



จัตุรัสกล

นวลศรี ชำนาญกิจ*

จัตุรัสกล (magic square) เป็นกิจกรรมเสริมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เป็นที่ชื่นชอบของนักเรียนและครูอาจารย์ในระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษา และอุดมศึกษา และยังช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนเกี่ยวกับจำนวนต่าง ๆ ทั้งจำนวนเต็ม เศษส่วน และทศนิยม รวมทั้งเครื่องหมายของจำนวนอีกด้วย จึงทำให้มีผู้คิดวิธีสร้างจัตุรัสกลออกมาอย่างหลากหลายวิธี ในที่นี้ผู้เขียนจะขอกล่าวถึงเฉพาะจัตุรัสกลผลบวกเท่านั้นสำหรับจัตุรัสกลแบบอื่น ๆ จะได้นำเสนอในโอกาสต่อไป

จัตุรัสกลผลบวก

จัตุรัสกลผลบวก หมายถึง ตารางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งบรรจุจำนวนต่าง ๆ โดยที่จำนวนในแนวดิ่ง แนวนอน และแนวเส้นทแยงมุม 2 เส้น มีผลบวกเท่ากัน ดังภาพประกอบที่ 1

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ภาพประกอบที่ 1

ภาพประกอบที่ 1 แสดงจัตุรัสกลที่มีผลบวกของจำนวนในแนวนอน ($8+1+6$, $3+5+7$, $4+9+2$) ในแนวดิ่ง ($8+3+4$, $1+5+9$ และ $6+7+2$) และในแนวเส้นทแยงมุม 2 เส้น ($8+5+2$, $6+5+4$) ต่างเท่ากับ 15 เรียกผลบวกที่เท่ากันว่า **ผลบวกกล (magic sum)** หรือ **ค่าคงตัว (constant)** ในที่นี้ 15 เป็นผลบวกกล ในบทความนี้ผู้เขียนขอใช้คำสั้น ๆ ว่า **ผลบวก**

จัตุรัสกลที่มีจำนวน n แถว และจำนวนสดมภ์ n สดมภ์ เรียกว่าเป็นจัตุรัสกลที่มีขนาดเท่ากับ n ตัวอย่างเช่น จัตุรัสกลในภาพประกอบที่ 1 มีขนาดเท่ากับ 3 ส่วนจัตุรัสกลในภาพประกอบที่ 2 มีผลบวกเท่ากับ 34 และขนาดเท่ากับ 4 เป็นต้น

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

ภาพประกอบที่ 2

* ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์



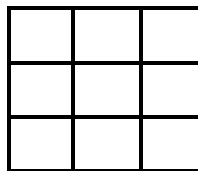
จัตุรัสกลขนาดเท่ากับ 3 เมื่อกำหนดตารางเปล่ามาให้ เราสามารถนำจำนวนต่าง ๆ มาเติมลงไปเพื่อให้ผลบวกในแนวนอน แนวตั้งและแนวทแยงมุมเท่ากัน อาจจะไม่ยากนัก แต่ ถ้าเป็นจัตุรัสกลขนาดเท่ากับ 4 ดัง ตัวอย่างในภาพประกอบ 2 คงไม่ใช่นักที่จะทำเช่นที่กล่าวมา แทนที่ผู้อ่านจะรู้สึกสนุก อาจทำให้เกิดความท้อ เบื่อหน่ายไปเสียก็เป็นได้ เราลองมาสร้างจัตุรัสกลโดยใช้วิธีที่ผู้เขียนจะกล่าวถึงกันดีกว่า วิธีนี้ผู้อ่านไม่ต้องใช้วิธีการสุ่มตัวเลขมาวางแล้วตรวจสอบคำตอบ ในที่นี้จะขอกกล่าวถึงเฉพาะการสร้างจัตุรัสกลผลบวกเท่านั้น

การสร้างจัตุรัสกลผลบวก

1. การสร้างจัตุรัสกลผลบวกที่มีขนาดเป็นจำนวนคี่

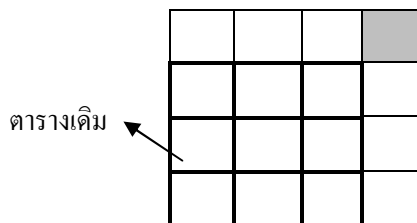
ในการสร้างจัตุรัสกลผลบวกที่มีขนาดเป็นจำนวนคี่นั้น มีผู้คิดค้นวิธีสร้างไว้หลายคน ในที่นี้จะขอกกล่าวถึงเฉพาะวิธีเดอลาลูแบร์ (De La Loubere method) ซึ่งมีลำดับขั้นตอนการสร้างดังนี้

ขั้นที่ 1 เริ่มด้วยการสร้างตารางขนาด 3×3 ดังภาพประกอบที่ 3 ดังนี้



ภาพประกอบที่ 3

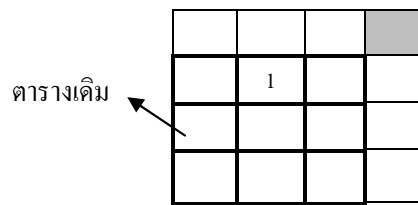
ขั้นที่ 2 ต่อเติมตาราง ให้เป็นขนาด 4×4 แล้วแรเงาตรงมุม ดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบที่ 4

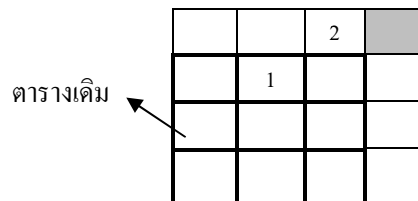
ขั้นที่ 3 เติมตัวเลข ในขั้นตอนนี้เป็นการเติมตัวเลขลงไปเพื่อให้ผลบวกในแนวนอน แนวตั้งและแนวทแยงมุมมีผลบวกเท่ากัน เพื่อให้เห็นขั้นตอนอย่างละเอียด จะขอกกล่าวถึงลำดับขั้นตอนในการเติมตัวเลขอย่างละเอียดดังนี้

1. ใส่ตัวเลข 1 ลงไปในแถวบนสุดของตารางเดิมตรงกลางแถวดังภาพประกอบที่ 5



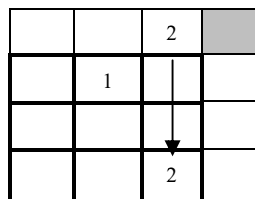
ภาพประกอบที่ 5

2. ใส่ตัวเลขถัดจาก 1 คือ 2 ในแนวทแยงขึ้นของตัวเลข 1 ไปเรื่อย ๆ แล้วแต่นาของตาราง ดังภาพประกอบที่ 6



ภาพประกอบที่ 6

3. ถ้าตัวเลขที่ใส่เข้าไปอยู่นอกกรอบของตารางเดิมให้ย้ายไปอยู่จนสุดตารางเดิม โดยให้อยู่ในแถวหรือสดมภ์เดียวกับตัวเลขที่อยู่นอกกรอบนั้น ในที่นี้ 2 อยู่นอกกรอบ ย้ายลงมาอยู่ในสดมภ์เดิมแต่เป็นแถวที่ 3 ดังภาพประกอบที่ 7



ภาพประกอบที่ 7

4. ทำเช่นเดียวกับข้อ 2 คือเติมตัวเลข 3 ในแนวทแยงขึ้นของ 2 และพบว่า 3 อยู่นอกกรอบ ย้าย 3 ลงมาอยู่ในสดมภ์เดียวกัน แต่ยังอยู่นอกกรอบอีก จึงย้าย 3 ไปอยู่ในตำแหน่งแรกของแถวนีด้วย ดังภาพประกอบที่ 8



		2	
	1		
3			3
		2	

ภาพประกอบที่ 8

5. ถ้าพบว่าช่องที่จะใส่ตัวเลขลงไปมีจำนวนอื่นอยู่แล้วให้ย้ายไปใส่ในช่องของแถวถัดไป 1 แถว โดยอยู่ติดกับจำนวนเดิม ในที่นี้จะใส่ 4 ในแนวทแยงขึ้นของ 3 แต่พบว่า มีตัวเลข 1 อยู่แล้ว จึงใส่ ตัวเลข 4 ในสดมภ์เดียวกับ 3 แต่ถัดมาอีก 1 แถวดังภาพประกอบที่ 9

		2	
	1		
3			3
4		2	

ภาพประกอบที่ 9

6. ใส่ตัวเลข 5, 6, 7 ในแนวทแยงขึ้นของ 4 แต่ใส่ 7 ไม่ได้เพราะพบช่องที่เรงาไว้แล้ว จึงย้าย 7 ไปอยู่ ในหลักเดียวกับ 6 แต่อยู่ในแถวถัดมา 1 แถว ดังภาพประกอบที่ 10

		2	7
	1	6	
3	5	7	3
4		2	

ภาพประกอบที่ 10

7. ทำแบบเดิมไปเรื่อย ๆ จนได้ตัวเลขครบทุกช่อง สุดท้ายจะได้จัตุรัสกลดังภาพประกอบที่ 12



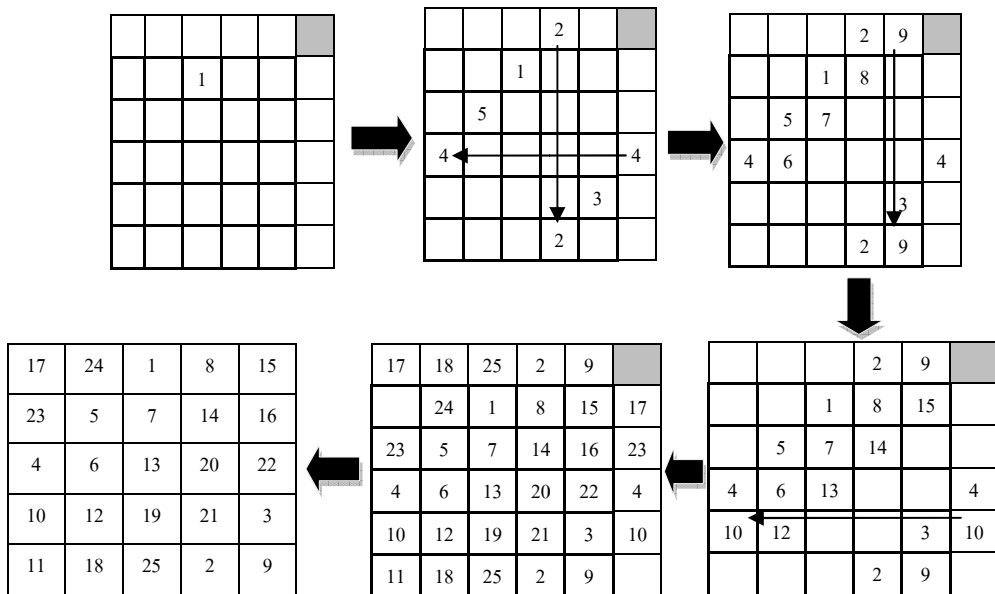
	9	2	7
8	1	6	
3	5	7	3
4	9	2	

ภาพประกอบที่ 11

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ภาพประกอบที่ 12

ต่อไปจะแสดงขั้นตอนการสร้างจัตุรัสกลขนาดเท่ากับ 5 ให้ผู้อ่านพิจารณาลำดับขั้นตอนการสร้างไปตามลำดับดังแสดงในภาพประกอบที่ 13 ดังนี้



ภาพประกอบที่ 13

ส่วนจัตุรัสกลขนาด 7, 9, 11, ... ก็มีการสร้างแบบเดียวกับการสร้างจัตุรัสกล ขนาด 3 และ 5 ผู้อ่านลองสร้างด้วยตนเอง จะพบว่าไม่ยากเลย การสร้างจัตุรัสกลไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นด้วย 1 และไม่จำเป็นต้องใช้จำนวนนับ ดังตัวอย่างในภาพประกอบที่ 14 ซึ่งเป็นจัตุรัสกลที่เริ่มต้นด้วย a และมีค่าเพิ่มขึ้นครั้งละ x และมีผลบวกเท่ากับ $3a+12x$ ซึ่งได้มาจาก $3(a+4x) = 3a+12x$

นั่นคือ

ผลบวก = ขนาด $\times$ จำนวนที่อยู่ตรงกึ่งกลางตาราง



$a+7x$	a	$a+5x$
$a+2x$	$a+4x$	$a+6x$
$a+3x$	$a+8x$	$a+x$

ภาพประกอบที่ 14

ขอนำเสนอตัวอย่างจัดเรียงขนาด 3 เพิ่มเติม เพื่อให้ผู้อ่านเห็นชัดขึ้น

	19	5	
17	3	13	17
7	11	15	7
9	19	5	

ภาพประกอบที่ 15

	16	7	
-13	10	-7	-13
4	-4	-10	4
-1	16	7	

ภาพประกอบที่ 16

เริ่มด้วย 3 บวกเพิ่มครั้งละ 2

$$(a = 3, x = 2)$$

เริ่มด้วย 10 บวกเพิ่มครั้งละ (-3)

$$(a = 10, x = 0.2)$$

	3	$1\frac{1}{4}$	
$2\frac{3}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
$1\frac{3}{4}$	3	$1\frac{1}{4}$	

ภาพประกอบที่ 17

	2.6	1.2	
2.4	1	2.0	2.4
1.4	1.8	2.2	1.4
1.6	2.6	1.2	

ภาพประกอบที่ 18

เริ่มด้วย 1 บวกเพิ่มครั้งละ $\frac{1}{4}$

$$(a = 1, x = \frac{1}{4})$$

เริ่มด้วย 1 บวกเพิ่มครั้งละ 0.2

$$(a = 1, x = 0.2)$$

2. การสร้างจัดเรียงผลบวกที่มีขนาดเป็นพหุคูณของ 4

2.1 การสร้างจัดเรียงผลบวกขนาด 4

ขั้นที่ 1 ใส่จำนวน 1-16 เรียงไปที่ละแถวจนครบดังภาพประกอบที่ 19



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

ภาพประกอบที่ 19

ขั้นที่ 2 แลกเปลี่ยนจำนวนในแนวเส้นทแยงมุมในตำแหน่งที่สมมาตรกัน ส่วนจำนวนอื่น ๆ ไว้ตามเดิม ดังภาพประกอบที่ 20 และ 21

16			13
	11	10	
	7	6	
4			1

ภาพประกอบที่ 20

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

ภาพประกอบที่ 21

ภาพประกอบที่ 21 จะได้จัตุรัสกลขนาด 4 มีผลบวกเท่ากับ 34 ถ้าเราแลกเปลี่ยนจำนวนในสัณฐานที่ 2 กับ 3 จะยังคงได้จัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 34 เรียกว่า จัตุรัสกลของดูเรอร์ (Durer's Magic Square) ดังแสดงในภาพประกอบที่ 22

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

ภาพประกอบที่ 22

2. การสร้างจัตุรัสกลผลบวกที่มีขนาด 8, 12, 16, ...

ในที่นี้จะแสดงการสร้างจัตุรัสกลขนาด 8 ซึ่งมีลำดับขั้นการสร้างดังนี้

ขั้นที่ 1 เมื่อเติมตัวเลขจนครบทุกช่องแล้ว แบ่งจัตุรัสกลออกเป็นขนาด 4 จำนวน 4 รูป ดังภาพประกอบที่ 23



1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	51	62	63	64

ภาพประกอบที่ 23

ขั้นที่ 2 แลกเปลี่ยนจำนวนในแนวเส้นทแยงมุมในตำแหน่งที่สมนัยกัน ส่วนจำนวนอื่น ๆ ไว้ตามเดิม ดังภาพประกอบที่ 25

64							57
	55					50	
		46			43		
			37	36			
			29	28			
		22			19		
	15					10	
8							1

ภาพประกอบที่ 24

ข้อสังเกต

$64+1 = 65 = 55+10 = 46+19 = 37+28 = 65$ และ $57+8 = 43+22 = 36+29 = 65$ เรียกจำนวนในแต่ละคู่ที่มีผลบวกเท่ากับ 65 ว่า เป็นส่วนเติมเต็มซึ่งกันและกัน (complement) เช่น 64 เป็นส่วนเติมเต็มของ 1 และ 46 เป็นส่วนเติมเต็มของ 19 เป็นต้น

ขั้นที่ 3 แลกเปลี่ยนจำนวนซึ่งเป็นส่วนเติมเต็มซึ่งกันและกัน ส่วนจำนวนอื่น ๆ ลงไว้ตามเดิมเช่นเดียวกับการสร้างจัตุรัสกลขนาด 4 จะได้จัตุรัสกลดังภาพประกอบที่ 25



64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

ภาพประกอบที่ 25

ส่วนการสร้างจัตุรัสกลขนาด 12,16, ...ก็ทำเช่นเดียวกัน โดยแบ่งให้เป็นจัตุรัสกลขนาด 4 เช่น จัตุรัสขนาด 12 แบ่งเป็น 9 รูป เป็นต้น แล้วดำเนินการเช่นเดียวกับการสร้างจัตุรัสขนาด 8

เอกสารอ้างอิง

- นวลศรี ชำนาญกิจ. (2547, 1 สิงหาคม). “จัตุรัสกล” วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์,” 1(1): 149.
- Atbinson, Thomas P. (1975, April). “Guided Discovery with Magic Square.” **Arithmetic Teacher**. 22(4): 288-292.
- Bright, George M. (1977, October). “Ideas.” **Arithmetic Teacher**. 51(1): 30-33
- Lott, Johnny W. “Behold! a Magic Square.” (1977, march). **Arithmetic Teacher**. 24(3): 228-229
- Lyon, Clayton Betty. (1990, December). “Creating Magic Square.” **Arithmetic Teacher**. 24(3): 48-52
- McCraine, Judson. (1988, November). “Magic Square of All Orders.” **Mathematics Teacher**. 81(18): 674-678
- Patemo, James. (1989, February). “The Odd-numbered Magic Square.” **Mathematics Teacher**. 82(2): 139-141.
- Pizarro, Antonio. (1989, March). “Generating Magic Squares Whose Orders are Multiples of 4.” **Mathematics Teacher**. 82(2): 216-221.
- Posamentier, Alfreds and Stephen, Jay. (1990). **Teaching Secondary School Mathematics**. New York: Macmillan.
- Will, Herberts III. (1989, April). “Magic with Magic Square.” **Arithmetic Teacher**. 36(8): 44-49.
- Wood, Eric F. (1989, December). More Magic with Magic Squares.” **Arithmetic Teacher**. 36(16): 42-46.

