

การหาปริพันธ์ของรูปแบบ $\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k}$

Integrating Expressions of The Form $\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k}$

บุปผา ไกรสัย*, เปรมิกา ไพอรญ, อัจฉรา โพธิ์ศรี, ธนาวุฒิ วงษ์เพชร

Booppa Kraissai*, Premika Pai-arun, Aujchara Posri, Thanawut Wongpech

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Thammasat University, Pathum Thani, 12120

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ผู้วิจัยได้แสดงการหาค่าของ $I(m,n,k) = \int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx$ เมื่อ m,n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m+n \geq k$ ในขั้นแรกจะเขียน $\sin(ax)$ และ $\sin(bx)$ ที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $\sin(rx)$ หรือ $\cos(rx)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็ม โดยใช้ทฤษฎีบทของทวินามร่วมกับรูปแบบ $\sin(ax) = \frac{1}{2i} \left(z^a - \frac{1}{z^a} \right)$ โดย $z^a = \cos(ax) + i \sin(ax)$

คำสำคัญ: ปริพันธ์จำกัดเขต ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ปริพันธ์ที่ละส่วน ปริพันธ์ Frullani

Abstract

In this article, the authors show how to evaluate, for positive integer m,n and k , a more general integral of the form $I(m,n,k) = \int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx$, where $m+n \geq k$. It is an elementary matter to rewrite powers of $\sin(ax)$ and $\sin(bx)$ in terms of linear combinations of $\sin(rx)$ and $\cos(rx)$ when r is an integer. This procedure merely requires the use of the binomial theorem is applied to $\sin(ax) = \frac{1}{2i} \left(z^a - \frac{1}{z^a} \right)$, where $z^a = \cos(ax) + i \sin(ax)$.

Keywords: Definite Integral, Improper Integral, Integration by parts, Frullani Integral

* Corresponding author : booppa@mathstat.sci.tu.ac.th

1. บทนำ

จากการศึกษางานวิจัยในปี 2010 ของ J. TRAININ เรื่องการหาปริพันธ์ของรูปแบบ $\frac{\sin^n x}{x^m}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \geq m$ ทำให้ทราบเทคนิคที่สำคัญและเกี่ยวข้องกับการหาค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่มีวิธีการคำนวณไม่ซับซ้อน ดังนั้นคณะผู้วิจัยจึงใช้เทคนิคดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการหาค่าปริพันธ์ของรูปแบบ $\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k}$ เมื่อ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m+n \geq k$ โดยแบ่งกรณีศึกษาออกเป็นทั้งหมด 2 กรณี คือ กรณีแรก $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และกรณีสอง $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ในการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปแบบ $\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k}$ เมื่อ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m+n \geq k$ เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เราจะเขียนรูปทั่วไปของ $\sin^m(ax)$ ให้อยู่ในพจน์ผลรวมเชิงเส้นของ $\sin(rx)$ หรือ $\cos(rx)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งขั้นตอนในการเขียนรูปแบบใหม่นี้จะอาศัยทฤษฎีบททวินาม โดยที่ $\sin(ax) = \frac{1}{2i}\left(z^a - \frac{1}{z^a}\right)$ และ $\cos(ax) = \frac{1}{2}\left(z^a + \frac{1}{z^a}\right)$ ซึ่งมีที่มาจากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ (Purcell, Rigdon & Varberg, 2000) ที่ว่า $z^a = \cos(ax) + i\sin(ax)$ หลังจากที่ได้รูปทั่วไปของ $\sin^m(ax)$ ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นแล้วสามารถคำนวณหาค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปแบบ $\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k}$ ได้อย่างไม่ซับซ้อน และเพื่อให้มีความเข้าใจในขั้นตอนการหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปแบบนี้ ทางคณะผู้วิจัยจึงได้ยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นเพื่อใช้ในการอธิบายขั้นตอนในการคำนวณหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปแบบที่ศึกษานี้

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษาขั้นตอนและวิธีการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx$ เมื่อ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m+n \geq k$ โดยแบ่งกรณีศึกษาเป็นสองกรณี คือ กรณีแรก $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และกรณีสอง $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคี่

3. วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้เป็นการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx$ เมื่อ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m+n \geq k$ โดยมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนแรก คำนวณหาค่าปริพันธ์ทีละส่วน และได้ผลลัพธ์ในรูปแบบ ดังนี้

$$\int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx = \left[-\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{(k-1)x^{k-1}} \right]_0^\infty + \frac{1}{k-1} \int_0^\infty \frac{1}{x^{k-1}} \frac{d}{dx} \sin^m(ax)\sin^n(bx) dx$$

ซึ่งรูปแบบ $\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, \infty)$ โดยการใช้ नियมของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

จะได้ว่า พจน์ $\left[-\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{(k-1)x^{k-1}} \right]_0^\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\sin^m(a)\sin^n(bx)}{(k-1)x^{k-1}} \right]_0^p$ มีค่าเท่ากับศูนย์ และทำตามขั้นตอนแรกโดยหาปริพันธ์ทีละส่วนเช่นนี้อย่างต่อเนื่อง เป็นจำนวน $k-1$ ครั้ง และพจน์ที่ไม่มีเครื่องหมายปริพันธ์จะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ ซึ่งจะได้รูปทั่วไปของการหาปริพันธ์ทีละส่วน จำนวน $k-1$ ครั้ง ดังนี้

$$\int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \sin^m(ax)\sin^n(bx) dx \quad (1)$$

ขั้นตอนที่สอง ในสมการ (1) จะมีพจน์ $\sin^m(ax)$ และ $\sin^n(bx)$ ปรากฏอยู่ เราสามารถเขียนพจน์ดังกล่าวในรูปแบบของผลรวมเชิงเส้นใหม่ได้ โดยอาศัยทฤษฎีบทของเดอรัมัวร์ ดังนี้

$$z^a = \cos(ax) + i \sin(ax) \quad (2)$$

$$\frac{1}{z^a} = \cos(ax) - i \sin(ax) \quad (3)$$

นำสมการ (2) - (3) จะได้
$$z^a - \frac{1}{z^a} = 2i \sin(ax) \quad (4)$$

สำหรับการเขียนพจน์ $\sin^m(ax)$ หรือ $\sin^n(bx)$ ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นของ $\sin(rx)$ หรือ $\cos(rx)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็ม และจำแนกเป็นรูปแบบตามเลขชี้กำลัง (Clarke, 1998) ได้ดังนี้

1. รูปแบบของ $\sin^m(ax)$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ โดยที่ $m = 2s+1$ เมื่อ $s \in I^+$ จากสมการ (4) ยกกำลัง $2s+1$ ทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad [2i \sin(ax)]^{2s+1} &= \left(z^a - \frac{1}{z^a} \right)^{2s+1} \\ i^{2s+1} \cdot 2^{2s+1} \cdot \sin^{2s+1}(ax) &= \sum_{r=0}^s (-1)^r \binom{2s+1}{r} \left[\left(z^a \right)^{(2s+1)-2r} - \left(\frac{1}{z^a} \right)^{(2s+1)-2r} \right] \\ \sin^{2s+1}(ax) &= \frac{1}{2^{2s}} \sum_{r=0}^s (-1)^{s+r} \binom{2s+1}{r} \sin[a(2s+1-2r)x] \end{aligned} \quad (5)$$

2. รูปแบบของ $\sin^m(ax)$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ โดยที่ $m = 2s$ เมื่อ $s \in I^+$ เนื่องด้วย $\sin^{2s-1}(ax) = \frac{1}{2^{2s-2}} \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^{(s-1)+r} \binom{2s-1}{r} \sin[a(2s-1-2r)x]$ จึงนำพจน์ $\sin(ax)$ คูณตลอดสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$\sin^{2s}(ax) = \frac{1}{2^{2s-1}} \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^{(s-1)+r} \binom{2s-1}{r} (\cos[2a(s-r-1)x] - \cos[2a(s-r)x]) \quad (6)$$

เราจะเห็นว่ามีพจน์ $\sin^m(ax)\sin^n(bx)$ ปรากฏอยู่ในสมการ (1) และเขียนพจน์ดังกล่าวในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นใหม่ได้โดยอาศัย สมการ (5) และ (6) ร่วมกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ ดังนี้

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

สำหรับขั้นตอนของการคำนวณการหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ในรูปแบบของ

$\int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx$ จำเป็นต้องอาศัยค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Courant, 1956)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

และค่าของปริพันธ์ Frullani ที่จะกล่าวต่อไปนี้

ปริพันธ์ Frullani

ให้ $f(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $0 < x < \infty$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต นั่นคือเมื่อ $x \rightarrow 0$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ มีค่าเป็น $f(0)$ และเมื่อ $x \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ มีค่าเป็น $f(\infty)$ แล้ว

$$\int_0^\infty \frac{f(a_1x) - f(a_2x)}{x} dx = (f(0) - f(\infty)) \ln \frac{a_2}{a_1} \quad (8)$$

โดยที่ a_1, a_2 เป็นจำนวนจริงบวก

สำหรับกรณี $f(x) = \cos x$ ค่าของ $f(\infty)$ กวัดแกว่งอยู่ระหว่าง -1 กับ 1 เมื่อ $x \rightarrow \infty$ สำหรับในงานวิจัยนี้ การหาค่าของปริพันธ์ Frullani จะกำหนด $f(0) = 1$ และ $f(\infty) = 0$ (Abramowitz & Stegun, 1974)

ดังนั้น
$$\int_0^\infty \frac{\cos a_1x - \cos a_2x}{x} dx = \ln \frac{a_2}{a_1} \quad (9)$$

รูปมาตรฐานทั่วไปของปริพันธ์ Frullani

ให้ $f(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $0 < x < \infty$ และยังกำหนดให้ $f(x)$ มีขีดจำกัดขณะที่ $x \rightarrow 0$ และ $x \rightarrow \infty$ และ $g(x)$ ถูกกำหนดดังนี้

$$g(x) = k_1 f(a_1x) + k_2 f(a_2x) + \dots + k_n f(a_nx) = \sum_{r=1}^n k_r f(a_r x) \text{ เมื่อ } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ เป็นจำนวน}$$

จริงบวก และ $\sum_{r=1}^n k_r = 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{g(x)}{x} dx = -(f(0) - f(\infty)) \sum_{r=1}^n k_r \ln a_r \quad (10)$$

สำหรับกรณี $f(x) = \cos x$ เมื่อ $\sum_{r=1}^n k_r = 0$ จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{g(x)}{x} dx = -\sum_{r=1}^n k_r \ln a_r \quad (11)$$

ซึ่งการคำนวณหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx$ โดยอาศัยค่าของสมการ (7) และ (11) สามารถหาค่าปริพันธ์ได้อย่างสะดวกและไม่ซับซ้อนอีกด้วย

4. ผลการวิจัย

สำหรับการเขียนรูปทั่วไปของ $\sin^m(ax)\sin^n(bx)$ ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นของ $\sin(rx)$ หรือ $\cos(rx)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็ม แบ่งได้เป็น 3 รูปแบบ ดังนี้

รูปแบบที่ 1 ผลคูณของ $\sin^{2s+1}(ax) \sin^{2t+1}(bx)$ เมื่อ s, t เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} \sin^{2s+1}(ax) \sin^{2t+1}(bx) &= \frac{1}{2^{2(s+t)+1}} \sum_{r=0}^s \sum_{k=0}^t (-1)^{(s+r)+(t+k)} \binom{2s+1}{r} \binom{2t+1}{k} \times \\ &\quad \{ \cos[a(2s+1-2r)-b(2t+1-2k)]x \\ &\quad - \cos[a(2s+1-2r)+b(2t+1-2k)]x \} \end{aligned} \quad (12)$$

รูปแบบที่ 2 ผลคูณของ $\sin^{2s}(ax) \sin^{2t}(bx)$ เมื่อ s, t เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} \sin^{2s}(ax) \sin^{2t}(bx) &= \frac{1}{2^{2s+2s-1}} \sum_{r=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} (-1)^{(s-1)+r+(t-1)+k} \binom{2s-1}{r} \binom{2t-1}{k} \times \\ &\quad \{ \cos[2a(s-r-1)+2b(t-k-1)]x + \cos[2a(s-r-1)-2b(t-k-1)]x \\ &\quad - \cos[2a(s-r-1)+2b(t-k)]x - \cos[2a(s-r-1)-2b(t-k)]x \\ &\quad - \cos[2a(s-r)+2b(t-k-1)]x - \cos[2a(s-r)-2b(t-k-1)]x \\ &\quad + \cos[2a(s-r)+2b(t-k)]x + \cos[2a(s-r)-2b(t-k)]x \} \end{aligned} \quad (13)$$

รูปแบบที่ 3 ผลคูณของ $\sin^{2s+1}(ax) \sin^{2t}(bx)$ เมื่อ s, t เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} \sin^{2s+1}(ax) \sin^{2t}(bx) &= \frac{1}{2^{2(s+t)}} \sum_{r=0}^s \sum_{k=0}^{t-1} (-1)^{(s+r)+(t-1)+k} \binom{2s+1}{r} \binom{2t-1}{k} \times \\ &\quad \{ \sin[a(2s+1-2r)+2b(t-k-1)]x + \sin[a(2s+1-2r)-2b(t-k-1)]x \\ &\quad - \sin[a(2s+1-2r)+2b(t-k)]x - \sin[a(2s+1-2r)-2b(t-k)]x \} \end{aligned} \quad (14)$$

ในการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปแบบทั่วไปของ $I(m, n, k) = \int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx$ เมื่อ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m+n \geq k$ มีผลลัพธ์ปรากฏเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ในที่นี้สามารถอธิบายการคำนวณหา $I(m, n, k)$ เมื่อ $m+n+k$ เป็นจำนวนคู่ได้ด้วยตัวอย่างที่ 1 หาค่าปริพันธ์ $I(m, n, k)$ เมื่อ $m=3, n=2$ และ $k=3$ โดยที่ $a=4$ และ $b=5$ สำหรับการหาค่าปริพันธ์ในตัวอย่างที่ 1 อาศัยค่าของปริพันธ์ที่ได้มีการพิสูจน์มาแล้วสมการ (7)

ตัวอย่างที่ 1 คำนวณหา $I(3,2,3) = \int_0^\infty \frac{\sin^3(4x)\sin^2(5x)}{x^3} dx$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3(4x)\sin^2(5x)}{x^3} dx = \frac{1}{2!} \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} \sin^3(4x)\sin^2(5x) dx \quad (15)$$

โดยเขียน $\sin^3(4x)\sin^2(5x)$ ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นของ $\sin(rx)$ หรือ $\cos(rx)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็ม จากสมการ (14) จะได้

$$\sin^3(4x)\sin^2(5x) = \frac{1}{2^4} [\sin(2x) + 6\sin(4x) + 3\sin(6x) - 2\sin(12x) - 3\sin(14x) + \sin(22x)]$$

นำ $\sin^3(4x)\sin^2(5x)$ ที่ได้จากสมการ (14) นำกลับไปแทนในสมการ (15) แล้วอาศัยค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบสมการ (7) จะได้

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^3(4x)\sin^2(5x)}{x^3} dx &= \frac{1}{2^5} \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} [\sin(2x) + 6\sin(4x) + 3\sin(6x) - 2\sin(12x) - 3\sin(14x) + \sin(22x)] dx \\ &= \frac{1}{2^5} \int_0^\infty \frac{1}{x} [-4\sin(2x) - 96\sin(4x) - 108\sin(6x) + 288\sin(12x) + 588\sin(14x) - 484\sin(22x)] dx \\ &= \frac{1}{32} \left[-4\frac{\pi}{2} - 96\frac{\pi}{2} - 108\frac{\pi}{2} + 288\frac{\pi}{2} + 588\frac{\pi}{2} - 484\frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{23\pi}{8} \approx 9.03208 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคี่

กรณีที่ 2.1 เมื่อ $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $k > 1$

การคำนวณหาปริพันธ์สำหรับกรณีนี้ต้องใช้ค่าปริพันธ์ Frullani สมการ (11) แสดงการหาปริพันธ์ $I(m,n,k)$ ดังตัวอย่างที่ 2 เมื่อ $m=4, n=3$ และ $k=4$ โดยที่ $a=2, b=3$

ตัวอย่างที่ 2 คำนวณหา $I(4,3,4) = \int_0^\infty \frac{\sin^4(2x)\sin^3(3x)}{x^4} dx$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4(2x)\sin^3(3x)}{x^4} dx = \frac{1}{3!} \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{d^3}{dx^3} \sin^4(2x)\sin^3(3x) dx \quad (16)$$

จากสมการ (14) จะได้

$$\begin{aligned} \sin^4(2x)\sin^3(3x) &= \frac{1}{2^6} [11\sin x + 18\sin(3x) + \sin(5x) - 12\sin(7x) - 6\sin(9x) \\ &\quad + 3\sin(11x) + 4\sin(13x) - \sin(17x)] \end{aligned}$$

นำ $\sin^4(2x)\sin^3(3x)$ ที่ได้จากสมการ (14) หาอนุพันธ์อันดับที่ 3 แล้วแทนในสมการ (16)

$$\begin{aligned} \text{ฉะนั้น } \int_0^\infty \frac{\sin^4(2x)\sin^3(3x)}{x^4} dx &= \frac{1}{384} \int_0^\infty \frac{1}{x} [-11\cos(x) - (18 \times 3^3)\cos(3x) - 5^3\cos(5x) \\ &\quad + (12 \times 7^3)\cos(7x) + (6 \times 9^3)\cos(9x) - (3 \times 11^3)\cos(11x) \\ &\quad - (4 \times 13^3)\cos(13x) + 17^3\cos(17x)] dx \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sum_{r=1}^8 k_r = 0$ แล้วใช้สมการ (11)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \int_0^\infty \frac{\sin^4(2x)\sin^3(3x)}{x^4} dx &= \frac{1}{384} (-1) [-11\ln 1 - 486\ln 3 - 125\ln 5 + 4116\ln 7 \\ &\quad + 4374\ln 9 - 3993\ln 11 - 8788\ln 13 + 4913\ln 17] \\ &\approx 3.4143 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2.2 เมื่อ $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $k=1$

เงื่อนไขสำหรับปริพันธ์กรณีที่ 2.2 เมื่อ $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $k=1$ แล้ว m, n ต้องไม่เป็นจำนวนเต็มคู่พร้อมกัน ถ้า m, n เป็นจำนวนเต็มคู่พร้อมกัน จะพบว่าในปริพันธ์ไม่ตรงแบบของสมการ (1) มี

$$\begin{aligned} \text{พจน์ } \int_0^\infty \frac{1-\cos(ax)}{x} dx \text{ ประกอบอยู่ด้วยซึ่ง} \\ \int_0^\infty \frac{1-\cos(ax)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\cos(\varepsilon x) - \cos(ax)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

เป็นพจน์ที่ไม่มีขอบเขต จึงทำให้กรณี $k=1$ และ m, n เป็นจำนวนคู่พร้อมกันไม่มีขอบเขตนั่นเอง แสดงในตัวอย่างที่ 3 เมื่อ $m=2, n=2$ และ $k=1$ โดยที่ $a=2$ และ $b=3$ ดังนี้

$$\text{ตัวอย่างที่ 3 คำนวณหา } I(2, 2, 1) = \int_0^\infty \frac{\sin^2(2x)\sin^2(3x)}{x^1} dx$$

จากสมการ (1) เมื่อแทนค่าผลรวมเชิงเส้นจากสมการ (13) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(2x)\sin^2(3x)}{x^1} dx = \frac{1}{0!} \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{d^0}{dx^0} \sin^2(2x)\sin^2(3x) dx$$

จากสมการ (13) จะได้

$$\sin^2(2x)\sin^2(3x) = \frac{1}{2^3} [\cos(2x) - 2\cos(4x) - 2\cos(6x) + \cos(10x) + 2]$$

$$\begin{aligned} \text{ฉะนั้น} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(2x)\sin^2(3x)}{x} dx \\ = \frac{1}{2^3} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} [\cos(2x) - 2\cos(4x) - 2\cos(6x) + \cos(10x) + 2] dx \\ = \frac{1}{2^3} (-1) [\ln 2 - 2\ln 4 + \ln 10] + \frac{1}{2^2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(6x)}{x} dx \end{aligned}$$

เนื่องจากปริพันธ์ไม่ตรงแบบในพจน์ $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(6x)}{x} dx$ ไม่มีขอบเขต ทำให้สรุปได้ว่า

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(2x)\sin^2(3x)}{x} dx \text{ ไม่มีขอบเขตเช่นกัน}$$

ต่อไปเป็นตารางแสดงค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ตามสมการ (1) เมื่อ m, n มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวกไม่มาก โดยที่ $m+n \geq k$ เพื่อที่จะได้เห็นภาพโดยรวมของการหาค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบของทั้งสองกรณีของผลการวิจัยโดยที่ตารางที่ 1 เป็นกรณี $k \neq 1$ ซึ่งกำหนดให้ $k=4$ ฉะนั้นถ้า $m+n < k$ ก็จะไม่มีความหมายของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ แต่ถ้า $m+n \geq k$ การคำนวณค่าของปริพันธ์จะเป็นไปตามเงื่อนไข $m+n+k$ เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ และสำหรับตารางที่ 2 กรณี $k=1$ ก็ย่อมเป็นไปตามเงื่อนไขที่ว่า ถ้า m, n เป็นจำนวนคู่พร้อมกัน ค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบในตารางจะไม่มีขอบเขตนั่นเอง

ตารางที่ 1 เมื่อ $k \neq 1$ โดยกำหนดให้ $k=4$ และ $a=2, b=3$

n m	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	$\frac{77\pi}{12}$	11.1297	$\frac{41\pi}{16}$	6.5006	$\frac{169\pi}{96}$
2	-	$\frac{14\pi}{3}$	8.4214	2π	5.1425	$\frac{17\pi}{12}$	3.9529
3	$\frac{55\pi}{16}$	6.5135	$\frac{101\pi}{64}$	4.1388	$\frac{147\pi}{128}$	3.2414	$\frac{965\pi}{1024}$
4	5.1938	$\frac{31\pi}{24}$	3.4143	$\frac{23\pi}{24}$	2.7131	$\frac{305\pi}{384}$	2.3165
5	$\frac{13\pi}{12}$	2.8925	$\frac{623\pi}{768}$	2.3090	$\frac{2075\pi}{3072}$	1.9774	$\frac{7259\pi}{12288}$
6	2.5681	$\frac{23\pi}{32}$	2.0291	$\frac{19\pi}{32}$	1.7308	$\frac{256\pi}{512}$	1.5346
7	$\frac{503\pi}{768}$	1.8321	$\frac{1627\pi}{3072}$	1.5394	$\frac{1405\pi}{3072}$	1.3550	$\frac{20083\pi}{49152}$

ตารางที่ 2 เมื่อ $k=1$ และ $a=2, b=3$

n m	1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{\ln 5}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{8}\ln\left(\frac{875}{11}\right)$	$\frac{1}{8}\ln\left(\frac{875}{11}\right)$	0.4407	$\frac{5\pi}{32}$	0.3791
2	$\frac{\pi}{4}$	-	$\frac{3\pi}{16}$	-	$\frac{5\pi}{32}$	-	$\frac{35\pi}{256}$
3	$\frac{1}{8}\ln\left(\frac{125}{3}\right)$	$\frac{5\pi}{32}$	0.3576	$\frac{\pi}{8}$	0.31	$\frac{55\pi}{512}$	0.2648
4	$\frac{3\pi}{16}$	-	$\frac{9\pi}{64}$	-	$\frac{15\pi}{128}$	-	$\frac{105\pi}{1024}$
5	0.3506	$\frac{15\pi}{128}$	0.2675	$\frac{3\pi}{32}$	0.2249	$\frac{165\pi}{2048}$	0.1979
6	$\frac{5\pi}{32}$	-	$\frac{29\pi}{256}$	-	$\frac{95\pi}{1024}$	-	$\frac{329\pi}{4096}$
7	0.2903	$\frac{49\pi}{512}$	0.2156	$\frac{77\pi}{1024}$	0.1785	$\frac{523\pi}{8192}$	0.2992

หมายเหตุ การคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบในตารางที่ 1 และ ตารางที่ 2 คำนวณโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป WolframAlpha

5. อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อต้องการศึกษาวิธีหาคำตอบของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx$ เมื่อ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $m+n \geq k$ เมื่อคำนวณหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ละส่วนอย่างต่อเนื่องจำนวน $k-1$ ครั้ง จะสามารถเขียนในรูปแบบใหม่ ได้ดังนี้

$$\int_0^\infty \frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k} dx = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \sin^m(ax)\sin^n(bx) dx$$

สำหรับการคำนวณหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $m+n+k$ เป็นจำนวนบวกคู่ ในการคำนวณหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้จำเป็นต้องอาศัยค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งแสดงการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบของกรณีนี้ในตัวอย่างที่ 1

กรณีที่ 2 $m+n+k$ เป็นจำนวนเต็มคี่

กรณีที่ 2.1 เมื่อ $k > 1$ การคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบจำเป็นต้องอาศัยค่าของปริพันธ์ Frullani ซึ่งแสดงการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบของกรณีนี้ในตัวอย่างที่ 2

กรณีที่ 2.2 เมื่อ $k=1$ แล้ว m, n ต้องไม่เป็นจำนวนเต็มคู่พร้อมกัน หาก m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้จะไม่มีขอบเขต แสดงการคำนวณค่าปริพันธ์นี้ในตัวอย่างที่ 3

งานวิจัยนี้ได้มีแนวคิดของการขยายฟังก์ชันที่ใช้ในการหาปริพันธ์จากรูปแบบ $\frac{\sin^n(x)}{x^m}$ เป็นรูปแบบ $\frac{\sin^m(ax)\sin^n(bx)}{x^k}$ ซึ่งการดำเนินการมีความซับซ้อนและมีการดำเนินการตามรูปแบบที่ได้จำแนกไว้ข้างต้นสำหรับข้อเสนอแนะในการต่อยอดของแนวคิดนี้อาจคำนวณหาปริพันธ์ของรูปแบบ $\frac{\sin^m(ax)\cos^n(bx)}{x^k}$ และอาจมีการหาค่าปริพันธ์จำแนกตามกรณีศึกษาต่อไป

6. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบพระคุณสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ในการสนับสนุนการดำเนินงานวิจัยในครั้งนี้

7. เอกสารอ้างอิง

Abramowitz & Stegun. (1974). *Handbook of mathematical functions (table of definite integrals)*. Dover.

Clarke, R. J. (1998). Some Integrals of the Form $\int_0^\infty \frac{\sin^m x \cos^n x}{x^p} dx$. *The Mathematical Gazette*, 82, 290-293. <https://doi.org/10.2307/3620420>

Courant, R. (1956). *Differential and integral calculus* (2nd ed.). Blackie & Son.

Eric W. Weisstein. *Frullani's Integral*. Math World. <http://mathworld.wolfram.com/FrullanisIntegral.html>

Purcell, E.J., Rigdon, S.E. & Varberg, D. (2000). *Calculus*. New Jersey: Prentice-Hall.

Trainin, J. (2010). Integrating expressions of the form $\frac{\sin^n x}{x^m}$ and others. *The Mathematical Gazette*, 94, 216-223. <https://doi.org/10.1017/S0025557200006471>