารถเขียนสมการเวียนเกิดของลำดับจาโคปส์ราล ดังนี้

$$J_n = \begin{cases} 0 & ; n = 0 \\ 1 & ; n = 1 \\ J_{n-1} + 2J_{n-2} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

ใช้สัญลักษณ์ $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ แทน ลำดับจาโคปส์ราลและเรียกแต่ละสมาชิก J_n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
ในลำดับจาโคปส์ราล ว่า จำนวนจาโคปส์ราล

ทฤษฎีบท 1.2 ถ้า $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับจาโคปส์ราล โดยที่ $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n \geq 2$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ แล้ว $\sum_{i=0}^n J_i = \frac{J_{n+2} - 1}{2}$

ทฤษฎีบท 1.3 ถ้า $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับจาโคปส์ราล โดยที่ $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n \geq 2$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ แล้ว $\sum_{i=0}^n J_i + 2 \sum_{i=0}^{n-1} J_i = \left(\sum_{i=0}^{n+1} J_i \right) - 1$

จากทฤษฎีบท 1.2 สามารถแสดงผลบวกจำกัดของลำดับจาโคปส์ราล $\sum_{i=0}^n J_i$ กับลำดับจาโคปส์ราล

$\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ และได้ความสัมพันธ์เชิงสมการของผลบวกจำกัดของลำดับของลำดับจาโคปส์ราล คือ

$$\sum_{i=0}^n J_i + 2 \sum_{i=0}^{n-1} J_i = \left(\sum_{i=0}^{n+1} J_i \right) - 1 \text{ ดังตารางที่ 1 ต่อไปนี้}$$

ตารางที่ 1 แสดงผลบวกจำกัดของลำดับจาโคปส์ราล $\sum_{i=0}^n J_i$ กับลำดับจาโคปส์ราล $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ

$$\sum_{i=0}^n J_i + 2 \sum_{i=0}^{n-1} J_i = \left(\sum_{i=0}^{n+1} J_i \right) - 1$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	...
$\sum_{i=0}^n J_i$	0	1	2	5	10	21	42	85	...
$\sum_{i=0}^n J_i + 2 \sum_{i=0}^{n-1} J_i$	0	1	4	9	20	41	84	169	...
$\left(\sum_{i=0}^{n+1} J_i \right) - 1$	0	2-1	5-1	10-1	21-1	42-1	85-1	170-1	

บทนิยาม 1.4 ถ้า X เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ และ $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ เป็นสมการลักษณะเฉพาะของ X เมื่อ a_n เป็นสัมประสิทธิ์พหุนาม และ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว จะเรียก $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0I_n = \theta$ ว่าสมการเมทริกซ์ลักษณะเฉพาะของ X เมื่อ θ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสศูนย์ และเรียก X ว่า เมทริกซ์ผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ลักษณะเฉพาะ $P(X)$

บทนิยาม 1.5 ให้ X, Y และ U เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ และเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non – singular matrix) ถ้า $X = UYU^{-1}$ แล้ว เรียก Y ว่าเมทริกซ์คล้ายของ X

ทฤษฎีบท 1.6 ให้ A, B, C, D เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และ $P(x)$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A และ D โดยที่ $A = BC, D = CB$ และ C เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว $A^n = C D^n C^{-1}$ ทุกค่า $n \in I^+$

ผลการวิจัย

จากบทความวิจัยของ Fikri Köken และ Bozkurt ได้แสดงให้เห็นว่ามีเมทริกซ์ขนาด 2×2 ที่สัมพันธ์

กับลำดับจากคอปส์ชาล กล่าวคือ $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งพบว่า $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_n \\ J_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n+1} \\ J_n \end{bmatrix}$ และ

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_n \\ j_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{n+1} \\ j_n \end{bmatrix}$ และต่อมาเขาได้สร้างเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และแสดงให้เห็นว่า

$A^n = D_n$ เมื่อ $D_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(J_{n+2}-1) & J_{n+1} & 2J_n \\ \frac{1}{2}(J_{n+1}-1) & J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$ ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะสร้างเมทริกซ์ $M_{3 \times 3}$ จาก

ฐานหลัก $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ ในปริภูมิเวกเตอร์ R^3 โดย $w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (2,0,0)$ และ

$w_3 = (0,1,1)$ ที่เป็นอิสระต่อกันและ $M = [v_1^T, v_2^T, v_3^T]$ ซึ่งได้ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ

M มีสมบัติดังนี้

ทฤษฎีบท 1.7 ถ้า $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

(1) สมการเมทริกซ์ลักษณะเฉพาะของ M คือ $\delta^3 - 2\delta^2 - \delta + 2$

(2) ค่าเฉพาะของ M คือ $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ และ $\delta_3 = 2$

(3) M จะเป็นเมทริกซ์ผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ลักษณะเฉพาะ

$$X^3 - 2X^2 - X + 2I_n = \theta$$

บทแทรก 1.8 ถ้า D เป็นเมทริกซ์คล้าย M แล้ว D เป็นเมทริกซ์ผลเฉลยของสมการเมทริกซ์

$$X^3 - 2X^2 - X + 2I_n = \theta$$

จากทฤษฎีบท 1.7(3) และบทแทรก 1.8 ทำให้ได้ว่า $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2I_n = \theta$ เป็นสมการเมทริกซ์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ M และ เมทริกซ์ D

ต่อไปจะศึกษาความสัมพันธ์ของ M กับจำนวนจาโคปส์ซาล ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.9 ถ้า $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 และ $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับจาโคปส์ซาล แล้ว

$$M^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n & \sum_{i=0}^n J_i \\ J_n & 2J_{n-1} & \sum_{i=0}^{n-1} J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ } n \geq 2$$

$$\text{และ } M^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n & \left(\sum_{i=0}^n J_i\right) - 1 \\ J_n & 2J_{n-1} & \left(\sum_{i=0}^{n-1} J_i\right) + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ } n \geq 2$$

พิสูจน์ ให้ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 และ $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับจาโคปส์ซาล

$$\text{กำหนดให้ } P(n) \text{ แทนประพจน์ } M^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n & \sum_{i=0}^n J_i \\ J_n & 2J_{n-1} & \sum_{i=0}^{n-1} J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ } n \geq 2$$

$$\text{และ } M^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n & \left(\sum_{i=0}^n J_i\right)-1 \\ J_n & 2J_{n-1} & \left(\sum_{i=0}^{n-1} J_i\right)+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{สำหรับทุกค่าจำนวนเต็มคี่ } n > 2$$

พิจารณา (i) เมื่อ $n = 2$. จะได้ว่า $M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ①

$$\text{และ } \begin{bmatrix} J_{2+1} & 2J_2 & \sum_{i=0}^2 J_i \\ J_2 & 2J_{2-1} & \sum_{i=0}^{2-1} J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3 & 2J_2 & \sum_{i=0}^2 J_i \\ J_2 & 2J_1 & \sum_{i=0}^1 J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3 & 2J_2 & \sum_{i=0}^2 J_i \\ J_2 & 2J_1 & \sum_{i=0}^1 J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จาก $\sum_{i=0}^2 J_i = J_0 + J_1 + J_2 = 0 + 1 + 1 = 2$ และ $\sum_{i=0}^1 J_i = J_0 + J_1 = 0 + 1 = 1$

และจำนวนจากออปส์ธาล $J_1 = 1, J_2 = 1, J_3 = 3$

ดังนั้น เมื่อ $n=2$ จะได้ $\begin{bmatrix} J_{2+1} & 2J_2 & \sum_{i=0}^2 J_i \\ J_2 & 2J_{2-1} & \sum_{i=0}^{2-1} J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ②

จาก ①=② ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง

เมื่อ $n = 3$ จะได้ว่า $M^3 = M^1 M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ③

เนื่องจาก $\left(\sum_{i=0}^3 J_i\right)-1 = (J_0 + J_1 + J_2 + J_3)-1 = (0+1+1+3)-1=4$

และ $\left(\sum_{i=0}^2 J_i\right)+1 = (J_0 + J_1 + J_2)+1 = (0+1+1)+1=3$

และจำนวนจากออปส์ธาล $J_1 = 1, J_2 = 1, J_3 = 3$

ดังนั้น เมื่อ $n = 3$ จะได้ $\begin{bmatrix} J_4 & 2J_3 & \left(\sum_{i=1}^3 J_i\right)-1 \\ J_3 & 2J_2 & \left(\sum_{i=1}^2 J_i\right)+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ④

จาก ③=④ ดังนั้น $P(3)$ เป็นจริง

(ii) ให้ $P(k)$ เป็นจริงทุกค่า $k \geq 2$

เมื่อ k จำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $M^k =$

$$\begin{bmatrix} J_{k+1} & 2J_k & \sum_{i=0}^k J_i \\ J_k & 2J_{k-1} & \sum_{i=0}^{k-1} J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ k จำนวนเต็มคี่จะได้ว่า $M^k =$

$$\begin{bmatrix} J_{k+1} & 2J_k & \left(\sum_{i=0}^k J_i\right) - 1 \\ J_k & 2J_{k-1} & \left(\sum_{i=0}^{k-1} J_i\right) + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $M^1 M^k = M^{k+1}$ จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริงทุกค่า $k \geq 2$ ดังนี้

พิจารณา เมื่อ k จำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $k+1$ จำนวนเต็มคี่

จึงได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{k+1} & 2J_k & \sum_{i=0}^k J_i \\ J_k & 2J_{k-1} & \sum_{i=0}^{k-1} J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k+1} + 2J_k & 2(J_k + 2J_{k-1}) & \sum_{i=0}^k J_i + 2\sum_{i=0}^{k-1} J_i \\ J_{k+1} & 2J_k & \left(\sum_{i=0}^k J_i\right) + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 1.2 ได้ว่า $\sum_{i=0}^k J_i + 2\sum_{i=0}^{k-1} J_i = \left(\sum_{i=0}^{k+1} J_i\right) - 1$

ดังนั้น $M^{k+1} =$

$$\begin{bmatrix} J_{k+2} & 2J_{k+1} & \left(\sum_{i=0}^{k+1} J_i\right) - 1 \\ J_{k+1} & 2J_k & \left(\sum_{i=0}^k J_i\right) + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จึงได้ $P(k+1)$ เป็นจริงเมื่อ k จำนวนเต็มคู่

พิจารณา เมื่อ k จำนวนเต็มคี่จะได้ว่า $k+1$ เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{k+1} & 2J_k & \left(\sum_{i=0}^k J_i\right)-1 \\ J_k & 2J_{k-1} & \left(\sum_{i=0}^{k-1} J_i\right)+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k+1}+2J_k & 2J_k+4J_{k-1} & \sum_{i=0}^k J_i+2\sum_{i=0}^{k-1} J_i+1 \\ J_{k+1} & 2J_k & \sum_{i=0}^k J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 1.2 ได้ว่า $\sum_{i=0}^k J_i + 2\sum_{i=0}^{k-1} J_i = \left(\sum_{i=0}^{k+1} J_i\right) - 1$

ดังนั้น
$$M^{k+1} = \begin{bmatrix} J_{k+1}+2J_k & 2(J_k+2J_{k-1}) & \left(\sum_{i=0}^{k+1} J_i\right)-1+1 \\ J_{k+1} & 2J_k & \sum_{i=0}^k J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k+2} & 2J_{k+1} & \sum_{i=0}^{k+1} J_i \\ J_{k+1} & 2J_k & \sum_{i=0}^k J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จึงได้ $P(k+1)$ เป็นจริงเมื่อ k จำนวนเต็มคี่

ดังนั้น ถ้า $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 และ $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับจาโคบีแล้ว

$$M^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n & \sum_{i=0}^n J_i \\ J_n & 2J_{n-1} & \sum_{i=0}^{n-1} J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{สำหรับทุกค่าจำนวนเต็มคู่ } n \geq 2$$

และ
$$M^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n & \left(\sum_{i=0}^n J_i\right)-1 \\ J_n & 2J_{n-1} & \left(\sum_{i=0}^{n-1} J_i\right)+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{สำหรับทุกค่าจำนวนเต็มคี่ } n > 2 \quad \square$$

บทตั้ง 1.10 ให้ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์คล้ายเมทริกซ์ M จะได้ว่า

$$M^n = C D^n C^{-1} \text{ ทุกค่า } n \in I^+ \text{ เมื่อ } C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

พิสูจน์ ให้ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์คล้าย M

โดยทฤษฎีบท 1.7(3) และบทแทรก 1.8 ได้ว่า $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2I_n = 0$ เป็นสมการเมทริกซ์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ M และ เมทริกซ์ D

ให้ $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้น C เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

$$\text{ได้ว่า } M=AC \text{ และ } D=CB \text{ เมื่อ } A = \begin{bmatrix} -1/2 & 4/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 1.6 จึงได้ว่า $M^n = C D^n C^{-1}$ ทุกค่า $n \in I^+$ □

ทฤษฎีบท 1.11 ให้ $\{J_n\}_{n=0}^\infty$ เป็นลำดับจาโคบีซาล ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่แล้วจะได้

$$-\frac{1}{3} \left[\left(\sum_{i=0}^n J_i \right) - J_{n+1} \right] - 2 \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} J_i \right) - J_n \right] + 1 = 0 ,$$

$$\frac{1}{3} [(J_{n+1} - 2J_n) - 2(J_n - 2J_{n-1})] = 1 - \frac{1}{3} [(J_{n+2} + J_{n+1}) - 2(J_{n+1} + J_n)] = 0 ,$$

$$-\frac{1}{3} [(J_{n+2} + J_{n+1}) - 2(J_{n+1} + J_n)] = 0 , -\frac{1}{3} [(J_{n+1} - 2J_n) + (J_n - 2J_{n-1})] = 0 , \frac{1}{3} [J_{n+3} + J_n] = 2^n$$

$$\text{พิสูจน์ ให้ } M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{จากบทตั้ง 1.10 ได้ว่า } M^n = C D^n C^{-1} \text{ ทุกค่า } n \in I^+ \text{ เมื่อ } C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 1.9 ได้ว่า $M^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n & \sum_{i=0}^n J_i \\ J_n & 2J_{n-1} & \sum_{i=0}^{n-1} J_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ $n \geq 2$

พิจารณา $M^n = C D^n C^{-1}$ จะได้ว่า $C^{-1} M^n C = D^n$

กรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & -1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} = C^{-1} M^n C$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} \left(\left[\sum_{i=0}^n J_i \right] - J_{n+1} \right) + \frac{2}{3} \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} J_i \right] - J_n \right) - \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} (-J_{n+1} + 2J_n) + \frac{2}{3} (-J_n + 2J_{n-1}) & -\frac{1}{3} (2J_{n+1} + 2J_n) + \frac{2}{3} (2J_n + 2J_{n-1}) \\ \frac{1}{3} \left(\left[\sum_{i=0}^n J_i \right] - J_{n+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} J_i \right] - J_n \right) + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} (-J_{n+1} + 2J_n) + \frac{1}{3} (-J_n + 2J_{n-1}) & \frac{1}{3} (2J_{n+1} + 2J_n) + \frac{1}{3} (2J_n + 2J_{n-1}) \end{bmatrix}$$

เมื่อ เทียบเมทริกซ์ที่เท่ากันของ $D^n = C^{-1} M^n C$ จะได้ว่า

$$(1) \quad \text{จาก } -\frac{1}{3} \left(\left[\sum_{i=0}^n J_i \right] - J_{n+1} \right) + \frac{2}{3} \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} J_i \right] - J_n \right) - \frac{1}{3} = 0$$

ดังนั้น $-\frac{1}{3} \left[\left(\left[\sum_{i=0}^n J_i \right] - J_{n+1} \right) - 2 \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} J_i \right] - J_n \right) + 1 \right] = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่

$$(2) \quad \text{จาก } -\frac{1}{3} (-J_{n+1} + 2J_n) + \frac{2}{3} (-J_n + 2J_{n-1}) = 1$$

ดังนั้น $\frac{1}{3} [(J_{n+1} - 2J_n) - 2(J_n - 2J_{n-1})] = 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่

$$(3) \quad \text{จาก } 0 = -\frac{1}{3} (2J_{n+1} + 2J_n) + \frac{2}{3} (2J_n + 2J_{n-1}) \\ = -\frac{1}{3} (J_{n+1} + J_{n+2}) + \frac{2}{3} (J_n + J_{n+1})$$

ดังนั้น $-\frac{1}{3} [(J_{n+2} + J_{n+1}) - 2(J_{n+1} + J_n)] = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่

$$(4) \quad \text{จาก } 0 = \frac{1}{3} \left(\left[\sum_{i=0}^n J_i \right] - J_{n+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} J_i \right] - J_n \right) + \frac{1}{3} \\ = \frac{1}{3} \left[\left(\left[\sum_{i=0}^n J_i \right] - J_{n+1} \right) + \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} J_i \right] - J_n \right) + 1 \right]$$

ดังนั้น $\frac{1}{3} \left[\left(\sum_{i=0}^n J_i + \sum_{i=0}^{n-1} J_i \right) - (J_{n+1} + J_n) + 1 \right] = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่

$$(5) \quad \text{จาก } 0 = \frac{1}{3}(-J_{n+1} + 2J_n) + \frac{1}{3}(-J_n + 2J_{n-1}) \\ = -\frac{1}{3}(J_{n+1} - 2J_n) - \frac{1}{3}(J_n - 2J_{n-1})$$

ดังนั้น $-\frac{1}{3}[(J_{n+1} - 2J_n) + (J_n - 2J_{n-1})] = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่

$$(6) \quad \text{จาก } 2^n = \frac{1}{3}(2J_{n+1} + 2J_n) + \frac{1}{3}(2J_n + 2J_{n-1}) \\ = \frac{1}{3}[(2J_{n+1} + 2J_n) + (2J_n + 2J_{n-1})] \\ = \frac{1}{3}[(J_{n+1} + J_{n+2}) + (J_n + J_{n+1})] \\ = \frac{1}{3}[(J_{n+2} + 2J_{n+1}) + J_n] = \frac{1}{3}[J_{n+3} + J_n]$$

ดังนั้น $\frac{1}{3}[J_{n+3} + J_n] = 2^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ □

ทฤษฎีบท 1.12 ให้ $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับจาโคบีสรัล ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 แล้วจะได้

$$-\frac{1}{3}\left[\left(\sum_{i=0}^n J_i\right) - J_{n+1} - 1\right] - 2\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} J_i\right) - J_n + 1\right] + 1 = 0, \\ \frac{1}{3}[(J_{n+1} - 2J_n) - 2(J_n - 2J_{n-1})] = -1, -\frac{1}{3}[2(J_{n+1} + J_n) - 4(J_n + J_{n-1})] = 0, \\ \frac{1}{3}\left[2\left(\sum_{i=0}^{n-1} J_i\right) - J_{n+1} + 1\right] = 0, \frac{1}{3}[(2J_n - J_{n+1}) + (2J_{n-1} - J_n)] = 0, \frac{1}{3}[J_{n+3} + J_n] = 2^n$$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 1.11

บทแทรก 1.13 ให้ $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับจาโคบีสรัล จะได้ว่า

- (1) $\frac{1}{3}[(J_{n+1} - 2J_n) - 2(J_n - 2J_{n-1})] = 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่
- (2) $\frac{1}{3}[(J_{n+1} - 2J_n) - 2(J_n - 2J_{n-1})] = -1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่
- (3) $\frac{1}{3}[J_{n+3} + J_n] = 2^n$ ทุกค่า n เป็นจำนวนเต็ม

4. สรุปผลการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ มีการศึกษาและค้นพบความสัมพันธ์บางประการของจำนวนจาโคบีสรัล โดยใช้สมบัติของเมทริกซ์จัตุรัส ขนาด 3×3 สร้างเมทริกซ์การแปลงซึ่งสัมพันธ์กับค่าเฉพาะและความเป็นอิสระเชิงเส้นของเมทริกซ์จาโคบีสรัล

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ที่สนับสนุนทุนวิจัย และขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบตรวจทาน รวมถึงคณาจารย์หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ทุกคนที่ได้ให้กำลังใจและสนับสนุนการค้นคว้างานวิจัยให้มีคุณภาพและสำเร็จลุล่วง

6. เอกสารอ้างอิง

- ชัยณรงค์ ชันผณี. (2546). *พีชคณิตเชิงเส้น*. เพชรบูรณ์. มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์.
- ชัยณรงค์ ชันผณี. (2558). *ทฤษฎีจำนวน*. เพชรบูรณ์. มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์.
- ทิวาพร ชันผณี และ ชัยณรงค์ ชันผณี. (2558). ฟังก์ชันก่อกำเนิดซึ่งเกิดจากผลบวกของลำดับและผลคูณของลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูกลัส และลำดับลูกลัสเกี่ยวเนื่อง. เพชรบูรณ์. มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์.
- Cerin Z. (2007). Sums of squares and products of Jacobsthal numbers. *Journal of Integer Sequences*, 10, Art 07.2.5. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL10/Cerin/cerin45.pdf>
- Djordjević, G. B., & Srivastava, H. M. (2005). Incomplete generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *Mathematical and Computer Modelling*, 42, 1049-1056. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2004.10.026>
- Köken F., & Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal-Lucas numbers by matrix methods. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 3(33), 1629-1633.
- Köken F., & Bozkurt, D. (2012). On the Jacobsthal numbers by matrix methods. *Journal of Science*, 7(1), 69 - 76.