

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$

Solutions of the Diophantine Equation $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$

ปวีณา ถ้ำแก้ว*, จักรกริช ถ้ำแก้ว

Paweena Thamkaew*, Jakkrit Thamkaew

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

Faculty of Science and Technology, Chiang Mai Rajabhat University

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราได้ทำการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$ เมื่อ $2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $k = x_1$ โดยผลการวิจัยพบว่า เมื่อ $x_1 = 2$ จะมีผลเฉลยเพียง 1 ผลเฉลย เมื่อ $x_1 = 3$ จะมีผลเฉลยเพียง 2 ผลเฉลย และเมื่อ $x_1 \geq 4$ จะมีผลเฉลยทั่วไปบางส่วนอย่างน้อย 4 ผลเฉลย

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยทั่วไป

Abstract

In this research, we describe solutions of the Diophantine equation on the following from:

$\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$ where $2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$ are integers and $k = x_1$. For our result,

we obtain that the equation has one solution if $x_1 = 2$, two solutions if $x_1 = 3$, and at least four general solutions if $x_1 \geq 4$.

Keywords: Diophantine Equation, General Solutions

1. บทนำ

สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์นั้นมีการศึกษาหลากหลายรูปแบบไม่ว่าจะเป็น สมการเชิงเส้น สมการกำลังสอง สมการกำลังสาม เป็นต้น ซึ่งโดยทั่วไปผู้ที่ศึกษาจะมุ่งหาคำตอบของสมการโดยที่คำตอบเป็นจำนวน

* Corresponding author : paweena_tha@cmru.ac.th

เต็มบวก ทั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยของ Nechemia Burshtein (2564) ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ ในรูปแบบ $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3} + \dots + \frac{k}{x_k} = 1$ เมื่อ $2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k = x_1$ และปวีณา ถ้ำแก้ว และคณะ (2561) ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ ในรูปแบบ $\frac{1}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \frac{5}{x_3} + \dots + \frac{2k-1}{x_k} = 1$ และ $\frac{2}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \frac{6}{x_3} + \dots + \frac{2k}{x_k} = 1$ ผู้วิจัยได้นำแนวคิดจากงานวิจัยดังกล่าวมาศึกษา และปรับเปลี่ยนรูปแบบของตัวเศษของสมการไดโอแฟนไทน์เป็นจำนวนกำลังสอง $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$ เพื่อทำการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการนี้ โดยใช้วิธีการในลักษณะเดียวกันกับงานวิจัยของ Nechemia Burshtein

จากศึกษาพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$ เมื่อ $x_1 = 2$ จะมีเพียง 1 ผลเฉลย เมื่อ $x_1 = 3$ จะมีเพียง 2 ผลเฉลย และเมื่อ $x_1 \geq 4$ พบว่าสมการนี้มีผลเฉลยจำนวนมากผู้วิจัยจึงหาผลเฉลยของสมการนี้บางส่วน โดยอยู่ในรูปแบบผลเฉลยทั่วไปซึ่งได้อย่างน้อย 4 ผลเฉลย

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อทำการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$ เมื่อ $2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k = x_1$

3. ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 1 [1] ฟังก์ชันจำนวนเต็มค่ามากที่สุด (The greatest integer function)

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ $[x]$ คือ จำนวนเต็มมากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x

ทฤษฎีบท 2 [3] สมบัติเอกลักษณ์ของเศษส่วนอียิปต์ (The Identity of Egyptian fractions)

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{N+M} + \frac{M}{N(N+M)} \quad \text{เมื่อ } M, N \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } M, N \geq 1$$

4. ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 3 สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$

เมื่อ $2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k = x_1$

จะได้ว่า (i) มีเพียงผลเฉลยเดียว เมื่อ $x_1 = 2$

(ii) มีเพียง 2 ผลเฉลย เมื่อ $x_1 = 3$

(iii) มีอย่างน้อย 4 ผลเฉลย เมื่อ $x_1 \geq 4$

การพิสูจน์ จะแบ่งเป็น 3 กรณี

(i) กรณี $x_1 = 2$ พิจารณา $\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{x_2} = 1$ จะได้ $\frac{4}{x_2} = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $x_2 = 8$ จะเห็นได้ว่าเมื่อ $x_1 = 2$ จะได้ผลเฉลย

ของสมการเพียงคำตอบเดียว คือ $x_2 = 8$ ดังนั้น กรณี $x_1 = 2$ จะมีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$

(ii) กรณี $x_1 = 3$

พิจารณา $\frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} = 1$ จะได้ $\frac{4}{x_2} + \frac{9}{x_3} = \frac{2}{3}$

เนื่องจาก $\frac{4}{19} + \frac{9}{20} < \frac{2}{3}$ ดังนั้น เมื่อ $x_2 \geq 19$ จะทำให้ค่าของ $\frac{4}{x_2} + \frac{9}{x_3}$ น้อยกว่า $\frac{2}{3}$ แสดงว่าเมื่อ $x_2 \geq 19$

จะทำให้สมการไม่มีผลเฉลย

และเมื่อ $x_2 = 4, 5, 6$ จะทำให้ $\frac{4}{x_2} \geq \frac{2}{3}$ ดังนั้น $\frac{4}{x_2} + \frac{9}{x_3}$ จะมีค่ามากกว่า $\frac{2}{3}$ แสดงว่าเมื่อ $x_2 \leq 6$ จะทำให้

สมการไม่มีผลเฉลย เพราะฉะนั้นค่าของ x_2 ที่เป็นไปได้ คือ $6 < x_2 < 19$

พิจารณา $x_2 = 8$ หรือ 12 จะได้ $\frac{4}{8} + \frac{9}{x_3} = \frac{2}{3}$ หรือ $\frac{4}{12} + \frac{9}{x_3} = \frac{2}{3}$ ตามลำดับ ดังนั้น $x_3 = 54$ หรือ 27

ส่วนในกรณีที่ $x_2 = 7$ จะได้ $\frac{4}{7} + \frac{9}{x_3} = \frac{2}{3}$ จะได้ $\frac{9}{x_3} = \frac{2}{21}$ ซึ่งจะได้ $x_3 = \frac{189}{2} \notin \mathbb{Z}^+$

เมื่อพิจารณา $x_2 = 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19$ ในทำนองเดียวกัน พบว่าค่าของ x_3 ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น กรณี $x_1 = 3$ สมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$ จะมีผลเฉลยเพียง 2 ผลเฉลย ได้แก่

$$\frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{8} + \frac{3^2}{54} = 1 \text{ และ } \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{12} + \frac{3^2}{27} = 1$$

(iii) กรณี $x_1 \geq 4$ จะพิจารณาผลเฉลยบางส่วน ในรูปผลเฉลยทั่วไปดังนี้

จะหาผลเฉลยทั่วไป 1

$$\begin{aligned} 1 &= \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{x_1 \text{ ตัว}} \cdot \frac{1}{x_1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_1}}_{x_1 \text{ ตัว}} \\ &= \frac{1^2}{1^2} \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{3^2}{3^2} \cdot \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2} \cdot \frac{1}{x_1} \\ &= \frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{2^2 x_1} + \frac{3^2}{3^2 x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_1} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $x_1 < 2^2 x_1 < 3^2 x_1 < \dots < x_1^2 x_1$ และ $k = x_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป 1 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{2^2 x_1} + \frac{3^2}{3^2 x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_1} = 1 \quad (1)$$

เมื่อ $x_1 = x_1$, $x_2 = 2^2 x_1$, $x_3 = 3^2 x_1$, ..., $x_k = x_1^2 x_1$

จะหาผลเฉลยทั่วไป 2

จากทฤษฎีบท 2 กำหนดให้ $N = x_1$ และ $M = 1$ จะได้ $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_1(x_1 + 1)}$

แทนค่าสมการข้างต้น ในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_1(x_1 + 1)} \right] + \left[\frac{2^2}{2^2 x_1} + \frac{3^2}{3^2 x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_1} \right] = 1 \\ & \frac{1}{x_1 + 1} + \left[\frac{2^2}{2^2 x_1} + \frac{3^2}{3^2 x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_1} \right] + \frac{1}{x_1(x_1 + 1)} = 1 \\ & \frac{1}{x_1 + 1} + \left[\frac{2^2}{2^2 x_1} + \frac{3^2}{3^2 x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_1} \right] + \left[\frac{(x_1 + 1)^2}{(x_1 + 1)^2} \cdot \frac{1}{x_1(x_1 + 1)} \right] = 1 \\ & \frac{1}{x_1 + 1} + \left[\frac{2^2}{2^2 x_1} + \frac{3^2}{3^2 x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_1} \right] + \frac{(x_1 + 1)^2}{x_1(x_1 + 1)^3} = 1 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k = x_1$ จึงจัดรูปดังนี้

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1 + 1 - 1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1 + 1 - 1)} + \dots + \frac{(x_1 + 1 - 1)^2}{(x_1 + 1 - 1)^2(x_1 + 1 - 1)} \right] + \frac{(x_1 + 1)^2}{(x_1 + 1 - 1)(x_1 + 1)^3} = 1$$

และแทนค่า $x_1 + 1$ ด้วย x_1 จะได้

$$\frac{1}{x_1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1 - 1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1 - 1)} + \dots + \frac{(x_1 - 1)^2}{(x_1 - 1)^2(x_1 - 1)} \right] + \frac{x_1^2}{(x_1 - 1)x_1^3} = 1$$

จาก $x_1 \geq 4$ จะได้ $4x_1 > 2x_1 \geq x_1 + 4$ นั่นคือ $2^2(x_1 - 1) > x_1$

จึงทำให้ได้ $x_1 < 2^2(x_1 - 1) < 3^2(x_1 - 1) < \dots < (x_1 - 1)^2(x_1 - 1) < (x_1 - 1)x_1^3$ และ $k = x_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป 2 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1^2}{x_1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1 - 1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1 - 1)} + \dots + \frac{(x_1 - 1)^2}{(x_1 - 1)^2(x_1 - 1)} \right] + \frac{x_1^2}{(x_1 - 1)x_1^3} = 1 \quad (2)$$

เมื่อ $x_1 = x_1$, $x_2 = 2^2(x_1 - 1)$, $x_3 = 3^2(x_1 - 1)$, ..., $x_{n-1} = (x_1 - 1)^2(x_1 - 1)$, $x_n = x_1^3(x_1 - 1)$

จะหาผลเฉลยทั่วไป 3

จากทฤษฎีบท 2 กำหนดให้ $N = x_1$ และ $M = 1$ จะได้ $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_1(x_1 + 1)}$

แทนค่าสมการข้างต้น ในสมการ (2) จะได้

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_1(x_1 + 1)} \right] + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1 - 1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1 - 1)} + \dots + \frac{(x_1 - 1)^2}{(x_1 - 1)^2(x_1 - 1)} \right] + \frac{x_1^2}{(x_1 - 1)x_1^3} = 1 \\ & \frac{1}{x_1 + 1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1 - 1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1 - 1)} + \dots + \frac{(x_1 - 1)^2}{(x_1 - 1)^2(x_1 - 1)} \right] + \frac{x_1^2}{(x_1 - 1)x_1^3} + \frac{1}{x_1(x_1 + 1)} = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x_1+1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1-1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-1)} + \dots + \frac{(x_1-1)^2}{(x_1-1)^2(x_1-1)} \right] + \frac{x_1^2}{(x_1-1)x_1^3} + \frac{(x_1+1)^2}{(x_1+1)^2} \cdot \frac{1}{x_1(x_1+1)} = 1$$

จะเห็นว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k = x_1$ จึงจัดรูปดังนี้

$$\frac{1}{x_1+1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1+1-1-1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1+1-1-1)} + \dots + \frac{(x_1+1-1-1)^2}{(x_1+1-1-1)^2(x_1+1-1-1)} \right] + \frac{(x_1+1-1)^2}{(x_1+1-1)(x_1+1-1)^3} + \frac{(x_1+1)^2}{(x_1+1)^2(x_1+1-1)(x_1+1)} = 1$$

และแทนค่า x_1+1 ด้วย x_1 จะได้

$$\frac{1}{x_1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1-2)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-2)} + \dots + \frac{(x_1-2)^2}{(x_1-2)^2(x_1-2)} \right] + \frac{(x_1-1)^2}{(x_1-2)(x_1-1)^3} + \frac{x_1^2}{x_1^3(x_1-1)} = 1$$

จาก $x_1 \geq 4$ จะได้ว่า $x_1+2x_1 \geq x_1+8$ แสดงว่า $4x_1 > x_1+8$ ทำให้ $4x_1-8 > x_1$

ดังนั้น $4(x_1-2) > x_1$ นั่นคือ $2^2(x_1-2) > x_1$

จาก $x_1-1 \geq x_1-2$ จะได้ $(x_1-1)^2 \geq (x_1-2)^2$ ดังนั้น $(x_1-2)^2 < (x_1-1)^3$

จึงทำให้ได้ว่า $x_1 < 2^2(x_1-2) < 3^3(x_1-2) < \dots < (x_1-2)^2(x_1-2) < (x_1-2)(x_1-1)^3 < x_1^3(x_1-1)$ และ

$$k = x_1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป 3 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1^2}{x_1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1-2)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-2)} + \dots + \frac{(x_1-2)^2}{(x_1-2)^2(x_1-2)} \right] + \frac{(x_1-1)^2}{(x_1-2)(x_1-1)^3} + \frac{x_1^2}{x_1^3(x_1-1)} = 1 \quad (3)$$

ซึ่ง $x_1 = x_1, x_2 = 2^2(x_1-2), x_3 = 3^2(x_1-2), \dots, x_{n-2} = (x_1-2)^2(x_1-2), x_{n-1} = (x_1-2)(x_1-1)^3,$

$$x_n = x_1^3(x_1-1)$$

จะหาผลเฉลยทั่วไป 4

จากทฤษฎีบท 2 กำหนดให้ $N = x_1$ และ $M = T$ โดยที่ T เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{จะได้ } \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1+T} + \frac{T}{x_1(x_1+T)}$$

แทนค่าสมการข้างต้น ในสมการ (1) จะได้ $\left[\frac{1}{x_1+T} + \frac{T}{x_1(x_1+T)} \right] + \left[\frac{2^2}{2^2x_1} + \frac{3^2}{3^2x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_1} \right] = 1$

$$\frac{1^2}{x_1+T} + \frac{2^2}{2^2x_1} + \frac{3^2}{3^2x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_1} + \frac{T}{x_1(x_1+T)} = 1$$

$$\frac{1^2}{x_1+T} + \frac{2^2}{2^2x_1} + \frac{3^2}{3^2x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_1} + \left[\frac{(1+1+\dots+1)}{T \text{ ตัว}} \cdot \frac{1}{x_1(x_1+T)} \right] = 1$$

$$\frac{1^2}{x_1+T} + \frac{2^2}{2^2x_1} + \frac{3^2}{3^2x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_1} + \left[\left(\frac{(x_1+1)^2}{(x_1+1)^2} + \frac{(x_1+2)^2}{(x_1+2)^2} + \dots + \frac{(x_1+T)^2}{(x_1+T)^2} \right) \cdot \frac{1}{x_1(x_1+T)} \right] = 1$$

$$\frac{1^2}{x_1+T} + \frac{2^2}{2^2x_1} + \frac{3^2}{3^2x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_1} + \frac{(x_1+1)^2}{(x_1+1)^2 x_1 (x_1+T)} + \frac{(x_1+2)^2}{(x_1+2)^2 x_1 (x_1+T)} + \dots + \frac{(x_1+T)^2}{(x_1+T)^2 x_1 (x_1+T)} = 1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k = x_1$ จึงจัดรูปดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1^2}{x_1+T} + \frac{2^2}{2^2(x_1+T-T)} + \frac{3^2}{3^2(x_1+T-T)} + \dots + \frac{(x_1+T-T)^2}{(x_1+T-T)^2(x_1+T-T)} \\ + \frac{(x_1+T-T+1)^2}{(x_1+T-T+1)^2(x_1+T-T)(x_1+T)} + \frac{(x_1+T-T+2)^2}{(x_1+T-T+2)^2(x_1+T-T)(x_1+T)} \\ + \dots + \frac{(x_1+T)^2}{(x_1+T)^2(x_1+T-T)(x_1+T)} = 1 \end{aligned}$$

จากนั้นแทนค่า x_1+T ด้วย x_1 จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{2^2(x_1-T)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-T)} + \dots + \frac{(x_1-T)^2}{(x_1-T)^2(x_1-T)} \\ + \frac{(x_1-T+1)^2}{(x_1-T+1)^2(x_1-T)x_1} + \frac{(x_1-T+2)^2}{(x_1-T+2)^2(x_1-T)x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2(x_1-T)x_1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } T = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{3x_1-1}{4} \right\rfloor$$

เนื่องจาก $T < \frac{3x_1-1}{4}$ จะได้ว่า $x_1-T > x_1 - \frac{3x_1-1}{4}$ ดังนั้น $4(x_1-T) > x_1+1$ แสดงว่า $2^2(x_1-T) > x_1$

จาก $x_1-T > x_1 - \frac{3x_1-1}{4}$ จึงทำให้ $x_1-T+2 > \frac{x_1+8}{4}$

และ $x_1 \geq 4$ จึงทำให้ได้ว่า $x_1-T+2 > 1$

พิจารณา $1 < (x_1-T+2)+1$

$$(x_1-T) < (x_1-T)(x_1-T+2)+1$$

$$(x_1-T) < ((x_1-T)+1)^2$$

$$(x_1-T)^2 < (x_1-T+1)^2 \cdot x_1$$

$$(x_1-T)^2(x_1-T) < (x_1-T+1)^2(x_1-T) \cdot x_1$$

จึงทำให้ได้ $x_1 < 2^2(x_1-T) < 3^2(x_1-T) < \dots < (x_1-T)^2(x_1-T) < (x_1-T+1)^2(x_1-T)x_1$

$$< (x_1-T+2)^2(x_1-T)x_1 < x_1^2(x_1-T)x_1 \text{ และ } k = x_1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป 4 จะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{2^2(x_1-T)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-T)} + \dots + \frac{(x_1-T)^2}{(x_1-T)^2(x_1-T)} \\ + \frac{(x_1-T+1)^2}{(x_1-T+1)^2(x_1-T)x_1} + \frac{(x_1-T+2)^2}{(x_1-T+2)^2(x_1-T)x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2(x_1-T)x_1} = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

ซึ่ง $x_1 = x_1, x_2 = 2^2(x_1-T), x_3 = 3^2(x_1-T), \dots, x_{x_1-T} = (x_1-T)^2(x_1-T),$

$$x_{x_1-T+1} = (x_1-T+1)^2(x_1-T)x_1, x_{x_1-T+2} = (x_1-T+2)^2(x_1-T)x_1, \dots, x_n = x_1^2(x_1-T)x_1$$

โดยที่ $T = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{3x_1 - 1}{4} \right\rfloor$

สรุปได้ว่า เมื่อ $x_1 \geq 4$ สมการจะมีผลเฉลยทั่วไปบางส่วนอย่างน้อย 4 ผลเฉลย ได้แก่

ผลเฉลยทั่วไป 1 : $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{2^2 x_1} + \frac{3^2}{3^2 x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_1} = 1$

ผลเฉลยทั่วไป 2 : $\frac{1^2}{x_1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1-1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-1)} + \dots + \frac{(x_1-1)^2}{(x_1-1)^2(x_1-1)} \right] + \frac{x_1^2}{(x_1-1)x_1^3} = 1$

ผลเฉลยทั่วไป 3 :

$\frac{1^2}{x_1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1-2)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-2)} + \dots + \frac{(x_1-2)^2}{(x_1-2)^2(x_1-2)} \right] + \frac{(x_1-1)^2}{(x_1-2)(x_1-1)^3} + \frac{x_1^2}{x_1^3(x_1-1)} = 1$

ผลเฉลยทั่วไป 4 : $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{2^2(x_1-T)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-T)} + \dots + \frac{(x_1-T)^2}{(x_1-T)^2(x_1-T)} + \frac{(x_1-T+1)^2}{(x_1-T+1)^2(x_1-T)x_1} + \frac{(x_1-T+2)^2}{(x_1-T+2)^2(x_1-T)x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2(x_1-T)x_1} = 1$

โดยที่ $T = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{3x_1 - 1}{4} \right\rfloor$

ตัวอย่าง 3 ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$

เมื่อ $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ และ $k = x_1 = 5$

ผลเฉลย เมื่อ $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ และ $k = x_1 = 5$ จะพิจารณาสมการ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \frac{4^2}{x_4} + \frac{5^2}{x_5} = 1$

โดยทฤษฎีบท 2 (iii) จะได้ว่าสมการข้างต้นจะมีผลเฉลยอย่างน้อย 4 ผลเฉลย ดังนี้

พิจารณา ผลเฉลยทั่วไป 1 : $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{2^2 x_1} + \frac{3^2}{3^2 x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_1} = 1$

จะได้ $\frac{1^2}{5} + \frac{2^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^2}{3^2 \cdot 5} + \frac{4^2}{4^2 \cdot 5} + \frac{5^2}{5^2 \cdot 5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{20} + \frac{9}{45} + \frac{16}{80} + \frac{25}{125} = 1$

พิจารณา ผลเฉลยทั่วไป 2 : $\frac{1^2}{x_1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1-1)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-1)} + \dots + \frac{(x_1-1)^2}{(x_1-1)^2(x_1-1)} \right] + \frac{x_1^2}{(x_1-1)x_1^3} = 1$

จะได้ $\frac{1^2}{5} + \frac{2^2}{2^2(5-1)} + \frac{3^2}{3^2(5-1)} + \frac{4^2}{(5-1)^2(5-1)} + \frac{5^2}{5^3(5-1)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{16} + \frac{9}{36} + \frac{16}{64} + \frac{25}{500} = 1$

พิจารณา ผลเฉลยทั่วไป 3 :

$\frac{1}{x_1} + \left[\frac{2^2}{2^2(x_1-2)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-2)} + \dots + \frac{(x_1-2)^2}{(x_1-2)^2(x_1-2)} \right] + \frac{(x_1-1)^2}{(x_1-2)(x_1-1)^3} + \frac{x_1^2}{x_1^3(x_1-1)} = 1$

$$\text{จะได้ } \frac{1^2}{5} + \frac{2^2}{2^2(5-2)} + \frac{3^2}{3^2(5-2)} + \frac{4^2}{3(5-1)^3} + \frac{5^2}{5^3(5-1)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{12} + \frac{9}{27} + \frac{16}{192} + \frac{25}{500} = 1$$

$$\text{พิจารณา ผลเฉลยทั่วไป 4 : } \frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{2^2(x_1-T)} + \frac{3^2}{3^2(x_1-T)} + \dots + \frac{(x_1-T)^2}{(x_1-T)^2(x_1-T)} \\ + \frac{(x_1-T+1)^2}{(x_1-T+1)^2(x_1-T)x_1} + \frac{(x_1-T+2)^2}{(x_1-T+2)^2(x_1-T)x_1} + \dots + \frac{x_1^2}{x_1^2(x_1-T)x_1} = 1$$

$$\text{โดยที่ } T = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{3x_1-1}{4} \right\rfloor$$

เนื่องจาก $x_1 = 5$ จะได้ $T = 2, 3$

$$\text{ถ้า } T = 2 \text{ จะได้ } \frac{1^2}{5} + \frac{2^2}{2^2(5-2)} + \frac{3^2}{3^2(5-2)} + \frac{4^2}{4^2(5-2) \cdot 5} + \frac{5^2}{5^2(5-2) \cdot 5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{12} + \frac{9}{27} + \frac{16}{240} + \frac{25}{375} = 1$$

$$\text{ถ้า } T = 3 \text{ จะได้ } \frac{1^2}{5} + \frac{2^2}{2^2(5-3)} + \frac{3^2}{3^2(5-3) \cdot 5} + \frac{4^2}{4^2(5-3) \cdot 5} + \frac{5^2}{5^3(5-3)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{8} + \frac{9}{90} + \frac{16}{160} + \frac{25}{250} = 1$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$ เมื่อ $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ และ

$$k = x_1 = 5 \text{ จะมีอย่างน้อย 5 ผลเฉลย ได้แก่ } \frac{1}{5} + \frac{4}{20} + \frac{9}{45} + \frac{16}{80} + \frac{25}{125} = 1, \frac{1}{5} + \frac{4}{16} + \frac{9}{36} + \frac{16}{64} + \frac{25}{500} = 1,$$

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{12} + \frac{9}{27} + \frac{16}{192} + \frac{25}{500} = 1, \frac{1}{5} + \frac{4}{12} + \frac{9}{27} + \frac{16}{240} + \frac{25}{375} = 1 \text{ และ } \frac{1}{5} + \frac{4}{8} + \frac{9}{90} + \frac{16}{160} + \frac{25}{250} = 1$$

5. อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้เราได้พยายามหาผลเฉลยของสมการ $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$ ภายใต้เงื่อนไข $k = x_1$ และ

$2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$ เป็นจำนวนเต็ม เมื่อได้ศึกษาพบว่า เราสามารถแก้สมการหาคำตอบเมื่อ $k = 2$ และ $k = 3$ ได้ แต่เมื่อ $k \geq 4$ ในการหาคำตอบเราไม่สามารถแก้สมการได้โดยง่ายเลย ผู้วิจัยจึงได้ทำการหาผลเฉลยบางส่วนเท่านั้น ทั้งนี้ผู้วิจัยคิดว่าสมการนี้ยังมีผลเฉลยทั่วไปในรูปแบบอื่นอีก หากมีผู้สนใจสมการนี้สามารถคิดผลเฉลยเพิ่มเติมหรือผลเฉลยทั้งหมดของสมการนี้ได้

6. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการวิจัย ผลเฉลยปฐมฐานของสมการไดโอแฟนไทน์ ซึ่งได้รับการสนับสนุนจากกองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่เป็นอย่างสูงที่สนับสนุนทุนวิจัยนี้

7. เอกสารอ้างอิง

- วรรณจิตา ยลวิลาศ. (2561). *ทฤษฎีจำนวน*. ภาพสินธุ์ : คณะศิลปศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยภาพสินธุ์, 234 หน้า.
- ปวีณา ถั่วแก้ว, พรสุดา กาหมี, ปวีศ มณีเหล็ก และ ศิรประภา วงศ์หนูคำ. (2562). ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ ในรูปแบบ (1) $1/x_1 + 3/x_2 + 5/x_3 + \dots + (2k-1)/x_k = 1$ และ (2) $2/x_1 + 4/x_2 + 6/x_3 + \dots + 2k/x_k = 1$. *สัปดาห์ : วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สทวท.)*, 6(1), 1-10. https://research.kpru.ac.th/journal_science/journal/26322019-07-07.pdf
- Burshtein, N. (2017). On solution of the Diophantine equation $1/x_1 + 2/x_2 + 3/x_3 + \dots + k/x_k = 1$ when $2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$ are integers and $k = x_1$. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematiccs*, 23(2), 30-35. <https://nntdm.net/volume-23-2017/number-2/30-35/>