



วารสารวิชาการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กำเนิดเซต

ไอริน ชุ่มเมืองเย็น*

เมื่อราว ๆ 200 ปีที่ผ่านมา มีนักคณิตศาสตร์ชื่อว่า เกออร์ คันเตอร์ (George Cantor) หรือ Georg Cantor (จอร์จ แคนเตอร์) มีชื่อเต็มว่า Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor เกิดวันที่ 3 มีนาคม ค.ศ. 1845 มีพ่อเป็นชาวเดนมาร์ก แม่เป็นชาวรัสเซีย เกิดที่กรุงเซนต์ปีเตอส์เบิร์ก (St Petersburg) ประเทศรัสเซีย ซึ่งในปัจจุบันกรุงเซนต์ปีเตอส์เบิร์ก (St Petersburg) นั้นเป็นเมืองหลวงของประเทศมีความเจริญและมั่งคั่งมากดังภาพที่ 1 ศูนย์วิจัยเศรษฐกิจธุรกิจจัดอันดับรัสเซียเป็นเศรษฐกิจใหญ่ที่สุดอันดับที่ 9 ของโลกใน พ.ศ. 2554 ความเจริญก้าวหน้าอาจเนื่องมาจากการที่รัสเซียมีนักคิดและนักวิทยาศาสตร์ที่เก่ง



ภาพที่ 1 กรุงเซนต์ปีเตอส์เบิร์ก

คันเตอร์มีแววเก่งและสนใจคณิตศาสตร์แต่เด็ก คันเตอร์จบปริญญาเอกในปี พ.ศ. 2410 อายุได้ 22 ปี เขาทำวิทยานิพนธ์เกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนโดยหาคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $Ax^2 + by^2 + cx^2 = 0$ เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนเต็ม คันเตอร์ ดังภาพที่ 2 เป็นผู้ที่มีผลงานโดดเด่นเกี่ยวกับทฤษฎีเซต ซึ่งเขาค้นพบโดยบังเอิญจากการที่ได้คิดเกี่ยวกับอนุกรมตรีโกณมิติ จากผลงานในเรื่องการแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมตรีโกณมิติที่เป็น

*อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์

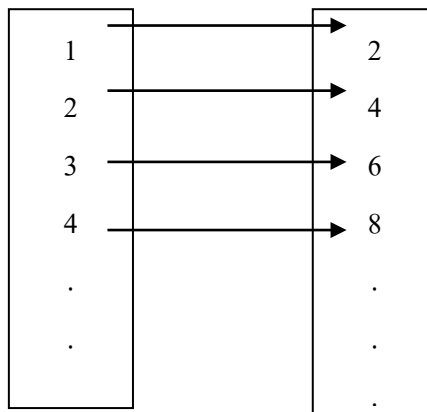
เอกลักษณ์ (Unique representation of function by means of trigonometric series) ซึ่งเป็นภาคขยายของอนุกรมฟูรีเย ทั้งนี้ทำให้คันเตอร์ค้นพบคุณสมบัติของเซต ชั้นแรกคันเตอร์ได้ค้นพบคุณสมบัติของเซตในแง่หนึ่งของจำนวนจริงซึ่งเกี่ยวกับอนุกรมลู่เข้า (Convergence of series) จากจุดนี้เองที่ทำให้ คันเตอร์มีความเข้าใจอย่างรวดเร็วที่จะประยุกต์ความคิดต่อไปเรื่อย จนทำให้เกิดคุณสมบัติทั่วไปเกี่ยวกับเซต เขาได้ใช้ปัญหาที่เป็นรูปธรรมซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นไปสู่ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีเซต



ภาพที่ 2 เกออร์ คันเตอร์ (George Cantor)

คันเตอร์เป็นคนแรกที่เริ่มต้นจัดระบบทฤษฎีเซต การศึกษาเซตที่เรียนกันมาเป็นคำที่เป็นอนิยามแต่สามารถเข้าใจกันง่ายว่า หมายถึงกลุ่มของอะไรสักอย่างซึ่งจะเป็นกลุ่มที่มีสมาชิกหรือไม่มีสมาชิกก็ได้ เช่น เซตว่างคือกลุ่มที่ไม่มีอะไรอยู่เลย ถ้าเป็นเซตของคน ก็หมายถึงกลุ่มของคนที่อยู่บนโลกนี้ เซตของจำนวนนับ ก็หมายถึงกลุ่มของตัวเลขที่ใช้แทนจำนวน ซึ่งก็พอจะเข้าใจความหมายของเซตกันอยู่บ้าง แต่คันเตอร์คิดว่ากลุ่มสองกลุ่มจะเท่ากันได้ เราก็จะต้องสามารถเอาสมาชิกของทั้งสองกลุ่มมาจับคู่กันได้ ไม่มีขาด ไม่มีเกิน โดยสมาชิกตัวหนึ่งไปจับสองหรือสามตัว แบบนี้ไม่ได้ คันเตอร์แสดงให้เห็นว่าเซตที่มีจำนวนสมาชิกเป็นอนันต์ มีคุณสมบัติแปลก ๆ เช่น ส่วนหนึ่งของเซตบางเซตอาจจะมีจำนวนสมาชิก เท่ากับจำนวนสมาชิกของเซตนั้นทั้งหมด เช่น เซตของจำนวนคู่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับเซตของจำนวนนับทั้งหมด คันเตอร์จับคู่สมาชิกให้เห็น โดย 1 จับคู่กับ 2 และ 2 จับคู่กับ 4 ซึ่งกล่าวคือ ถ้าเป็น

a ใด ๆ ก็ไปจับคู่กับ $2a$ ได้ตามเงื่อนไขที่ได้กล่าวมาในเบื้องต้น ดังนั้นสองเซตนี้จึงมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน ดังนี้



ในปี ค.ศ. 1874 คันทอร์ได้มีผลงานตีพิมพ์เกี่ยวกับเซตอนันต์ ซึ่งเป็นแนวคิดแปลกใหม่ในวิชาคณิตศาสตร์ ในวารสารเครลเล (Crelle) คันทอร์ใช้เซตอนันต์ที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุดเป็นจำนวนธรรมชาติ ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับคำว่า “อนันต์” ในคณิตศาสตร์อยู่นานและได้เกิดความกระจ่างเมื่อมีบทความเกี่ยวกับ ข้อความขัดแย้งกันแต่จริง (Paradox) ของซีโนของอีเลีย (Zeno of Elea) ดังนี้ การแบ่งช่วงของหนึ่งหน่วย ออกเป็นช่วงย่อยคือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ แต่ละช่วงย่อยไม่มีจำนวนที่เล็กที่สุด สามารถแบ่งได้เรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด และช่วงย่อยมีค่าจำกัดโดยมีความยาวไม่เป็นศูนย์ จึงเป็นผลทำให้เกิดข้อขัดแย้งกันที่ว่า ความยาวที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์มีจำนวนเป็นอนันต์ค่า แต่เมื่อรวมความยาวเหล่านั้นเข้าด้วยกันจะเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่ง นักคณิตศาสตร์สาขาบริสุทธิ์ได้ให้ความแตกต่างของการเป็นอนันต์ที่เป็นจริงเชิงปฏิบัติกับเสมือนจริงไว้ คือ การเป็นอนันต์ที่เป็นจริงเชิงปฏิบัติจะมีสมาชิกที่เกิดขึ้นในเวลาเดียวกันมากมาย แต่การเป็นอนันต์เสมือนจริงจะใช้สมาชิกในปริมาณจำกัดที่กำหนดให้ ดังนั้น การเป็นอนันต์เสมือนจริงจึงสามารถยอมรับนำมาใช้ได้ แต่ในขณะที่การเป็นอนันต์ที่เป็นจริงถูกห้ามนำมาใช้

ต่อมาคันทอร์ได้พบ เดเดคินด์ (Dedekind) ซึ่งได้ริเริ่มแนวคิดใหม่เกี่ยวกับ ระบบจำนวนจริง ผลงานชิ้นเยี่ยมของนักคณิตศาสตร์สองท่านนี้ในขั้นแรกไม่เป็นที่ยอมรับของนักคณิตศาสตร์โด่งดังในสมัยนั้น ในช่วงหลังนี้ผลงานของเขาทั้งสองเป็นที่ยอมรับกันทั่วไป และเป็นพื้นฐานในวิชาคณิตศาสตร์ โดยได้ขยายขอบเขตของทฤษฎีเซตให้ครอบคลุมแนวคิดของ

จำนวนเชิงอนันต์ (transfinite or infinite numbers) จำนวนเชิงการนับ และ จำนวนเชิงอันดับที่ บทนิยามพื้นฐานในเรื่อง จำนวนคาร์ดินัล (Cardinal number) ของคันทอร์ คือการเทียบเท่าโดยให้บทนิยามดังนี้

บทนิยาม 1 เซต A เทียบเท่า (equivalent) กับเซต B ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

ถ้า $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b,c\}$ ให้ $f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปทั่วถึง B ดังนั้น A เทียบเท่า B

บทนิยาม 2 ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ $N_k = \{1,2,3,\dots,k\}$ เซต A จะเป็นเซตจำกัดก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตว่าง หรือ A เทียบเท่า N_k ถ้า A ไม่เป็นเซตจำกัด เรียก A ว่า เป็นเซตอนันต์

หลังจากนี้คันทอร์ได้พัฒนา เซตคันทอร์ (denumerable) และ เซตนอนคันทอร์ (non-denumerable) และได้กำหนดนิยามไว้ดังนี้

บทนิยาม 3 ให้ A เป็นเซต A จะเป็น เซตคันทอร์ ก็ต่อเมื่อ A เทียบเท่าเซตของจำนวนเต็มบวก

A จะเป็นเซตนับได้ (Countable) ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตจำกัด หรือ เซตคันทอร์

A จะเป็น เซตนอนคันทอร์ หรือ เซตนับไม่ได้ (uncountable set) ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตอนันต์ และ A ไม่เทียบเท่าเซตของจำนวนเต็มบวก

คันทอร์ให้จำนวนคาร์ดินัลของเซตของจำนวนเต็มบวกเท่ากับ $\aleph_0$ อ่านว่า อาเลฟนัล (aleph-null) aleph เป็นตัวอักษรในภาษาฮีบรู (ภาษาของชาวยิว) และ null หมายถึง ไม่มีอะไร หรือ ศูนย์ เขาพิสูจน์ว่า เซตของจำนวนเต็ม และเซตของจำนวนตรรกยะต่างก็มีจำนวนคาร์ดินัล เท่ากับ $\aleph_0$ แต่เซตของจำนวนจริงมีจำนวนคาร์ดินัลไม่เท่ากับ $\aleph_0$ โดยที่เขาให้จำนวนคาร์ดินัลของเซตของจำนวนจริงเท่ากับ c นั่นคือ เขาพิสูจน์ว่าอย่างน้อยมีจำนวนอนันต์อยู่ 2 ชนิด คือ $\aleph_0$ และ c

งานของคันทอร์มีความลึกลับมาก และมีหลายสิ่งหลายอย่างที่ดูเิน ๆ แล้วขัดกับสามัญสำนึก จึงเป็นที่ถกเถียงกันแม้แต่ในกลุ่มนักคณิตศาสตร์ด้วยกันเอง เรื่องความขัดแย้งกันในทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบันมักถูกคลี่คลายลงได้ เพราะคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่

จะต้องพิสูจน์กันโดยหลักตรรกศาสตร์จึงไม่ค่อยมีปัญหา งานของคันทอร์ได้รับการยกย่องว่าเป็นงานที่สร้างสรรค์และส่งผลกระทบในวงกว้างที่สุดให้กับวงการคณิตศาสตร์ตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน ทฤษฎีเซตทำให้เกิดคณิตศาสตร์สมัยใหม่ซึ่งมีความเป็นนามธรรมมากขึ้นและต้องอาศัยการพิสูจน์

ในช่วงปี ค.ศ. 1879 - ค.ศ. 1884 คันทอร์ได้ตีพิมพ์ผลงานที่สำคัญต่อการพัฒนา **ทฤษฎีเซต** ถึงหกฉบับลงในวารสาร Mathematische Annalen แต่ถูกนักคณิตศาสตร์บางคนในสมัยนั้นต่อต้าน เพราะมีแนวคิดที่แปลกใหม่จนเกินไป การโจมตีผลงานของคันทอร์ได้ส่งผลกระทบทางจิตใจของคันทอร์ในเวลาต่อมา หลังจากเขาสิ้นชีวิตแล้ว ได้พบปัญหาต่าง ๆ เกี่ยวกับการพัฒนาเซตของเขาโดยบูราลีฟอร์ติ (Burali-Forti) ในปี ค.ศ. 1897 รัสเซลล์ (Russell) ในปี ค.ศ. 1908 ฯลฯ ต่อมาจึงมีการพัฒนาทฤษฎีเซตเชิงสัจพจน์ ขึ้นเพื่อขจัดปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น แนวทางที่พัฒนาที่มีชื่อเสียงมากได้แก่แนวทางของ แอร์นสต์ เซร์เมโล (Ernst Zermelo) ในปี ค.ศ. 1874-1953 และของ จอห์น ฟอน นอยมันน์ (John von Neumann) ในปี ค.ศ. 1903-1957 แนวทางของเซร์เมโลปรับเปลี่ยนสัจพจน์การกำหนดเซต (axiom of abstraction) เป็นสัจพจน์การกำหนดสับเซต (axiom of selection) ซึ่งก่อให้เกิดเอกภพสัมพัทธ์ ส่วนแนวทางของ ฟอน นอยมันน์ นั้น ให้คลาส (Class) เป็นนิยามและให้เซตเป็นคำที่นิยามแบ่งคลาสเป็น 2 ชนิด ซึ่งได้แก่คลาสที่เป็นสมาชิกของคลาสอื่น เรียกว่า เซต และคลาสที่ไม่เป็นสมาชิกของคลาสอื่นเรียกว่า คลาสแท้

การเกิดข้อความแย้งกันแต่จริง หรือที่เรียกกันว่าพาราดอกซ์ (Paradox) ซึ่งแบ่งออกเป็นสองชนิด คือ ข้อความขัดแย้งกันแต่จริงทางตรรกศาสตร์ (Logical Paradox) และ ข้อความแย้งกันแต่จริงทางภาษา (Semantic Paradox) ปัญหาการเกิดพาราดอกซ์นี้เองทำให้เกิดความเคลื่อนไหวต่าง ๆ ในต้นศตวรรษที่ 20 และได้พัฒนาไปสู่การทบทวนรากฐานของทฤษฎีเซต หัวข้อที่เป็นหัวใจสำคัญที่เกี่ยวเนื่องกับการเกิดเซต คุณสมบัติอะไรที่เป็นตัวกำหนดในการนิยามเซตได้ เงื่อนไขอะไรบ้างที่จะเป็นคุณสมบัติที่จะใช้นิยามเซต และจะอย่างไรที่จะสร้างเซตใหม่จากเซตที่มีอยู่ จากปัญหาเหล่านี้ทำให้มีการจัดระบบของเซตใหม่ให้บริบูรณ์ และนำไปใช้ได้โดยไม่มีข้อโต้แย้ง ในที่สุดจึงมีการจัดทำทฤษฎีเซตเป็นระบบสัจพจน์โดยอาศัยตรรกศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ การศึกษาเกี่ยวกับเซตในปัจจุบันมักจะแฝงไว้ในการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ทั่วไปตั้งแต่ระดับประถมแต่มีความชัดเจนเป็นหัวข้อหลักสำคัญในระดับมัธยม

ตอนปลาย เรื่องเซต ทั้งนี้การเรียนให้เข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีเซตที่มีความเป็นนามธรรมนั้น ผู้เรียนต้องได้รับความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์ซึ่งเป็นพื้นฐานและหลักของการพิสูจน์ทฤษฎีต่างๆ เป็นสำคัญ

รายการอ้างอิง

- พวงทอง พร้อมไท. (2542). **ทฤษฎีเซตระบบสัจพจน์**. เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่
ภาวนา ผ่าน้อย. (ม.ป.ป). **ทฤษฎีเซตเบื้องต้น**. บุรีรัมย์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิชา
วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีวิทยาลัยครู
สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. (2523). **ทฤษฎีเซตเบื้องต้น** . กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนคริน
ทรวิโรฒ บางเขน.
- วรารณณ์ สุขสุขะโน. (2555). **เกออร์ก คันทอร์ Georg Cantor**. (Online). Available: [http://
teacher.aru.ac.th/waraporn/images/stories/pdf/cantor.pdf](http://teacher.aru.ac.th/waraporn/images/stories/pdf/cantor.pdf) (1 เมษายน 2555) **วิกิพีเดีย**
สารานุกรมเสรี. (2555). **เกออร์ก คันทอร์**. (Online). Available: [http://
th.wikipedia.org/wiki](http://th.wikipedia.org/wiki)
(22 พฤษภาคม 2555)
- ทฤษฎีเซต**. (2554). (ออนไลน์). แหล่งที่มา: [http://english-math.blogspot.com/2011/08/blog-
post.html](http://english-math.blogspot.com/2011/08/blog-post.html) (25 พฤษภาคม 2555)