

สมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$

On The Ternary Quadratic Diophantine Equation $x^2 + 4y^2 = 20z^2$

อัจจริยา นิลสระคู, กฤติเดช จันทวาร, ทศนัย รังผึ้ง*

Achariya Nilsrakoo, Krittidej Chanthawara, Tasanai Rangpung*

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี

Faculty of Science, Ubon Ratchathani Rajabhat University

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้พิจารณาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็ม มีรูปแบบอย่างน้อย 4 รูปแบบที่แตกต่างกันสำหรับผลเฉลยจำนวนเต็มที่มีเป็นจำนวนอนันต์ของสมการไดโอแฟนไทน์

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ สมการกำลังสองสามตัวแปร ผลเฉลย

Abstract

This research has considered the solutions of the ternary quadratic Diophantine equation $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ where x, y, z are integers. There exist at least 4 different formulas for infinite integers solutions of the Diophantine equation.

Keywords: Diophantine Equation, Ternary Quadratic Equation, Solution

1. บทนำ

ปัญหาในปัจจุบันหลาย ๆ ปัญหาสามารถนำมาเขียนเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้ และใช้ในกระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์นั้นอาจจะอยู่ในรูปแบบจำนวนจริงใด ๆ ในความเป็นจริงแล้วผลเฉลยบางผลเฉลยไม่สามารถนำไปแก้ไขปัญหาในชีวิตจริงได้ เราจึงสนใจผลเฉลยที่สามารถนำไปใช้ได้จริงนั่นคือผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) เป็นสมการที่สนใจผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งอาจเป็นสมการดีกรีหนึ่ง หรือดีกรีที่มากกว่าหนึ่ง อาจมีตัวแปรหนึ่งหรือหลายตัวแปร และสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร รูปทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J$ เมื่อ $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ และ J คือจำนวนเต็ม โดยที่ A, B, C, D, E, F ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ในวิจัยนี้เราศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปรที่อยู่ในรูป $Ax^2 + By^2 = Cz^2$

* Corresponding author : tasnai.rr@gmail.com

Anbuselvi and Shanmugavadivu (2017) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $z^2 = 45x^2 + y^2$ พบว่ามีผลเฉลยที่มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ 3 รูปแบบ

Shanthi and Gopalan (2021) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 3y^2 = 19z^2$ พบว่ามีผลเฉลยที่มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ 4 รูปแบบ

Meena et al. (2021) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 3y^2 = 13z^2$ พบว่ามีผลเฉลยที่มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ 4 รูปแบบ

Saranya and Kayathri (2022) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $3x^2 + 2y^2 = 275z^2$ และจำนวนพิเศษ พบว่ามีผลเฉลยที่มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ 4 รูปแบบ และได้คุณสมบัติบางประการของรูปแบบผลเฉลยกับจำนวนพิเศษ

Hema (2023) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + y^2 = 122z^2$ พบว่ามีผลเฉลยที่มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ 5 รูปแบบ

สำหรับงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เพื่อหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มอนันต์ 4 รูปแบบ

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็ม

3. วิธีดำเนินการวิจัย

1) ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็ม

2) สร้างรูปแบบผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็ม

3) ศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) เป็นสมการที่สนใจผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งอาจเป็นสมการดีกรีหนึ่ง หรือดีกรีที่มากกว่าหนึ่ง อาจมีตัวแปรหนึ่งหรือหลายตัวแปร และสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร รูปทั่วไปคือ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exy + Fxz + Gyz + Hx + Iy + Jz = K$$

ในวิจัยนี้สนใจสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปรที่อยู่ในรูป $Ax^2 + By^2 = Dz^2$

ตัวอย่าง 1 สมการไดโอแฟนไทน์และผลเฉลย

1.1 ให้ $x=1, y=1$ และ $z=2$ เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $5x^2 + 3y^2 = 2z^2$ เพราะ $x=1, y=1$ และ $z=2$ เป็นจำนวนเต็มและทำให้สมการเป็นจริง

1.2 ให้ $x=1, y=0$ และ $z=2$ ไม่เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $5x^2 + 3y^2 = 2z^2$ เพราะ $x=1, y=0$ และ $z=2$ ไม่ทำให้สมการเป็นจริง

1) ศึกษาการก่อกำเนิดผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ด้วยการแปลงเชิงเส้น โดยประยุกต์องค์ความรู้เกี่ยวกับค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ จะได้ว่าสเกลาร์ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A ก็ต่อเมื่อ $|\lambda I_n - A| = 0$ หรือ $|A - \lambda I_n| = 0$ และ สามารถหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ v ของ A ที่สมนัยกับ λ ได้จากสมการ $Av = \lambda v$ โดยที่ v ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์

2) ตรวจสอบวิธีการสร้างรูปแบบสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็ม จากรูปแบบการพิสูจน์โดยสร้างบตตั้ง ทฤษฎีบท และบตแทรกให้ถูกต้องสอดคล้องตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัย

3) สรุปงานและนำเสนองานการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็ม

สำหรับวิธีการบางวิธีที่ใช้คำนวณหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $Ax^2 + By^2 = Dz^2$ จะทำได้ง่ายกว่าเมื่อสัมประสิทธิ์ A หรือ B มีค่าเป็น 1 พร้อมกันกับ D ดังนั้นวิธีการหนึ่งซึ่งทำให้ได้ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ คือการเปลี่ยนรูปสมการให้อยู่ในรูปตัวแปรอื่นกำหนดให้ $z = S + 4T, y = S + 20T$ และ $x = 4P$ โดยที่ S, T, P เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(4P)^2 + 4(S + 20T)^2 &= 20(S + 4T)^2 \\ 16P^2 + 4(S^2 + 40ST + 400T^2) &= 20(S^2 + 8ST + 16T^2) \\ 16P^2 + 4S^2 + 160ST + 1,600T^2 &= 20S^2 + 160ST + 320T^2 \\ 16P^2 + 1,280T^2 &= 16S^2 \\ P^2 + 80T^2 &= S^2\end{aligned}\tag{1}$$

พบว่าถ้าสามารถหาผลเฉลยของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$ ได้แล้วจะทำให้ได้ผลเฉลยของสมการ $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ ดังนั้นจะพิจารณาผลเฉลยของ $P^2 + 80T^2 = S^2$ ร่วมด้วยโดยจะพิจารณาในวิธีการรูปแบบที่ 1 และ 2 และพิจารณาผลเฉลยของ $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ โดยตรงในรูปแบบที่ 3 และ 4 ดังต่อไปนี้

รูปแบบที่ 1

พิจารณา $P^2 + 80T^2 = S^2$ เมื่อจัดรูปสมการ จะได้

$$(S - P)(S + P) = 80T^2$$

เมื่อจัดพจน์ทางขวาของสมการเป็นสองกลุ่มและทำการเทียบกับพจน์ทางซ้ายจะได้ระบบสมการดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงระบบสมการที่ได้จากการเทียบพจน์ทั้งสองฝั่งของสมการ $(S - P)(S + P) = 80T^2$

กรณี	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12	1.13
$S + P$	T^2	$2T^2$	$4T^2$	$5T^2$	$8T^2$	$10T^2$	$20T^2$	$40T^2$	$80T$	$40T$	$20T$	$16T$	$10T$
$S - P$	80	40	20	16	10	8	4	2	T	$2T$	$4T$	$5T$	$8T$

กรณีที่ 1.1 $S + P = T^2$ และ $S - P = 80$ หาค่า S และ P โดยใช้วิธีแก้สมการ ดังนี้

$$S + P = T^2 \quad (2)$$

$$S - P = 80 \quad (3)$$

(2) - (3);

$$2P = T^2 - 80$$

$$P = \frac{T^2 - 80}{2}$$

เนื่องจากผลเฉลยของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $P = \frac{T^2 - 80}{2}$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม ส่งผลให้ T ต้องเป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $T = 2k$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางจำนวน ดังนั้น

$$P = \frac{(2k)^2 - 80}{2} = \frac{4k^2 - 80}{2} = 2k^2 - 40$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$ คือ $S = 2k^2 + 40$, $P = 2k^2 - 40$ และ $T = 2k$ เมื่อแทนในสมการ $x = 4P$, $y = S + 20T$ และ $z = S + 4T$ จะได้ผลเฉลยของสมการ $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ ดังนี้

$$x(k) = 8k^2 - 160$$

$$y(k) = 2k^2 + 40k + 40$$

$$z(k) = 2k^2 + 8k + 40$$

สำหรับกรณีที่ 1.1 ยังไม่ได้พิจารณา สามารถดำเนินการหาผลเฉลยได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับกรณีที่ 1.1

อย่างไรก็ตามยังมีระบบสมการอีกจำนวนหนึ่งที่ยังไม่ปรากฏในตารางที่ 1 เช่น

$$S + P = 80$$

$$S - P = T^2$$

โดยระบบสมการที่เหลือนี้อาจสามารถสร้างได้โดยการแทนตัวแปร P ในตารางที่ 1 ด้วย $-P$ ซึ่งสมการที่ได้จะมีผลเฉลยเป็นตัวเลขเดียวกันกับระบบสมการที่ปรากฏในตารางแต่อาจต่างกันที่เครื่องหมายของตัวเลขและผลเฉลยที่ได้เพิ่มเติมก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$ เนื่องจาก $n^2 = (-n)^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

รูปแบบที่ 2

พิจารณา $P^2 + 80T^2 = S^2$ เมื่อจัดรูปสมการ จะได้

$$80T^2 = (S - P)(S + P)$$

เมื่อ $T \neq 0$ สามารถเปลี่ยนรูปสมการให้อยู่ในรูปสัดส่วนที่ตัวส่วนมี T เป็นตัวคูณได้หลายกรณี เช่น

$$2.1 \quad \frac{T}{S - P} = \frac{S + P}{80T}$$

$$2.3 \quad \frac{4T}{S - P} = \frac{S + P}{20T}$$

$$2.5 \quad \frac{8T}{S - P} = \frac{S + P}{10T}$$

$$2.2 \quad \frac{2T}{S - P} = \frac{S + P}{40T}$$

$$2.4 \quad \frac{5T}{S - P} = \frac{S + P}{16T}$$

ซึ่งสัดส่วนในแต่ละกรณีสามารถนำไปหารูปแบบผลเฉลยของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$ ได้

กรณีที่ 2.1 $\frac{T}{S - P} = \frac{S + P}{80T}$

ให้ α และ β เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $\frac{T}{S - P} = \frac{S + P}{80T} = \frac{\alpha}{\beta}$ เนื่องจาก $T \neq 0$ จะได้ว่า $\alpha \neq 0$

และ $\beta \neq 0$ พิจารณา $\frac{S + P}{80T} = \frac{\alpha}{\beta}$ และ $\frac{T}{S - P} = \frac{\alpha}{\beta}$ จะได้ระบบสมการ

$$\beta S + \beta P = 80\alpha T \quad (4)$$

$$\alpha S - \alpha P = \beta T \quad (5)$$

$$\alpha(4) + \beta(5); \quad 2\alpha\beta S = (80\alpha^2 + \beta^2)T \quad (6)$$

$$\alpha(4) - \beta(5); \quad 2\alpha\beta P = (80\alpha^2 + \beta^2)T \quad (7)$$

จากสมการ (6) และ (7) ได้ว่า

$$\frac{P}{80\alpha^2 - \beta^2} = \frac{T}{2\alpha\beta} = \frac{S}{80\alpha^2 + \beta^2} \quad (8)$$

จากสมการ (8) ถ้าสมมติให้อัตราส่วนมีค่าเป็น 1 จะได้

$$P = 80\alpha^2 - \beta^2$$

$$T = 2\alpha\beta$$

$$S = \beta^2 + 80\alpha^2$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ $x = 4P, y = S + 20T$ และ $z = S + 4T$ จะได้ผลเฉลยของสมการ $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ คือ

$$x(\alpha, \beta) = 4(80\alpha^2 - \beta^2)$$

$$y(\alpha, \beta) = \beta^2 + 80\alpha^2 + 40\alpha\beta$$

$$z(\alpha, \beta) = \beta^2 + 80\alpha^2 + 8\alpha\beta$$

สำหรับกรณีที่ยังไม่ได้พิจารณา สามารถดำเนินการหาผลเฉลยได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับกรณีที่ 2.1

รูปแบบที่ 3

จากสมการ $4y^2 = 20z^2 - x^2$ พิจารณา $4 = (\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20} - 4)$ และ $y = 20a^2 - b^2$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ เมื่อแทนค่าในสมการหลัก จะได้

$$\begin{aligned}(\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20} - 4)(20a^2 - b^2)^2 &= 20z^2 - x^2 \\(\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20} - 4)[(\sqrt{20}a)^2 - b^2]^2 &= (\sqrt{20}z)^2 - x^2 \\(\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20} - 4)(\sqrt{20}a + b)^2(\sqrt{20}a - b)^2 &= (\sqrt{20}z + x)(\sqrt{20}z - x)\end{aligned}$$

สามารถแบ่งพิจารณาเป็น 4 กรณี ดังนี้

- 3.1 $(\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20}a + b)^2 = \sqrt{20}z + x$ และ $(\sqrt{20} - 4)(\sqrt{20}a - b)^2 = \sqrt{20}z - x$
- 3.2 $(\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20}a - b)^2 = \sqrt{20}z + x$ และ $(\sqrt{20} - 4)(\sqrt{20}a + b)^2 = \sqrt{20}z - x$
- 3.3 $(\sqrt{20} - 4)(\sqrt{20}a + b)^2 = \sqrt{20}z + x$ และ $(\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20}a - b)^2 = \sqrt{20}z - x$
- 3.4 $(\sqrt{20} - 4)(\sqrt{20}a - b)^2 = \sqrt{20}z + x$ และ $(\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20}a + b)^2 = \sqrt{20}z - x$

กรณีที่ 1 $(\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20}a + b)^2 = \sqrt{20}z + x$ และ $(\sqrt{20} - 4)(\sqrt{20}a - b)^2 = \sqrt{20}z - x$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } \sqrt{20}z + x &= (\sqrt{20} + 4)(\sqrt{20}a + b)^2 \\&= (\sqrt{20} + 4)[(\sqrt{20}a)^2 + 2\sqrt{20}ab + b^2] \\&= 20\sqrt{20}a^2 + 40ab + \sqrt{20}b^2 + 80a^2 + 8\sqrt{20}ab + 4b^2 \\&= (20\sqrt{20}a^2 + \sqrt{20}b^2 + 8\sqrt{20}ab) + (80a^2 + 4b^2 + 40ab) \\&= \sqrt{20}(20a^2 + b^2 + 8ab) + 4(20a^2 + b^2) + 40ab\end{aligned}$$

จะได้ $z = (20a^2 + b^2) + 8ab$ และ $x = 4(20a^2 + b^2) + 40ab$ โดยที่ $\sqrt{20}z - x = (\sqrt{20} - 4)(\sqrt{20}a - b)^2$

ให้ผลลัพธ์เดียวกัน ดังนั้นผลเฉลยของสมการ $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ คือ

$$\begin{aligned}x &= 4(20a^2 + b^2) + 40ab \\y &= 20a^2 - b^2 \\z &= (20a^2 + b^2) + 8ab\end{aligned}$$

สำหรับกรณีที่ยังไม่ได้พิจารณา สามารถดำเนินการหาผลเฉลยได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับกรณีที่ 3.1

รูปแบบที่ 4

จากสมการ $20z^2 - 4y^2 = x^2 \cdot 1$ พิจารณา $1 = \frac{(\sqrt{20}+2)(\sqrt{20}-2)}{16}$ และ $x = 20a^2 - 4b^2$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ เมื่อแทนค่าในสมการหลัก จะได้

$$\begin{aligned} 20z^2 - 4y^2 &= (20a^2 - 4b^2)^2 \left[\frac{(\sqrt{20}+2)(\sqrt{20}-2)}{16} \right] \\ (\sqrt{20}z)^2 - (2y)^2 &= \left[(\sqrt{20}a)^2 - (2b)^2 \right]^2 \left[\frac{(\sqrt{20}+2)(\sqrt{20}-2)}{16} \right] \\ (\sqrt{20}z - 2y)(\sqrt{20}z + 2y) &= (\sqrt{20}a - 2b)^2 (\sqrt{20}a + 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}+2}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{20}-2}{4} \right) \end{aligned}$$

สามารถแบ่งพิจารณาเป็น 4 กรณี ดังนี้

$$4.1 \quad \sqrt{20}z + 2y = (\sqrt{20}a + 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}+2}{4} \right) \text{ และ } \sqrt{20}z - 2y = (\sqrt{20}a - 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}-2}{4} \right)$$

$$4.2 \quad \sqrt{20}z + 2y = (\sqrt{20}a - 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}+2}{4} \right) \text{ และ } \sqrt{20}z - 2y = (\sqrt{20}a + 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}-2}{4} \right)$$

$$4.3 \quad \sqrt{20}z + 2y = (\sqrt{20}a + 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}-2}{4} \right) \text{ และ } \sqrt{20}z - 2y = (\sqrt{20}a - 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}+2}{4} \right)$$

$$4.4 \quad \sqrt{20}z + 2y = (\sqrt{20}a - 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}-2}{4} \right) \text{ และ } \sqrt{20}z - 2y = (\sqrt{20}a + 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}+2}{4} \right)$$

กรณีที่ 4.1 $\sqrt{20}z + 2y = (\sqrt{20}a + 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}+2}{4} \right)$ และ $\sqrt{20}z - 2y = (\sqrt{20}a - 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}-2}{4} \right)$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \sqrt{20}z + 2y &= (\sqrt{20}a + 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}+2}{4} \right) \\ &= (20a^2 + 4\sqrt{20}ab + 4b^2) \left(\frac{\sqrt{20}+2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} (20\sqrt{20}a^2 + 80ab + 4\sqrt{20}b^2 + 40a^2 + 8\sqrt{20}ab + 8b^2) \\ &= \sqrt{20} (5a^2 + 2ab + b^2) + 2 (5a^2 + 10ab + b^2) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $z = 5a^2 + 2ab + b^2$ และ $y = 5a^2 + 10ab + b^2$ โดยที่ $\sqrt{20}z - 2y = (\sqrt{20}a - 2b)^2 \left(\frac{\sqrt{20}-2}{4} \right)$ ให้

ผลลัพธ์เดียวกัน ดังนั้นผลเฉลยของสมการ $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ คือ

$$\begin{aligned} x &= 20a^2 - 4b^2 \\ y &= 5a^2 + 10ab + b^2 \\ z &= 5a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

สำหรับกรณีที่ยังไม่ได้พิจารณา สามารถดำเนินการหาผลเฉลยได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับกรณีที่ 4.1

หมายเหตุ: นอกจากพิจารณาการหาผลเฉลยของสมการ $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ ได้จากผลเฉลยในรูปแบบที่ 1-4 แล้ว ยังสามารถหาผลเฉลยของ $P^2 + 80T^2 = S^2$ จากผลเฉลยเริ่มต้น (P_0, T_0, S_0) ที่ทราบมาก่อนแล้วได้ดังนี้

ให้ (P_0, T_0, S_0) เป็นผลเฉลยของ $P^2 + 80T^2 = S^2$ เราสามารถสร้างผลเฉลยอื่น ๆ สำหรับสมการ $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ ได้จากผลเฉลยดังกล่าว จากสมการที่ (1) จะได้ว่า

$$P_0^2 + 80T_0^2 - S_0^2 = 0$$

จากการศึกษาวิธีการของ Meena, K., Vidhyalakshmi, S. and Gopalan, M. A. [3] จะพยายามสร้างการแปลงเชิงเส้นเพื่อกำหนดผลเฉลยของสมการ (1) สมมติว่า $P_1 = -79P_0, T_1 = h - 79T_0, S_1 = h - 79S_0$ จากนั้นจะคำนวณหา h ที่เหมาะสมที่ทำให้ P_1, T_1, S_1 เป็นผลเฉลยของสมการที่ (1) นั่นคือ

$$\begin{aligned} (-79P_0)^2 + 80(h - 79T_0)^2 &= (h - 79S_0)^2 \\ 6,241P_0^2 + 80(h^2 - 158hT_0 + 6,241T_0^2) &= h^2 - 158hS_0 + 6,241S_0^2 \\ 6,241(P_0^2 + 80T_0^2 - S_0^2) + 79(h^2 - 160hT_0 + 2hS_0) &= 0 \\ h^2 - 160hT_0 + 2hS_0 &= 0 \\ h(h - (160T_0 - 2S_0)) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $h = 0$ หรือ $h = 160T_0 - 2S_0$

พิจารณา $h = 0$ จะได้ว่า $P_1 = -79P_0, T_1 = -79T_0, S_1 = -79S_0$ เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ T_1 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -79P_0 + 0T_0 + 0S_0 \\ 0P_0 - 79T_0 + 0S_0 \\ 0P_0 + 0T_0 - 79S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -79 & 0 & 0 \\ 0 & -79 & 0 \\ 0 & 0 & -79 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix}$$

จากการทำซ้ำวิธีการข้างต้น จะทำให้ได้ผลเฉลยในลำดับที่ n ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_n \\ T_n \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -79 & 0 & 0 \\ 0 & -79 & 0 \\ 0 & 0 & -79 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-79)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-79)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-79)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $P_n = P_0\alpha^n, T_n = T_0\alpha^n$ และ $S_n = S_0\alpha^n$ เมื่อ $\alpha = -79$

ในลำดับถัดไปพิจารณา $h = 160T_0 - 2S_0$ จะได้ว่า $P_1 = -79P_0, T_1 = 81T_0 - 2S_0, S_1 = 160T_0 - 81S_0$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ T_1 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -79 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & -2 \\ 0 & 160 & -81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix}$$

จากการทำซ้ำวิธีการข้างต้น จะทำให้ได้ผลเฉลยในลำดับที่ n ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_n \\ T_n \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -79 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & -2 \\ 0 & 160 & -81 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{ให้ } M = \begin{bmatrix} -79 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & -2 \\ 0 & 160 & -81 \end{bmatrix} \text{ จากนั้นหาค่าลักษณะเฉพาะของ } M \text{ โดยกำหนดให้ } |\lambda I_3 - M| = 0$$

ดังนั้น $(\lambda + 79)^2 (\lambda - 79) = 0$ ได้ว่า $\lambda = -79, 79$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ M

สำหรับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = -79$ พิจารณา $(\lambda I_3 - M)\vec{v} = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -160 & 2 \\ 0 & -160 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ d \\ 80d \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 80 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } k, d \text{ เป็นสเกลาร์}$$

สำหรับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 79$ พิจารณา $(\lambda I_3 - M)\vec{v} = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 158 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } \begin{bmatrix} P_0 \\ T_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } d \text{ เป็นสเกลาร์}$$

$$\text{ให้ } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 80 & 1 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{79} & \frac{1}{79} \\ 0 & \frac{80}{79} & -\frac{1}{79} \end{bmatrix} \text{ และ } P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -79 & 0 & 0 \\ 0 & -79 & 0 \\ 0 & 0 & 79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = -79, \beta = 79 \text{ นั่นคือ } P^{-1}M^nP = (P^{-1}MP)^n = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น}$$

$$M^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 80 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{79} & \frac{1}{79} \\ 0 & \frac{80}{79} & -\frac{1}{79} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{79}\alpha^n & \frac{1}{79}\alpha^n \\ 0 & -\frac{80}{79}\alpha^n + \frac{80}{79}\beta^n & \frac{80}{79}\alpha^n - \frac{\beta^n}{79} \end{bmatrix}$$

เมื่อแทน M^n ใน (9) จะได้

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \alpha^n \\ T_n &= -\frac{1}{79}(T_0 - S_0) \alpha^n \\ S_n &= -\frac{80}{79}(T_0 - S_0) \alpha^n - \frac{1}{79}(80T_0 - S_0) \beta^n \end{aligned}$$

เมื่อ $\alpha = -79$, $\beta = 79$

4. ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 1 สมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะมีรูปแบบผลเฉลยอย่างน้อย 4 รูปแบบดังต่อไปนี้

ผลเฉลยรูปแบบที่ 1

สำหรับ k ที่เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

รูปแบบที่	ผลเฉลย	รูปแบบที่	ผลเฉลย
1	$x(k) = 8k^2 - 160$ $y(k) = 2k^2 + 40k + 40$ $z(k) = 2k^2 + 8k + 40$	6	$x(k) = 80k^2 - 16$ $y(k) = 20k^2 + 40k + 4$ $z(k) = 20k^2 + 8k + 4$
2	$x(k) = 8k^2 - 80$ $y(k) = 4k^2 + 40k + 20$ $z(k) = 4k^2 + 8k + 20$	7	$x(k) = 160k^2 - 8$ $y(k) = 40k^2 + 40k + 2$ $z(k) = 40k^2 + 8k + 2$
3	$x(k) = 32k^2 - 40$ $y(k) = 8k^2 + 40k + 10$ $z(k) = 8k^2 + 8k + 10$	8	$x(k) = 320k^2 - 4$ $y(k) = 80k^2 + 40k + 1$ $z(k) = 80k^2 + 8k + 1$
4	$x(k) = 4k^2 - 32$ $y(k) = 10k^2 + 40k + 8$ $z(k) = 10k^2 + 8k + 8$	9	$x(k) = 316k$ $y(k) = 121k$ $z(k) = 89k$
5	$x(k) = 64k^2 - 20$ $y(k) = 16k^2 + 40k + 5$ $z(k) = 16k^2 + 8k + 5$	10	$x(k) = 76k$ $y(k) = 41k$ $z(k) = 25k$

รูปแบบที่	ผลเฉลย
11	$x(k) = 32k$ $y(k) = 32k$ $z(k) = 16k$
12	$x(k) = 44k$ $y(k) = 61k$ $z(k) = 29k$

รูปแบบที่	ผลเฉลย
13	$x(k) = 4k$ $y(k) = 29k$ $z(k) = 13k$

ผลเฉลยรูปแบบที่ 2

สำหรับ α และ β ที่เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $\alpha, \beta \neq 0$

รูปแบบที่	ผลเฉลย
1	$x(\alpha, \beta) = 4(80\alpha^2 - \beta^2)$ $y(\alpha, \beta) = \beta^2 + 80\alpha^2 + 40\alpha\beta$ $z(\alpha, \beta) = \beta^2 + 80\alpha^2 + 8\alpha\beta$
2	$x(\alpha, \beta) = 4(40\alpha^2 - 2\beta^2)$ $y(\alpha, \beta) = 2\beta^2 + 40\alpha^2 + 40\alpha\beta$ $z(\alpha, \beta) = 2\beta^2 + 40\alpha^2 + 8\alpha\beta$
3	$x(\alpha, \beta) = 4(20\alpha^2 - 4\beta^2)$ $y(\alpha, \beta) = 4\beta^2 + 20\alpha^2 + 40\alpha\beta$ $z(\alpha, \beta) = 4\beta^2 + 20\alpha^2 + 8\alpha\beta$

รูปแบบที่	ผลเฉลย
4	$x(\alpha, \beta) = 4(16\alpha^2 - 5\beta^2)$ $y(\alpha, \beta) = 5\beta^2 + 16\alpha^2 + 40\alpha\beta$ $z(\alpha, \beta) = 5\beta^2 + 16\alpha^2 + 8\alpha\beta$
5	$x(\alpha, \beta) = 4(10\alpha^2 - 8\beta^2)$ $y(\alpha, \beta) = 8\beta^2 + 10\alpha^2 + 40\alpha\beta$ $z(\alpha, \beta) = 8\beta^2 + 10\alpha^2 + 8\alpha\beta$

ผลเฉลยรูปแบบที่ 3

สำหรับ a และ b ที่เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $a, b \neq 0$

รูปแบบที่	ผลเฉลย
1	$x(a, b) = 4(20a^2 + b^2) + 40ab$ $y(a, b) = 20a^2 - b^2$ $z(a, b) = 20a^2 + b^2 + 8ab$
2	$x(a, b) = 4(20a^2 + b^2) - 40ab$ $y(a, b) = 20a^2 - b^2$ $z(a, b) = 20a^2 + b^2 - 8ab$

รูปแบบที่	ผลเฉลย
3	$x(a, b) = -4(20a^2 + b^2) + 40ab$ $y(a, b) = 20a^2 - b^2$ $z(a, b) = 20a^2 + b^2 - 8ab$
4	$x(a, b) = -4(20a^2 + b^2) - 40ab$ $y(a, b) = 20a^2 - b^2$ $z(a, b) = 20a^2 + b^2 + 8ab$

ผลเฉลยรูปแบบที่ 4

สำหรับ a และ b ที่เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $a, b \neq 0$

รูปแบบที่	ผลเฉลย	รูปแบบที่	ผลเฉลย
1	$x(a, b) = 20a^2 - 4b^2$ $y(a, b) = 5a^2 + 10ab + b^2$ $z(a, b) = 5a^2 + 2ab + b^2$	3	$x(a, b) = 20a^2 - 4b^2$ $y(a, b) = -5a^2 + 10ab - b^2$ $z(a, b) = 5a^2 - 2ab + b^2$
2	$x(a, b) = 20a^2 - 4b^2$ $y(a, b) = 5a^2 - 10ab + b^2$ $z(a, b) = 5a^2 - 2ab + b^2$	4	$x(a, b) = 20a^2 - 4b^2$ $y(a, b) = -5a^2 - 10ab - b^2$ $z(a, b) = 5a^2 + 2ab + b^2$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า (P_0, T_0, S_0) เป็นผลเฉลยของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$ แล้วสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n จะได้ว่า

$$P_n = P_0 \alpha^n, T_n = T_0 \alpha^n, S_n = S_0 \alpha^n$$

และ

$$P_n = P_0 \alpha^n, T_n = -\frac{1}{79}(T_0 - S_0) \alpha^n, S_n = -\frac{80}{79}(T_0 - S_0) \alpha^n - \frac{1}{79}(80T_0 - S_0) \beta^n$$

เมื่อ $\alpha = -79, \beta = 79$ เป็นผลเฉลยของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$

จากการศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปรที่อยู่ในรูป $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มใด ๆ พบว่าผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ทั้ง 4 รูปแบบ มีขั้นตอนและวิธีหาผลเฉลยที่แตกต่างกัน โดยการหาผลเฉลยในรูปแบบที่ 1 ใช้สมบัติของจำนวนเต็มและการแก้ระบบสมการ การหาผลเฉลยในรูปแบบที่ 2 ใช้วิธีการคูณทแยง (Method of cross multiplication) ในการหาผลเฉลย การหาผลเฉลยรูปแบบที่ 3 และ 4 ใช้สมบัติของจำนวนเต็ม ด้วยวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยวิธีทำเป็นผลต่างกำลังสอง การแจกแจงของการคูณ และสรุปได้ว่า ถ้า (P_0, T_0, S_0) เป็นคำตอบของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$ แล้ว (P_n, T_n, S_n) เป็นผลเฉลยในรูปทั่วไปของสมการ $P^2 + 80T^2 = S^2$

5. อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้สนใจศึกษาเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปรในการหาผลเฉลยที่มีจำนวนผลเฉลยอย่างน้อย 4 รูปแบบสามารถใช้งานวิจัยเล่มนี้เป็นแนวทางในการศึกษาและเป็นแนวทางในการพิสูจน์เพื่อหาผลเฉลยของสมการที่ต้องการจะศึกษาได้

6. กิตติกรรมประกาศ

วิจัยคณิตศาสตร์เรื่อง สมการไดโอแฟนไทน์กำลังสองสามตัวแปร $x^2 + 4y^2 = 20z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็ม สำเร็จลุล่วงได้ดีด้วยความอนุเคราะห์จากมหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานีได้อนุมัติทุนอุดหนุนการวิจัย งบประมาณรายได้ประจำปีงบประมาณ 2564 จนงานวิจัยเล่มนี้เสร็จสมบูรณ์คณะผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

7. เอกสารอ้างอิง

- Anbuselvi, R., & Shanmugavadivu, S. A. (2017). On homogeneous ternary quadratic Diophantine equation $z^2 = 45x^2 + y^2$. *International Journal of Engineering Research and Application*, 7(11), 22-25. <https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/384125>
- Hema, k. (2023). Second degree homogeneous Diophantine equation with three unknow $x^2 + y^2 = 122z^2$. *International Journal of Novel Research in Physics and Mathematics*, 10(1), 1-5. <https://www.noveltyjournals.com>
- Meena, K., Vidhyalakshmi, S., & Gopalan, M. A. (2021). On the ternary quadratic Diophantine equation $x^2 + 3y^2 = 13z^2$. *International Journal of Research Publication and Reviews*, 9(6), 6, 74-78. <https://ijrpr.com/uploads/V2ISSUE9/IJRPR1355.pdf>
- Saranya, C., & Kayathri, P. (2022). Observation on ternary quadratic equation $3x^2 + 2y^2 = 275z^2$. *Advance and Application in Mathematical Sciences*, 21(3), 1549-1556. <https://www.researchgate.net/publication/354995957>
- Shanthi, J., & Gopalan, M. A. (2021). On the ternary quadratic Diophantine equation $x^2 + 3y^2 = 19z^2$. *International Journal of Research Publication and Reviews*, 2(8), 69-76. <https://www.ijrpr.com/uploads/V2ISSUE8/IJRPR915.pdf>