ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $6^x - n^y = z^2$

On the Solutions of the Diophantine Equation $6^x - n^y = z^2$

สุธน ตาดี

Suton Tadee

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $6^x - n^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \neq 1$ และ $n \equiv 1, 3, 5 \pmod 8$ โดยการใช้สมบัติพื้นฐานของสมภาค ผลการวิจัยพบว่า ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าว คือ

$$(n, x, y, z) \in \{(n, 0, 0, 0), (3, 2, 3, 3), (5, 1, 1, 1), (11, 2, 1, 5), (27, 2, 1, 3), (35, 2, 1, 1)\}$$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ สมภาค ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

Abstract

In this research, we study the Diophantine equation $6^x - n^y = z^2$, where x, y, z are non-negative integers and n is a positive integer with $n \neq 1$ and $n \equiv 1, 3, 5 \pmod 8$. By using the basic properties of congruence, the research results indicated that the non-negative integer solutions of this Diophantine equation are

$$(n, x, y, z) \in \{(n, 0, 0, 0), (3, 2, 3, 3), (5, 1, 1, 1), (11, 2, 1, 5), (27, 2, 1, 3), (35, 2, 1, 1)\}.$$

Keywords: Diophantine equation, congruence, non-negative integer solution

1. บทนำ

ในปี ค.ศ. 2019 Thongnak et al. (2019) ได้ค้นพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$ และในปีถัดมา Burshtein (2020) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (2, 2, 12)$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $19^x - 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก ต่อมา Rao (2022) ได้ค้นพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $23^x - 19^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 2)\}$

* *Corresponding author: suton.t@lawasri.tru.ac.th*

Received: 17 พ.ค. 67; Revised: 23 ธ.ค. 67; Accepted: 27 พ.ค. 68

ในปี ค.ศ. 2023 Tadee (2023a) ได้ค้นพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $9^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) \in \{(r, 2r, 0)\}$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 7^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และในปีเดียวกัน Tadee (2023b) ได้ค้นพบเงื่อนไขบางประการที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ นอกจากนี้ Tadee & Laomalaw (2023) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $(p + 2)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \equiv 5 \pmod{24}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ นอกจากนี้ Gope (2023) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $27^x - 11^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 4)\}$

และเมื่อไม่นานมานี้ Thongnak et al. (2024) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 2), (2, 2, 4)\}$ และ Siraworakun & Tadee (2024) ได้ค้นพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $25^x - 7^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (2, 2,24)\}$

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้นและเพื่อพิสูจน์ข้อคาดการณ์ของ Burshtein (2019) ที่กล่าวว่า “สมการไดโอแฟนไทน์ $6^x - 11^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (2, 1, 5)$” จึงทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

$$6^x - n^y = z^2 \tag{1}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \neq 1$ และ $n \equiv 1, 3, 5 (\mathrm{mod}\ 8)$ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $6^x - n^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \neq 1$ และ $n \equiv 1, 3, 5 (\mathrm{mod}\ 8)$ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

3. วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้ใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ สมภาค (congruence) ดังนั้นในหัวข้อนี้จะขอทบทวนบทนิยามและสมบัติพื้นฐานของสมภาค แล้วจะพิสูจน์ทฤษฎีบท 2 เพื่อนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการในหัวข้อถัดไป

บทนิยาม 1 (Burton, 2010, p. 63) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่าสองจำนวนเต็ม a *และ* b *สมภาค หรือ คอนกรูเอนซ์ มอดุโล* n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ เมื่อ n หาร $a - b$ ลงตัว

ทฤษฎีบท 1 (Burton, 2010, p. 65) ให้ $n > 1$ และ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1) $a \equiv a \pmod{n}$

2) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$

3) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$

4) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ และ $ac \equiv bd \pmod{n}$

5) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$

6) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

บทตั้ง 2 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1) $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$

2) $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$

พิสูจน์

1) เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจะมี $r \in \{0,1,2,3\}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv r \pmod{4}$

กรณีที่ 1: $r = 0$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{4}$

กรณีที่ 2: $r = 1$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{4}$

กรณีที่ 3: $r = 2$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4}$

กรณีที่ 4: $r = 3$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$

จากทั้งสี่กรณีสรุปได้ว่า $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$

2) เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจะมี $r \in \{0,1,2,\dots,7\}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv r \pmod{8}$

กรณีที่ 1: $r = 0$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{8}$

กรณีที่ 2: $r = 1$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{8}$

กรณีที่ 3: $r = 2$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{8}$

กรณีที่ 4: $r = 3$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{8}$

กรณีที่ 5: $r = 4$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 0 \pmod{8}$

กรณีที่ 6: $r = 5$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv 1 \pmod{8}$

กรณีที่ 7: $r = 6$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 6^2 \equiv 36 \equiv 4 \pmod{8}$

กรณีที่ 8: $r = 7$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 7^2 \equiv 49 \equiv 1 \pmod{8}$

จากทั้งแปดกรณีสรุปได้ว่า $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$

4. ผลการวิจัย

การศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ (1) นั้น ในที่นี้จะแยกพิจารณาสองกรณี ดังนี้

1) $n \neq 1$ และ $n \equiv 1, 5 \pmod{8}$ (ซึ่งจะแสดงในทฤษฎีบท 3) และ

2) $n \equiv 3 \pmod{8}$ (ซึ่งจะแสดงในทฤษฎีบท 4)

ดังจะกล่าวในลำดับต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \neq 1$ และ $n \equiv 1,5 (\text{mod } 8)$ จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้

1) ถ้า $n = 5$ แล้ว $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,1,1)\}$

2) ถ้า $n \neq 5$ แล้ว $(x, y, z) = (0,0,0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1)

จาก n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \neq 1$ และ $n \equiv 1,5 \text{ (mod } 8)$ ดังนั้น $n \geq 5$ และ $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$ เพราะฉะนั้น $n^y \equiv 1 (\text{mod } 4)$

กรณีที่ 1: $x = 0$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า $1 - n^y = z^2$ และจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $1 - n^y \geq 0$ และจาก $n \geq 5$ จะได้ว่า $y = 0$ เพราะฉะนั้น $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0,0,0)$

กรณีที่ 2: $x = 1$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า $6 - n^y = z^2$ และจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $6 - n^y \geq 0$ และจาก $n \geq 5$ จะได้ว่า $y = 0$ หรือ 1

กรณีที่ 2.1: $y = 0$ จะได้ว่า $z^2 = 5$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2.2: $y = 1$ จะได้ว่า $z^2 = 6 - n$ ดังนั้น $n = 5$ เพราะฉะนั้น $z = 1$

นั่นคือ $(x, y, z) = (1,1,1)$ เมื่อ $n = 5$

กรณีที่ 3: $x > 1$ ดังนั้น $6^x \equiv 0 \text{ (mod } 4)$ เพราะฉะนั้น $6^x - n^y \equiv 0 - 1 \equiv 3 \text{ (mod } 4)$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv 3 \text{ (mod } 4)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากบทตั้ง 2 ข้อ 1)

ทฤษฎีบท 4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 3 \text{ (mod } 8)$ จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้

1) ถ้า $n = 3$ แล้ว $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (2,3,3)\}$

2) ถ้า $n = 11$ แล้ว $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (2,1,5)\}$

3) ถ้า $n = 27$ แล้ว $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (2,1,3)\}$

4) ถ้า $n = 35$ แล้ว $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (2,1,1)\}$

5) ถ้า $n \notin \{3, 11, 27, 35\}$ แล้ว $(x, y, z) = (0,0,0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1)

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 3 \text{ (mod } 8)$ ดังนั้น $n \geq 3$

กรณีที่ 1: $x = 0$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า $1 - n^y = z^2$ และจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $1 - n^y \geq 0$ และจาก $n \geq 3$ จะได้ว่า $y = 0$ เพราะฉะนั้น $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0,0,0)$

กรณีที่ 2: $x = 1$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า $6 - n^y = z^2$ และจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $6 - n^y \geq 0$ และจาก $n \geq 3$ จะได้ว่า $y = 0$ หรือ 1

กรณีที่ 2.1: $y = 0$ จะได้ว่า $z^2 = 5$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2.2: $y = 1$ จะได้ว่า $z^2 = 6 - n$ และจาก $n \equiv 3 \text{ (mod } 8)$

ดังนั้น $z^2 \equiv 6-3 \equiv 3 \pmod 8$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากบทตั้ง 2 ข้อ 2)

กรณีที่ 3: $x = 2$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$36 - n^y = z^2 \qquad (2)$$

และจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $36 - n^y \geq 0$ และจาก $n \equiv 3 \pmod 8$ จึงแยกพิจารณาได้ดังนี้

กรณีที่ 3.1: $n = 3$ จะได้ว่า $36 - 3^y \geq 0$ ดังนั้น $y \leq 3$ และจากสมการ (2) และ z เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $y = 3$ และ $z = 3$ นั่นคือ $(x, y, z) = (2, 3, 3)$

กรณีที่ 3.2: $n = 11$ จะได้ว่า $36 - 11^y \geq 0$ ดังนั้น $y \leq 1$ และจากสมการ (2) และ z เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $y = 1$ และ $z = 5$ นั่นคือ $(x, y, z) = (2, 1, 5)$

กรณีที่ 3.3: $n = 19$ จะได้ว่า $36 - 19^y \geq 0$ ดังนั้น $y \leq 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากสมการ (2) และ z เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.4: $n = 27$ จะได้ว่า $36 - 27^y \geq 0$ ดังนั้น $y \leq 1$ และจากสมการ (2) และ z เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $y = 1$ และ $z = 3$ นั่นคือ $(x, y, z) = (2, 1, 3)$

กรณีที่ 3.5: $n = 35$ จะได้ว่า $36 - 35^y \geq 0$ ดังนั้น $y \leq 1$ และจากสมการ (2) และ z เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $y = 1$ และ $z = 1$ นั่นคือ $(x, y, z) = (2, 1, 1)$

กรณีที่ 3.6: $n > 35$ จะได้ว่า $y = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากสมการ (2) และ z เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 4: $x > 2$ ดังนั้น $6^x \equiv 0 \pmod 8$ และเนื่องจากสมการ (1) และ $n \equiv 3 \pmod 8$ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv -3^y \pmod 8$

กรณีที่ 4.1: y เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้ $y = 2u$ จะได้ว่า $3^y \equiv 3^{2u} \equiv (1)^u \equiv 1 \pmod 8$ ดังนั้น $z^2 \equiv -1 \equiv 7 \pmod 8$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากบทตั้ง 2 ข้อ 2)

กรณีที่ 4.2: y เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้ $y = 2v + 1$ จะได้ว่า $3^y \equiv 3^{2v+1} \equiv 3 \cdot (1)^v \equiv 3 \pmod 8$ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv -3 \equiv 5 \pmod 8$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากบทตั้ง 2 ข้อ 2)

5. อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3 และ 4 ทำให้ทราบผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $6^x - n^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \neq 1$ และ $n \equiv 1, 3, 5 \pmod 8$ ซึ่งในการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวได้ใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมภาค

นอกจากนี้ผลที่ได้จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4 ได้ยืนยันว่าข้อคาดการณ์ของ Burshtein (2019) ที่กล่าวว่า “สมการไดโอแฟนไทน์ $6^x - 11^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (2, 1, 5)$” เป็นจริง แต่อย่างไรก็ตามในงานวิจัยนี้ไม่ได้แสดงผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ เนื่องจากยังขาดกรณีที่ $n \equiv 2, 4, 6, 7 \pmod 8$ ดังนั้น จึงยังคงเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาค้นคว้าต่อไป

6. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

7. เอกสารอ้างอิง

Burshtein, N. (2019). A short note on solutions of the Diophantine equations $6^x + 11^y = z^2$ and $6^x - 11^y = z^2$ in positive integers x, y, z. *Annals of Pure and Applied Mathematics, 20*(2), 55-56.

Burshtein, N. (2020). All the solutions of the Diophantine equations $13^x - 5^y = z^2$, $19^x - 5^y = z^2$ in positive integers x, y, z. *Annals of Pure and Applied Mathematics, 22*(2), 93-96.

Burton, D.M. (2010). *Elementary number theory* (7th ed.), New York: McGraw-Hill.

Gope, R.C. (2023). On the exponential Diophantine equation $27^x - 11^y = z^2$. *Journal of Physical Sciences, 28*, 11-15.

Rao, C.G. (2022). On the exponential Diophantine equation $23^x - 19^y = z^2$. *Journal of Physical Sciences, 27*, 1-4.

Siraworakun, A., & Tadee, S. (2024). All solutions of the Diophantine equation $25^x - 7^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science, 19*(3), 631-633.

Tadee, S. (2023a). A short note on two Diophantine equations $9^x - 3^y = z^2$ and $13^x - 7^y = z^2$. *Journal of Mathematics and Informatics, 24*, 23-25.

Tadee, S. (2023b). On the Diophantine equation $3^x - p^y = z^2$ where p is prime. *Journal of Science and Technology Thonburi University, 7*(1), 1-6.

Tadee, S., & Laomalaw, N. (2023). On the Diophantine equation $(p+2)^x - p^y = z^2$, where p is prime and $p \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 24)$. *International Journal of Mathematics and Computer Science, 18*(2), 149-152.

Thongnak, S., Chuayjan, W., & Kaewong, T. (2019). On the exponential Diophantine equation $2^x - 3^y = z^2$. *Southeast-Asian Journal of Sciences, 7*(1), 1-4.

Thongnak, S., Kaewong, T., & Chuayjan, W. (2024). On the exponential Diophantine equation $5^x - 3^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science, 19*(1), 99-102.