



## เซตคำตอบของสมการ $x + 3\sqrt{5} = 0$

ไอริน ชุ่มเมืองเย็น\*

หลายคนที่เห็นประโยค  $x + 3\sqrt{5} = 0$  อาจจะนึกถึง  $-3\sqrt{5}$  บางคนก็นึกถึงเรื่องสมการ บางคนอาจนึกถึงประโยคเปิดที่มีตัวแปร  $x$  เด็ก ๆ หรือคนที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์คงถามว่านี่คืออะไร สำหรับบางคนที่มีความทรงจำที่เลวร้ายคงบอกว่า ชาตินี้ไม่ขอเรียนเรื่องนี้อีกเพราะว่ามันยากมาก ๆ บางคนอาจนึกถึงบุญคุณของคุณครูที่ลงท้ายกันหลายทีกจนได้ดิบได้ดีกันในปัจจุบัน บางคนอาจถึงนึกวัยเด็กอันเก่งฉกาจของตนเองที่ตอบปัญหาสมการถูกทุกข้อ สำหรับสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  คงเป็นตัวแทนความทรงจำของหลายคนได้เป็นอย่างดีกับประสบการณ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แม้จะหวานอมขมกลืนกันบ้างหรือจะหวานปานน้ำผึ้งเดือนห้า ก็ตาม

หากอธิบายเกี่ยวกับ ประโยค  $x + 3\sqrt{5} = 0$  นั้น ก่อนอื่นต้องทำความรู้จักกับประโยคคณิตศาสตร์ สมการ คำตอบของสมการ แล้วประโยคคณิตศาสตร์คืออะไร มีลักษณะอย่างไร จะมีหน้าตาเหมือนสับปะรดหรือเปล่า แล้วสมการ คืออะไร และสมการที่เป็นประโยคเปิดจะมีหน้าตาอย่างไร

### ประโยคคณิตศาสตร์

โดยทั่วไปองค์ประกอบหลักของประโยคภาษาจะประกอบด้วย 2 ส่วนใหญ่ๆ คือ ภาคประธาน และภาคแสดง ซึ่งในส่วนของภาคแสดงแบ่งแยกเป็น กริยา และ กรรม ตัวอย่างของประโยคเช่น

| ประโยค             | ภาคประธาน | ภาคแสดง |           |
|--------------------|-----------|---------|-----------|
|                    |           | กริยา   | กรรม      |
| สุชาติคืบหน้าเปล่า | สุชาติ    | คืบ     | หน้าเปล่า |
| มาลีร้องไห้        | มาลี      | ร้องไห้ | -         |
| อิมอ่านหนังสือ     | อิม       | อ่าน    | หนังสือ   |

\* อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์



จากตัวอย่างประโยคภาษาไทย จะเห็นว่าประโยคบางประโยคมีส่วนที่เป็นกรรมของประโยคก็ได้หรืออาจจะไม่มีก็ได้ ประโยคคณิตศาสตร์ มีลักษณะคล้ายกับประโยคภาษาไทยคือมีส่วนที่เป็นภาคประธานและภาคแสดง

ประโยคคณิตศาสตร์ ( Mathematical sentence ) คือ ประโยคที่นำวลีคณิตศาสตร์ 2 วลีมาเชื่อมด้วยเครื่องหมาย  $=$  หรือ  $\neq$  หรือ  $>$  หรือ  $<$  หรือ  $\geq$  หรือ  $\leq$

วลีคณิตศาสตร์ ( Mathematical phrase ) แบ่งเป็น 2 แบบ คือ วลีตัวเลข กับ วลีตัวแปร

วลีตัวเลข เช่น  $2, 2+5, 9 \times 3, \frac{7}{2}, 35-7, 7-13$  ฯลฯ

วลีตัวแปร เช่น  $x, 3x, x-2, x-5, 7-x, x^2, x^3-1$  ฯลฯ

ประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อมวลีตัวเลขกับวลีตัวเลข ตัวอย่าง เช่น

$2+5=7$  เป็นประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อมวลีตัวเลข  $2+5$  กับวลีตัวเลข  $7$  ด้วยเครื่องหมาย “=”

$2 \times 5 > 7$  เป็นประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อมวลีตัวเลข  $2 \times 5$  กับวลีตัวเลข  $7$  ด้วยเครื่องหมาย “>”

$5-2 < 9$  เป็นประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อมวลีตัวเลข  $5-2$  กับวลีตัวเลข  $9$  ด้วยเครื่องหมาย “<”

ประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อมวลีตัวเลขกับวลีตัวแปร ตัวอย่าง เช่น

$x-2 < 3$  เป็นประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อมวลีตัวแปร  $x-2$  กับวลีตัวเลข  $3$  ด้วยเครื่องหมาย “<”

$x+3\sqrt{5}=0$  เป็นประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อมวลีตัวแปร  $x+3\sqrt{5}$  กับวลีตัวเลข  $0$  ด้วยเครื่องหมาย “=”

ประโยคคณิตศาสตร์ แบ่งตามกลุ่มการใช้เครื่องหมาย สามารถแบ่งได้ 2 แบบ คือ กลุ่มที่ใช้เครื่องหมาย = ซึ่งเรียกว่า **สมการ** ส่วนอีกกลุ่มคือ กลุ่มที่ใช้เครื่องหมาย  $\neq$  หรือ  $>$  หรือ  $<$  หรือ  $\geq$  หรือ  $\leq$  ซึ่งเรียกว่า **อสมการ**

ทำไม  $x+3\sqrt{5}=0$  เป็นสมการ ?

สมการ คือ ประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อมวลีคณิตศาสตร์ด้วยเครื่องหมาย “=”

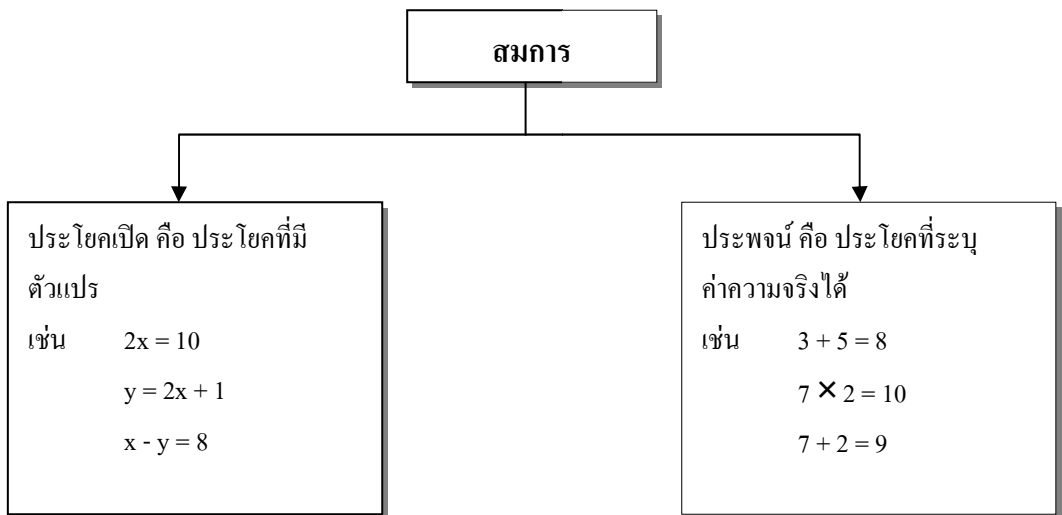
ตัวอย่างเช่น  $2+5=7$   $x-5=10$

$10+8=18$   $x+2=0$

$12-2=10$   $x+x=2x$  เป็นต้น

ด้วยนิยามของสมการทำให้  $x+3\sqrt{5}=0$  เป็นสมการนั่นเอง

เขียนแผนภูมิแสดงส่วนประกอบของสมการดังนี้



แผนภาพแสดงประเภทของสมการ

ข้อพึงระวังในการตีความนิยามสมการ เนื่องจากสมการคือประโยคคณิตศาสตร์ที่เชื่อว่ามีคณิตศาสตร์ 2 วลี ด้วยเครื่องหมาย = บางคนเห็นเครื่องหมาย = อาจเข้าใจผิดว่า สมการคือการเท่ากัน ถ้าจำนวนทั้งสองข้างไม่เท่ากันเช่น  $5 + 8 = 10$  จึงไม่ถูกยอมรับว่าเป็นสมการ เป็นต้น โดยนิยามของสมการนั้นสมการหมายถึง สมการที่เป็นจริง หรือสมการที่เป็นเท็จ หรือสมการที่ยังระบุค่าความจริงไม่ได้ สมการที่มีองค์ประกอบของประโยคเป็นวลีตัวเลขกับวลีตัวเลข เช่น  $2 + 3 = 5$ ,  $7 - 6 = 5$  เป็นประโยคที่บอกได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งในทางตรรกศาสตร์เรียกว่า ประพจน์ และเรียกคำว่า เป็นจริง หรือ เป็นเท็จ ว่าค่าความจริงของประพจน์

ประพจน์  $2 + 3 = 5$  เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง หรือเป็นสมการที่เป็นจริง เพราะ วลีตัวเลข  $2 + 3$  และวลีตัวเลข  $5$  ต่างเป็นวลีตัวเลขที่แทนจำนวนเดียวกัน

ประพจน์  $7 - 6 = 5$  เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ หรือเป็นสมการที่เป็นเท็จ เพราะ วลีตัวเลข  $7 - 6$  และวลีตัวเลข  $5$  ต่างเป็นวลีตัวเลขที่ไม่ได้แทนจำนวนเดียวกัน

ส่วนสมการที่มีองค์ประกอบของประโยคเป็นวลีตัวเลขกับวลีตัวแปร หรือเชื่อมวลีตัวแปรเดียวกัน เช่น  $2x = 10$ ,  $2x + 5 = 15$ ,  $y = 2x + 1$ ,  $x + 1 = 0$ ,  $x + 3\sqrt{5} = 0$  ต่างก็เป็นสมการที่ยังบอกค่าความจริงไม่ได้ เพราะมีตัวแปรอยู่ในประโยค เรียกสมการเหล่านี้ว่าเป็น ประโยคเปิด สมการที่เขียนต่างกัน ถือว่าไม่ใช่สมการเดียวกัน เช่น  $x + 5 = 8$  กับ  $x = 8 - 5$  เพราะถือว่าเป็นสองสมการที่เกิดจากการเชื่อมวลีคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน

คำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  คืออะไร



เราให้ความสนใจกับสมการที่มีตัวแปร หรือ สมการที่เป็นประโยคเปิด เพราะสืบเนื่องมาจากการพยายามแก้โจทย์ปัญหา โดยการเขียนโจทย์ปัญหานั้นๆ ออกมาในรูปของสัญลักษณ์ หรือเป็นประโยคคณิตศาสตร์ เพื่อความสะดวกในการแก้ปัญหา ดังนั้นเมื่อมีสมการจึงต้องหาต่อไปว่าจะต้องแทนที่ตัวแปรด้วยจำนวนใดจึงจะทำให้ประโยคเปิดนั้นกลายเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

**คำตอบของสมการ** คือ จำนวนใดๆ ที่แทนที่ตัวแปรในสมการแล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง

**ตัวแปร** คือ ค่าที่อยู่ใน Replacement set หรือ เอกภพสัมพัทธ์ หรือขอบเขตของตัวแปรที่สามารถนำมาแทนที่ตัวแปรในสมการได้

**พิจารณา** สมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$

เมื่อแทน  $x$  ด้วย 1 จะได้  $1 + 3\sqrt{5} = 0$  เป็นประพจน์ที่เป็นเท็จ ดังนั้น 1 จึงไม่ใช่คำตอบ  $x + 3\sqrt{5} = 0$

เมื่อแทน  $x$  ด้วย 2 จะได้  $1 + 3\sqrt{5} = 0$  เป็นประพจน์ที่เป็นเท็จ ดังนั้น 2 จึงไม่ใช่คำตอบ  $x + 3\sqrt{5} = 0$

เมื่อแทน  $x$  ด้วย 3 จะได้  $1 + 3\sqrt{5} = 0$  เป็นประพจน์ที่เป็นเท็จ ดังนั้น 3 จึงไม่ใช่คำตอบ  $x + 3\sqrt{5} = 0$

เมื่อแทน  $x$  ด้วย  $-3\sqrt{5}$  จะได้  $-3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 0$  เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ดังนั้น  $-3\sqrt{5}$  จึงเป็นคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$

สมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  เป็นสมการที่มี  $x$  เป็นตัวแปร มีเพียง  $-3\sqrt{5}$  เพียงตัวเดียวที่ทำให้ได้ประพจน์ที่เป็นจริง จึงเกิดความเข้าใจผิดๆ ว่า ค่าของ  $x$  มีเพียง  $-3\sqrt{5}$  เท่านั้น แต่จริงๆ แล้วค่าของตัวแปร  $x$  มีได้มากมาย เหมือนตัวอย่างข้างต้น

สมมติเรากำหนดให้  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  เป็นเซตของค่าของตัวแปรในสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  ค่าของตัวแปร  $x$  ก็จะมี 4 จำนวนคือ 1, 2, 3, 4 เมื่อนำไปแทนที่  $x$  ก็จะได้ประพจน์ 4 ประพจน์ดังนี้

$$1 + 3\sqrt{5} = 5 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นเท็จ}$$

$$2 + 3\sqrt{5} = 5 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นเท็จ}$$

$$3 + 3\sqrt{5} = 5 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นเท็จ}$$

$$4 + 3\sqrt{5} = 5 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นเท็จ}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  คือ ไม่มีคำตอบ

คำตอบของสมการอาจจะไม่มีก็ได้ ถ้าหากนำสมาชิกในเซตของค่าของตัวแปรไปแทนที่ตัวแปรในประโยคเปิดจนครบทุกตัวแล้ว ได้ประพจน์ที่เป็นเท็จทั้งหมด กรณีเช่นนี้ ถือว่าสมการนั้นไม่มีคำตอบ เช่น กำหนดให้  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  เป็นเซตของค่าของตัวแปรในสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  จะได้เซตคำตอบของ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  คือ  $\{ \}$  หรือ  $\emptyset$  บางท่านอาจคิดว่า คำตอบของสมการนี้



คือ  $-3\sqrt{5}$  แต่ตามกติกาแล้ว  $-3\sqrt{5}$  ไม่ใช่ค่าของ  $x$  ตามที่กำหนดไว้ หรือ  $-3\sqrt{5}$  ไม่ได้อยู่ในเซต A จึงไม่มีสิทธิ์เป็นคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$

แต่ในกรณีที่เราไม่กำหนด Replacement set ของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  ถือว่า กำหนด Replacement set คือเซตของจำนวนจริง

**คำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  คือ  $\{-3\sqrt{5}\}$   $-3\sqrt{5}$  มาจากไหน?**

คำตอบ  $-3\sqrt{5}$  มาจากไหนนักเรียนหรือครูบางคนเข้าใจว่า  $-3\sqrt{5}$  ที่เป็นคำตอบของสมการนี้ ก็คือ  $-3\sqrt{5}$  ที่อยู่ทางขวามือของ  $x$  เป็น  $-3\sqrt{5}$  ที่มีอยู่แล้วในสมการ จึงต้องย้ายกันอีกครั้งว่าจำนวนที่นำไปแทนที่ตัวแปรนี้ เรียกว่า ค่าของตัวแปร ในทางคณิตศาสตร์นิยมกำหนดเซตขึ้นมาเพื่อเป็นขอบเขตของจำนวนที่เป็นค่าของตัวแปรในแต่ละประโยค เรียกเซตดังกล่าวนี้ว่า Replacement set หรือ เอกภพสัมพัทธ์ ซึ่งเซตของค่าของตัวแปรนั้นจะกำหนดอย่างไรก็ได้ ขึ้นอยู่กับผู้กำหนด หากไม่กำหนดไว้เป็นที่เข้าใจตรงกันว่า เซตดังกล่าวนี้คือ เซตของจำนวนจริง

โดยความหมายของคำตอบของสมการจะต้องเป็นสมาชิกใน Replacement set เท่านั้น เนื่องจากไม่ได้กำหนดไว้ถือว่า Replacement set เป็นจำนวนจริง ทำให้  $-3\sqrt{5}$  มาจากเซตของจำนวนจริงนั่นเอง

และจะมั่นใจได้อย่างไรว่า  $-3\sqrt{5}$  เป็นคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  เราคงต้องนำนิยามคำตอบของสมการมาช่วยอธิบาย ซึ่งคำตอบของสมการคือ จำนวนใดๆที่แทนค่าในสมการเป็นได้ ประพจน์ที่เป็นจริง นั้นหมายความว่า การจะสรุปว่าเป็นคำตอบต้องมีการตรวจสอบโดยการแทนค่าเสียก่อน ทั้งนี้จะแสดงโดยการเขียนให้ดูหรือไม่ก็ได้ อาจจะคิดในใจก็ได้

มีประเด็นหนึ่งที่น่าสนใจก็คือ ในขั้นตอนของการตรวจสอบคำตอบนั้น เมื่อนำ  $-3\sqrt{5}$  แทนที่ในสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  จะได้  $-3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 0$  เป็นจริง ซึ่งน่าจะจบลงตรงนี้ได้เพราะเนื่องจาก  $-3\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$  กับ 0 แทนจำนวนเดียวกันอยู่แล้ว แต่ก็ไม่ผิดหากจะทำไปจนถึง  $0 = 0$

ในการแทนที่ตัวแปรในสมการเกือบทุกกรณีจะได้สมการที่เป็นจริง ด้วยเหตุนี้ทำให้เข้าใจผิดว่าเมื่อแทนที่ตัวแปรในสมการ  $-3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 0$  เป็นจริง เป็นเพียงกระบวนการเพื่อให้ครบพิธีเท่านั้น การตรวจสอบคำตอบของสมการเป็นเรื่องที่ต้องทำอย่างจริงจัง เพื่อช่วยให้เด็กรู้จักการตรวจสอบผลงานของตนเอง

**เขียนเซตคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  คือ  $\{x \mid x + 3\sqrt{5} = 0\}$  ได้หรือไม่?**

การเขียนเซตคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  คือ  $\{x \mid x + 3\sqrt{5} = 0\}$  สามารถเขียนได้ เพราะไม่ผิดหลักการเขียน นอกจากนี้ยังสามารถเขียนได้อีกหลายแบบเช่น



$$R = \{ x \mid x + 3\sqrt{5} = 0 \} \quad \text{เมื่อ } R \text{ คือ เซตคำตอบของสมการ } x + 3\sqrt{5} = 0$$

$$R = \{ x \mid x = -3\sqrt{5} \}$$

$$R = \{ -3\sqrt{5} \}$$

### สมการเชิงเส้น

สมการที่มีตัวแปรตัวเดียวและตัวแปรนั้นมีเลขชี้กำลังเป็น 1 เรียกว่า สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การพิจารณาว่าประโยคคณิตศาสตร์นั้นมีตัวแปรกี่ตัว จะดูเฉพาะรูปประโยคที่มองเห็นคงไม่พอ เพราะประโยคเปิดประโยคหนึ่งอาจมีหลายความหมาย เช่น

ประโยคเปิด  $x + 3\sqrt{5} = 0$

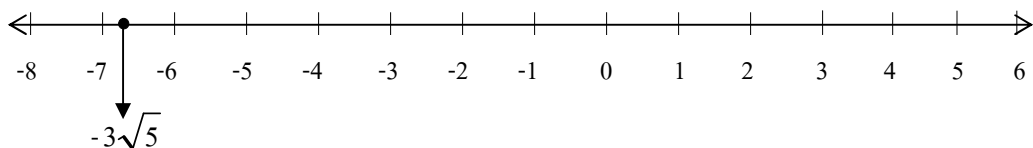
อาจเขียนเป็น  $x + (0)y + 3\sqrt{5} = 0$  หรือ

$$x + (0)y + (0)z + 3\sqrt{5} = 0 \quad \text{หรือ...}$$

ดังนั้นการดูว่าประโยคเปิดใดๆมีกี่ตัวแปรจึงต้องดูจาก Replacement set หรือเซตของค่าของตัวแปรที่กำหนดให้หรือดูจากตัวแปรที่ใช้ในการเขียนเซตคำตอบแบบบอกเงื่อนไข เช่น  $\{ x \mid \dots \}$  อ่านว่า เซตของ  $x$  โดยที่  $\dots$  นั้นหมายถึง  $x$  เป็นตัวแปร คำว่า โดยที่... คือเงื่อนไขของตัวแปร  $x$  หากไม่กำหนด Replacement set ให้ถือว่าประโยคเปิดนั้นๆมีตัวแปรเดียว ด้วยเหตุนี้ การเขียน  $x + 3\sqrt{5} = 0$  มักจะเข้าใจตรงกันว่าเป็นประโยคเปิดที่มีตัวแปรเดียว

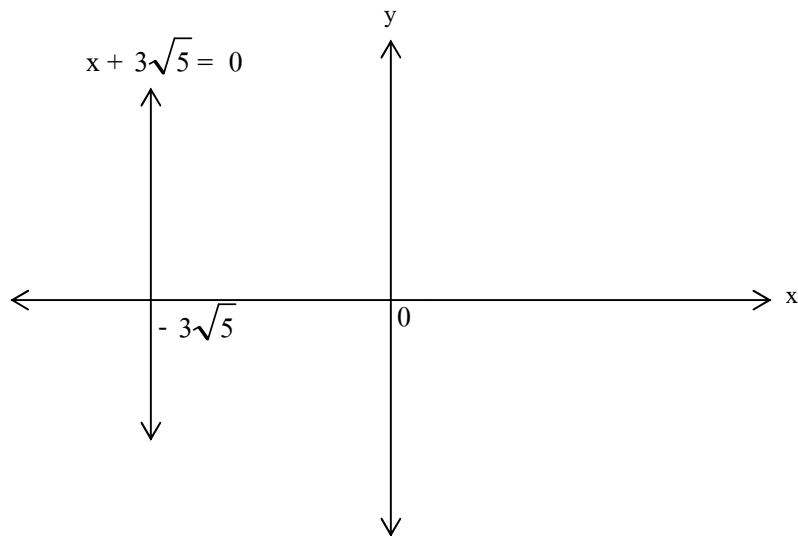
### กราฟคำตอบของสมการเชิงเส้น เป็นเส้นตรงใช่หรือไม่ ?

กรณีค่าของตัวแปรเป็นสับเซตของจำนวนจริง นิยมแสดงคำตอบของสมการที่เป็นประโยคเปิดด้วยจุดบนเส้นจำนวนจริง เราจะเขียนกราฟแสดงคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  ได้โดยประมาณเพราะเนื่องจาก  $-3\sqrt{5}$  เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่ง  $-3\sqrt{5} = -6.708203931\dots$  หากแสดงค่านี้บนเส้นจำนวนคงสร้างความยุ่งยากมาก แต่ก็ไม่ได้หมายความว่าแสดงไม่ได้ เราอาจอาศัยวิธีการของพิทาโกรัส ซึ่งต้องศึกษาในลำดับต่อไป กราฟคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  คือ  $\{ x \mid x = -3\sqrt{5} \}$  เขียนดังนี้





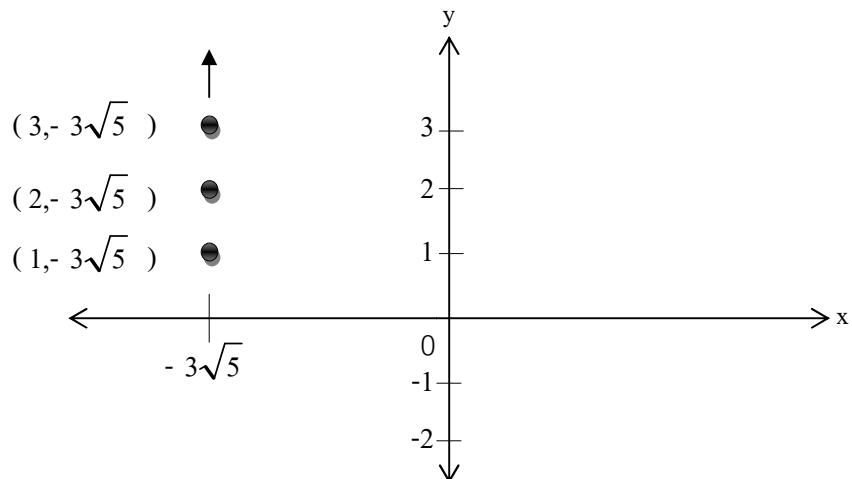
การเขียนกราฟคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  ที่มีเซตคำตอบ คือ  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + 3\sqrt{5} = 0\}$  เขียนได้ดังนี้



การเขียนกราฟคำตอบของสมการ  $x + 3\sqrt{5} = 0$  กำหนด  $y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

ที่มีเซตคำตอบคือ  $\{(x,y) \mid x + 3\sqrt{5} = 0\}$

หรือ  $\{(1, -3\sqrt{5}), (2, -3\sqrt{5}), (3, -3\sqrt{5}), (4, -3\sqrt{5}), \dots\}$  เขียนได้ดังนี้



จากการเขียนกราฟคำตอบของสมการเชิงเส้นข้างต้น จะเห็นว่ากราฟของเซตคำตอบไม่จำเป็นต้องเป็นเส้นตรงเสมอไป ขึ้นอยู่กับ Replacement set และเซตคำตอบของสมการเชิงเส้นดังกล่าว อาจเป็นจุด ดังกราฟข้างต้น

\*\*\*\*\*



## เอกสารอ้างอิง

สุนทร ชนะกอก . คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับครูมัธยม . มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ , 2528 .

สุนทร ชนะกอก . สมการที่ไม่เท่ากัน . งานส่งเสริมการวิจัยและตำรา มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ , 2536 .

สุนทร ชนะกอก . ครูคณิตศาสตร์กับประโยชน์คณิตศาสตร์ . ชุดคณิตศาสตร์ศึกษาสำหรับครู ชุดที่ 2  
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ , 2543 .

\*\*\*\*\*