รูบิคตัวเลขจัตุรัสกล

Rubik's Magic Square Number

ทิพวรรณ พุทธสนธิพจน์, สิรวิชญ์ แก้วเกิด, ภาณุพงศ์ เอี่ยมวงษา, ศศิธร อุดปิน*

Tippawan Puttasontiphot, Sirawich Kaewkead, Phanuphong Aiemwongsa, Sasithorn Udpin*

ภาควิชาวิทยาการคำนวณและเทคโนโลยีดิจิทัล มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน

Department of Computational Science and Digital Technology, Faculty of Liberal Arts and Science, Kasetsart University Kamphaeng Saen Campus

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูบิคต้นแบบขนาด 3×3 ที่ประยุกต์ใช้แนวคิดจัตุรัสกลแทนการใช้สีแบบรูบิคทั่วไป โดยผู้วิจัยได้ออกแบบรูบิคที่แต่ละด้านประกอบด้วยตัวเลขซึ่งจัดเรียงเป็นจัตุรัสกลที่มีค่าผลรวมแตกต่างกัน ได้แก่ 12, 21, 30, 39, 48 และ 57 การเล่นยังคงใช้หลักการหมุนแบบเดียวกับรูบิคดั้งเดิม แต่ต้องอาศัยการคิดคำนวณเชิงตรรกะเพื่อวางตำแหน่งตัวเลขให้ตรงตามเงื่อนไขของจัตุรัสกล รูบิคมหัศจรรย์นี้จึงเป็นเครื่องมือฝึกทักษะคณิตศาสตร์ที่ช่วยเสริมสร้างการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ

คำสำคัญ: รูบิค จัตุรัสกล เกมคณิตศาสตร์ การกำจัดแบบเกาส์เซียน นวัตกรรมการเรียนรู้

Abstract

This study aims to develop a prototype 3×3 Rubik's Cube that incorporates the mathematical concept of magic squares in place of traditional colored faces. Each face of the cube is designed to display a unique magic square with distinct magic constants: 12, 21, 30, 39, 48, and 57. Although the cube retains the standard rotational mechanics of a conventional Rubik's Cube, players must apply mathematical reasoning and logical thinking to arrange the numbers correctly according to the magic square rules. The Magic Rubik serves as an innovative educational tool that enhances analytical thinking, problem-solving, and mathematical skills.

Keywords: Rubik's Cube, Magic Square, Mathematical Game, Gaussian Elimination, Educational Innovation

** Corresponding author : Sasithorn.u@ku.th*

Received: 30 มิ.ย. 68; Revised: 24 ก.ย. 68; Accepted: 13 พ.ย. 68

1. บทนำ

การเรียนรู้คณิตศาสตร์มักถูกมองว่าเป็นเรื่องยากและเต็มไปด้วยความซับซ้อน โดยเฉพาะในกลุ่มผู้เรียนที่ขาดแรงจูงใจหรือประสบการณ์เชิงบวกกับเนื้อหา การพัฒนาสื่อการเรียนรู้ที่ช่วยลดความตึงเครียด และเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะผ่านกิจกรรมที่สนุกสนานจึงเป็นแนวทางที่น่าสนใจอย่างยิ่ง หนึ่งในวิธีที่ได้รับการพิสูจน์แล้วว่ามีประสิทธิภาพคือ “เกมทางคณิตศาสตร์” ซึ่งเป็นกิจกรรมที่บูรณาการทั้งความคิดสร้างสรรค์ การคิดวิเคราะห์ และการแก้ปัญหาไว้ในกระบวนการเดียวกัน

Michael (2007) ได้กล่าวถึง เออร์โน รูบิค (1974) ศาสตราจารย์ด้านสถาปัตยกรรมจากประเทศฮังการี ได้ศึกษารูบิค (Rubik's Cube) ของเล่นลับสมอง เดิมทีรูบิคถูกออกแบบขึ้นเพื่ออธิบายแนวคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตสามมิติ แต่กลับได้รับความนิยมแพร่หลายทั่วโลกอย่างรวดเร็ว โดยเฉพาะในหมู่เยาวชนและนักเรียนที่มองว่ารูบิคคือความท้าทายเชิงปัญญาอย่างแท้จริง ด้วยโครงสร้างที่สามารถบิดหมุนได้หลากหลายและเป้าหมายในการจัดเรียงสีให้ตรงกันทั้งหกด้าน รูบิคจึงกลายเป็นตัวแทนของเกมฝึกสมองที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางทั้งในแวดวงการศึกษาและการแข่งขันระดับโลก

แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีรากฐานยาวนานอย่าง “จัตุรัสกล” (Magic Square) ก็มีความน่าสนใจในตัวเองไม่แพ้กัน โดยเป็นการจัดวางตัวเลขลงในตารางสี่เหลี่ยมให้ผลรวมของแต่ละแถว คอลัมน์ และแนวทแยงมีค่าเท่ากัน ซึ่งไม่เพียงแต่สะท้อนหลักตรรกะทางคณิตศาสตร์ แต่ยังแสดงให้เห็นถึงความงดงามของรูปแบบและความสมดุลที่สามารถเกิดขึ้นได้จากตัวเลขธรรมดา ๆ หากจัดเรียงอย่างมีแบบแผน

Cammann (1960) ได้กล่าวถึงจัตุรัสกลที่เริ่มมีการคิดค้นมาตั้งแต่อดีต ในประเทศจีนช่วงประมาณ 650 ปีก่อนคริสต์ศักราชได้ค้นพบว่า จัตุรัสกลอันดับสามมีเพียงรูปแบบเดียว เรียกว่า จัตุรัสกลลั่วซู (Lo Shu Magic Square) โดยมีเพียงหนึ่งรูปแบบมาตรฐาน ซึ่งมีคุณสมบัติว่าผลรวมของแต่ละแถว คอลัมน์ และแนวทแยงมีค่าเท่ากับ 15

Tyler (2024) ได้กล่าวถึงการศึกษาการหาจำนวนรูปแบบคำตอบที่แตกต่างกันของจัตุรัสกลขนาด 4×4 โดยที่รูปแบบคำตอบที่แตกต่างโดยนับได้ทั้งหมด 880 รูปแบบ จะไม่นับรูปแบบที่เกิดจากการหมุน และการสะท้อน ซึ่งยังไม่มีสูตรในการหาคำตอบที่ตายตัว จากข้อมูลดังกล่าวเราสามารถรู้จำนวนรูปแบบของจัตุรัสกลที่แตกต่างกันของจำนวนอันดับ $n = 1, 2, 3, 4$ และ 5 ดังนี้ $1, 0, 1, 880$ และ $275, 305, 224$ แบบ ตามลำดับ

Tomba (2012) ได้ศึกษาถึง เทคนิคในการสร้างจัตุรัสกลขนาด $n \times n$ (เมื่อ n เป็นจำนวนคี่) โดยใช้จัตุรัสละตินพื้นฐานผ่านการกำหนดตำแหน่งแกนกลาง (Pivot Element) และจัดเรียงตัวเลขอื่น ๆ อย่างเป็นระบบ

รูบิคขนาด 3×3 ที่พบเห็นทั่วไปมีทั้งแบบสี และแบบใช้ตัวเลขเชิงซูโดกุ ซึ่งใช้ตัวเลข 1–9 โดยแต่ละด้านต้องไม่มีตัวเลขซ้ำกัน โดยแบบหลังมักใช้ จัตุรัสกล ซึ่งจัดวางตัวเลขให้มีค่าผลรวมเท่ากันในทุกแถว ทุกคอลัมน์ และเส้นทแยงมุม เช่น รูปแบบค่ากล 15 ซึ่งเป็นค่ากลของจัตุรัสกลอันดับสามที่เป็นที่รู้จักมากที่สุด

ด้วยแนวคิดดังกล่าว ผู้วิจัยจึงเห็นโอกาสในการต่อยอดรูบิคจากของเล่นเชิงสีและเชิงซูโดกุ ไปสู่การพัฒนารูบิคที่ผสมผสานกับแนวคิดของจัตุรัสกล โดยกำหนดให้แต่ละด้านของรูบิคมีค่ากลแตกต่างกัน เช่น 12, 21, 30, 39, 48 และ 57 ซึ่งต้องอาศัยการคิดเชิงคณิตศาสตร์และการวางแผนตำแหน่งตัวเลขอย่างมีตรรกะ เพื่อให้ได้ผลรวมตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในแต่ละด้าน

รูบิคมหัศจรรย์จึงไม่ใช่เพียงของเล่นลับสมองธรรมดา หากแต่เป็นสื่อการเรียนรู้เชิงนวัตกรรมที่รวมเอาทักษะด้านเรขาคณิต ตรรกศาสตร์ และการวางแผนมารวมไว้ในอุปกรณ์เพียงชิ้นเดียว งานวิจัยชิ้นนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษากระบวนการออกแบบ พัฒนา และวิเคราะห์ศักยภาพของรูบิคต้นแบบดังกล่าวในการส่งเสริมกระบวนการคิดวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ของผู้เล่น และเสนอแนวทางใหม่ของการบูรณาการเกมกับการเรียนรู้เชิงวิชาการ

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อออกแบบและพัฒนารูบิคต้นแบบขนาด 3×3 ที่ใช้ตัวเลขแทนสี โดยจัดเรียงให้แต่ละด้านเป็นจัตุรัสกลที่มีค่าผลรวมแตกต่างกัน

3. วิธีดำเนินการวิจัย

ศึกษาความรู้พื้นฐานดังต่อไปนี้

(1) เมทริกซ์

บทนิยาม 1 สุรัตนา (2560) ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก เมทริกซ์มิติ $(m \times n)$ หมายถึง กลุ่มของจำนวนจริง (หรือจำนวนเชิงซ้อน) ชุดหนึ่ง ซึ่งเรียงกัน m แถว (Row) แถวละ n หลัก (Column) โดยจัดเรียงให้อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ [ ] หรือ ( ) ซึ่งเครื่องหมายวงเล็บนี้เขียนให้คลุมจำนวนที่อยู่ข้างใน และเรียกแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ว่าเป็นสมาชิกของเมทริกซ์

ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ โดยที่มี a_{ij} เป็นสมาชิก เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ แทนเมทริกซ์ที่กล่าวนี้ด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรือใช้สัญลักษณ์โดยย่อเป็น $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ โดยที่แทนสมาชิกที่อยู่ในแถว i และหลักที่ j ของเมทริกซ์

บทนิยาม 2 สุรัตนา (2560) ให้ $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ โดยที่ $a_{ij} = 0$ ทุกค่า $i > j$ เรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ให้ $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ ถ้า $b_{ij} = 0$ ทุกค่า $i < j$ เรียก B ว่าเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix)

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ให้ $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ ถ้า C เป็นทั้งเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนและเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง นั่นคือ $c_{ij} = 0$ ทุกค่า $i > j$ และ $i < j$ เรียก C ว่าเป็นเมทริกซ์ทแยง (Diagonal Matrix)

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และมีตัวแปร n ตัว ต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & \dots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \tag{1}$$

ซึ่งเราสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

หรือ $AX = B$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เรียกเมทริกซ์ A ว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient Matrix)

(3) จัตุรัสกล

บทนิยาม 4 Emanuele (2009) จัตุรัสกลลำดับ n หมายถึงตารางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $n\times n$ ที่มีเลขทั้งหมด n^2 โดยมีคุณสมบัติสำคัญคือ ผลบวกของตัวเลขในแต่ละแถว แต่ละคอลัมน์ และแนวทแยงทั้งสองเส้นมีค่าเท่ากัน ค่าคงตัวที่ได้จากการบวกนี้เรียกว่าค่ากล (Magic Constant หรือ Magic Sum) ค่ากลที่ได้คือ $M=\frac{n(n^2+1)}{2}$

(4) การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

ถ้าแทนค่า $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots, x_n = s_n$ ลงในแต่ละสมการของระบบสมการเชิงเส้น แล้ว $s_1, s_2, \ldots, s_n$ สอดคล้องกับทุกสมการ หรือทำให้ทุกสมการเป็นจริง

จะได้ว่า $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots, x_n = s_n$ เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

วิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร

จากระบบสมการเชิงเส้นเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ $AX = B$ ถ้า $|A| \neq 0$ แล้วเราจะแก้ระบบสมการโดยวิธีต่อไปนี้

วิธีที่ 1 ใช้อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

กำหนดสมการ $AX = B$ ถ้า $|A| \neq 0$ แล้วจะมี A^{-1} ที่ซึ่ง $A^{-1}A = I$

จาก $AX = B$ คูณ A^{-1} เข้าด้านซ้ายทั้งสองข้าง

จะได้ $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

ดังนั้นคำตอบคือ $X = A^{-1}B$

วิธีที่ 2 ใช้ดีเทอร์มินันท์ หรือกฎของคราเมอร์ (Cramer’s Rule)

พิจารณาสมการ $AX = B$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ถ้า $|A| \neq 0$ แล้ว สมการ $AX = B$ จะมีคำตอบเพียงชุดเดียวโดยที่

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ X_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \ldots,\ X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

เมื่อ A_i คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนที่สมาชิกในหลักที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วยสมาชิกใน B

บทนิยาม 5 สุรัตนา (2560) ระบบสมการเชิงเส้น 2 ระบบจะสมมูลกัน (Equivalent) ถ้าระบบหนึ่งได้มาจากอีกระบบหนึ่ง โดยการกระทำต่อไปนี้

1. สลับที่สองสมการใด ๆ
2. คูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัว c ซึ่งไม่ใช่ศูนย์
3. บวกสมการใดสมการหนึ่งกับค่าคงตัว c ซึ่งไม่ใช่ศูนย์ เท่าของอีกสมการหนึ่ง

หมายเหตุ ระบบสมการที่สมมูลกันจะมีผลเฉลยเดียวกัน

เนื่องจากแถวของเมทริกซ์แต่งเติม [A | B] สอดคล้องกับสมการของระบบ การกระทำ 3 ข้อข้างบนสอดคล้องกับการกระทำกับเมทริกซ์ คือ

E1. สลับที่สองแถวใด ๆ หรือกล่าวคือ สลับที่ระหว่างแถวที่ i และแถวที่ j $(R_i \leftrightarrow R_j)$

E2. คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c ซึ่งไม่ใช่ศูนย์ $(R_i \rightarrow cR_i)$

E3. แทนที่แถวที่ i ด้วยผลบวกของแถวนั้นกับค่าคงตัว c ซึ่งไม่ใช่ศูนย์เท่าของแถวที่ j
$(R_i \rightarrow R_i + cR_j\ ;\ i \neq j)$

เราเรียกการกระทำตามข้อ E1, E2, E3 นี้ว่า การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (Elementary Row-Operations)

บทนิยาม 6 สุรัตนา (2560) เมทริกซ์ที่อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว (Row Echelon Matrix) มีสมบัติดังนี้

1) ถ้ามีแถวที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์หมด แถวเหล่านั้นจะต้องถูกจัดให้รวมกันอยู่แถวล่าง ๆ ของเมทริกซ์

2) ถ้าแถวใดมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวไม่เป็นศูนย์ สมาชิกตัวแรก (นับจากซ้ายมือ) ที่ไม่เป็นศูนย์จะต้องเป็น 1 เรียก 1 ว่าเป็นตัวนำ (Leading 1)

3) ในแถวสองแถวที่อยู่ติดกันที่มีสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์ ตัวนำ 1 ของแถวที่อยู่ต่ำกว่าจะอยู่เยื้องไปทางขวาของตัวนำ 1 ของแถวที่อยู่ข้างบน

(5) วิธีแก้ระบบสมการโดยวิธีการกำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination)

สุรัตนา (2560) การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานทำกับเมทริกซ์แต่งเติมจนได้เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวแล้วใช้การแทนค่าย้อนกลับซึ่งจะได้ระบบสมการชุดหนึ่ง ระบบสมการที่ได้จากการแทนค่าย้อนกลับนี้จะเป็นระบบสมการที่ง่ายต่อการหาผลเฉลย วิธีการแบบนี้เรียกว่า การกำจัดแบบเกาส์เซียน ซึ่งการหาผลเฉลยโดยวิธีนี้สามารถใช้กับระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ n ตัวแปร กล่าวคือ จำนวนสมการและจำนวนตัวแปรไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

ตัวอย่าง 1 ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x-2y+3z &= 9 \\ -x+3y &= -4 \\ 2x-5y+5z &= 17 \end{aligned} \tag{3}$$

<u>วิธีทำ</u> เปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

จากนั้นใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right] \qquad R_2 \longrightarrow R_2 + R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \qquad R_3 \longrightarrow R_3 - 2R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad R_3 \longrightarrow R_3 + R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad R_3 \longrightarrow \tfrac{1}{2}R_3$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$x - 2y + z = 9 \tag{4}$$

$$y + 3z = 5 \tag{5}$$

$$z = 2 \tag{6}$$

แทนค่า $z = 2$ ในสมการ (5) จะได้ $y + 3(2) = 5$ นั่นคือ $y = -1$
และแทนค่า $y = -1$ และ $z = 2$ ในสมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} x - 2(-1) + 3(2) &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

ฉะนั้น ผลเฉลยคือ $x = 1, y= -1$ และ $z = 2$

นำความรู้วิธีแก้ระบบสมการโดยวิธีการกำจัดแบบเกาส์เซียน แสดงว่าจัตุรัสกลขนาด 2×2 ไม่มีคำตอบ สำหรับ $n=2$ ค่าคงตัวกล $M(2) = 5$ จะได้สมาชิกของจัตุรัสกลอันดับสอง ดังนี้

x_{11}	x_{12}
x_{21}	x_{22}

ภาพที่ 1 ภาพแสดงรูบิคขนาด 2×2

เขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}&=5 \\ x_{21}+x_{22}&=5 \\ x_{11}+x_{21}&=5 \\ x_{12}+x_{22}&=5 \\ x_{11}+x_{22}&=5 \\ x_{12}+x_{21}&=5 \end{aligned} \tag{7}$$

เมื่อ $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \{1, 2, 3, 4\}$

เปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้น (7) ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม แล้วใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 5 \\ x_{12} + x_{22} &= 5 \\ x_{21} + x_{22} &= 5 \\ 2x_{22} &= 5 \end{aligned} \tag{8}$$

จะเห็นว่าระบบสมการ (8) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นเราจึงไม่สามารถสร้างจัตุรัสกลขนาด 2×2 ได้

ต่อไปจะแสดงว่าสำหรับจัตุรัสกลขนาด 3×3 มีเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น

กำหนดให้ n = 3 จะได้ค่าคงตัวกล $M(3) = 15$ และสมาชิกของจัตุรัสกลอันดับสาม ดังนี้

x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{21}	x_{22}	x_{23}
x_{31}	x_{32}	x_{33}

ภาพที่ 2 ภาพแสดงรูบิคขนาด 3×3

โดยเรียกตำแหน่งบนหน้ารูบิคดังนี้

x_{11} x_{13} x_{31} และ x_{33} เรียกว่า ตำแหน่งแนวทแยง

x_{22} เรียกว่า ตำแหน่งกลาง

x_{12} x_{21} x_{23} และ x_{32} เรียกว่า ตำแหน่งแนวกลาง

เขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 15 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 15 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 15 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 15 \\ x_{11} + x_{22} + x_{33} &= 15 \\ x_{13} + x_{22} + x_{31} &= 15 \end{aligned} \tag{9}$$

เมื่อ $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

เปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม แล้วใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้นได้ทั้งหมด 6 สมการ และจะได้ว่า $x_{22} = 5$
แทนค่า $x_{22} = 5$ ลงในจัตุรัสขนาด 3×3

x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{21}	5	x_{23}
x_{31}	x_{32}	x_{33}

ภาพที่ 3 ภาพแสดง $x_{22} = 5$ บนรูบิคขนาด 3×3

ให้ e_1 , e_2 , e_3 และ e_4 แทนจำนวนเต็มคู่ 4 จำนวน และให้ o_1 , o_2 , o_3 และ o_4 เป็นจำนวนเต็มคี่ 4 จำนวนที่เหลือ ซึ่งค่าคงตัวกล 15 และ 5 เป็นเลขคี่ จะได้จัตุรัสกลอันดับสามมีองค์ประกอบดังนี้

e_1	o_1	e_2
o_4	5	o_2
e_4	o_3	e_3

ภาพที่ 4 ภาพแสดงจำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่บนรูบิคขนาด 3×3

จากวิธีกำจัดแบบเกาส์เซียนจะได้ว่าจัตุรัสกลขนาด 2×2 ไม่มีคำตอบ และจัตุรัสกลขนาด 3×3 เป็นจัตุรัสกลที่มีเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น ไม่ว่าจะเกิดจากการสะท้อนหรือการหมุน เราจะถือว่าเป็นรูปแบบเดียวกัน สำหรับจตุรัสกลที่มีค่าคงตัวกล $M(3) = 15$ สามารถวางตัวเลขจัตุรัสกลได้ 8 รูปแบบ ดังนี้

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

ภาพที่ 5 ภาพแสดงจัตุรัสกล 8 รูปแบบบนรูบิคขนาด 3×3

รูบิคมีทั้งหมด 6 ด้าน แต่ละด้านมีผลรวมค่ากลต่างกัน แต่ละด้านจะเป็นอิสระจากกัน สามารถใช้การเรียงสับเปลี่ยน เข้ามาช่วยได้ จะได้ว่า ด้านแรกมีได้ 8 รูปแบบ ด้านสอง 8 รูปแบบ ด้านสาม 8 รูปแบบ ด้านสี่ 8 รูปแบบ ด้านห้า 8 รูปแบบ และด้านที่หก 8 รูปแบบ การที่เราจะสร้างรูบิคจัตุรัสกลนี้สามารถสร้างได้ถึง 8×8×8×8×8×8 รูปแบบ หรือเท่ากับ 262,144 รูปแบบ แต่ถึงอย่างไรเมื่อสร้างรูบิคมาได้เป็นที่เรียบร้อยแล้วแต่ละรูปแบบจะมีเพียงแค่ผลเฉลยเดียว

4. ผลการวิจัย

หลักในการเลือกจัตุรัสกลมาใช้พิจารณาจากโครงสร้างเชิงคณิตศาสตร์โดยอิงตามหลักการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการกำจัดแบบเกาส์เซียน เพื่อให้สามารถควบคุมโครงสร้างตัวเลขได้อย่างมีระบบและแม่นยำ โดยในแต่ละด้านของรูบิค ประกอบด้วยตัวเลขที่จัดเรียงเป็นจัตุรัสกลขนาด 3×3 ซึ่งมีค่าผลรวมค่ากลแตกต่างกัน ได้แก่ 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54 และ 57

จากการคำนวณพบว่า ค่ากลของจัตุรัสกลขนาด 3×3 นั้นจะเป็น 3 เท่าของตัวเลขในตำแหน่งกลางเสมอ

ค่าคงตัวกล $M(3) = 12$

1	6	5
8	4	0
3	2	7

ค่าคงตัวกล $M(3) = 15$

2	7	6
9	5	1
4	3	8

ค่าคงตัวกล $M(3) = 18$

3	8	7
10	6	2
5	4	9

ค่าคงตัวกล $M(3) = 21$

4	9	8
11	7	3
6	5	10

ค่าคงตัวกล $M(3) = 24$

5	10	9
12	8	4
7	6	11

ค่าคงตัวกล $M(3) = 27$

6	11	10
13	9	5
8	7	12

ค่าคงตัวกล $M(3) = 30$

7	12	11
14	10	6
9	8	13

ค่าคงตัวกล $M(3) = 33$

8	13	12
15	11	7
10	9	14

ค่าคงตัวกล $M(3) = 36$

9	14	13
16	12	8
11	10	15

ค่าคงตัวกล $M(3) = 39$

10	15	14
17	13	9
12	11	16

ค่าคงตัวกล $M(3) = 42$

11	16	15
18	14	10
13	12	17

ค่าคงตัวกล $M(3) = 45$

12	17	16
19	15	11
14	13	18

ค่าคงตัวกล $M(3) = 48$

13	18	17
20	16	12
15	14	19

ค่าคงตัวกล $M(3) =51$

14	19	18
21	17	13
16	15	20

ค่าคงตัวกล $M(3) = 54$

15	20	19
22	18	14
17	16	21

ค่าคงตัวกล $M(3) =57$

16	21	20
23	19	15
18	17	22

ภาพที่ 6 ภาพแสดงจัตุรัสกลที่มีผลรวมค่ากลแตกต่างกันบนรูบิคขนาด 3×3

การออกแบบจัตุรัสกลสำหรับการประยุกต์กับลูกบาศก์รูบิคขนาด 3×3 แสดงให้เห็นว่า หากมีตัวเลขซ้ำในตำแหน่งเดียวกันมากเกินไป จะทำให้การเล่นและจัดเรียงรูบิคยากขึ้นเพื่อควบคุมระดับความซับซ้อน จึงกำหนดให้ตัวเลขและตำแหน่งซ้ำกันไม่เกิน 2 ครั้งในแต่ละจัตุรัสกล

จากการจัดเรียงจัตุรัสกลในรูปแบบต่าง ๆ ได้ค่าคงตัวกลที่แตกต่างกัน ได้แก่ 12, 21, 30, 39, 48 และ 57 โดยแต่ละรูปแบบยังคงคุณสมบัติของจัตุรัสกล คือ ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแถว แนวตั้ง และแนวทแยงเท่ากัน

ตารางที่ 1 การแสดงจำนวนตัวเลขทั้งหมดในรูบิคและความน่าจะเป็นที่จะใช้ตัวเลขในแต่ละตัว

ตัวเลข	ตำแหน่งกลาง	ตำแหน่งแนวกลาง	ตำแหน่งแนวทแยง	ตำแหน่งตัวเลขที่ซ้ำกัน	โอกาสเลือก
0	-	1	-	-	1
1	-	-	1	-	1
2	-	1	-	-	1
3	-	1	1	-	1
4	1	-	1	-	1
5	-	1	1	-	1
6	-	2	1	1	0.5
7	1	-	2	1	0.5
8	-	2	1	1	0.5
9	-	2	1	1	0.5
10	1	-	2	1	0.5
11	-	2	1	1	0.5
12	-	2	1	1	0.5
13	1	-	2	1	0.5
14	-	2	1	1	0.5
15	-	2	1	1	0.5
16	1	-	2	1	0.5
17	-	2	1	1	0.5
18	-	1	1	-	1
19	1	-	1	-	1

ตารางที่ 1 การแสดงจำนวนตัวเลขทั้งหมดในรูบิคและความน่าจะเป็นที่จะใช้ตัวเลขในแต่ละตัว (ต่อ)

ตัวเลข	ตำแหน่งกลาง	ตำแหน่งแนวกลาง	ตำแหน่งแนวทแยง	ตำแหน่งตัวเลขที่ซ้ำกัน	โอกาสเลือก
20	-	1	1	-	1
21	-	1	-	-	1
22	-	-	1	-	1
23	-	1	-	-	1

จะได้ รูบิคทั้ง 6 ด้าน ดังนี้

									22	15	20
									17	19	21
									18	23	16
13	6	11	10	17	12	13	20	15	4	11	6
8	10	12	15	13	11	18	16	14	9	7	5
9	14	7	14	9	16	17	12	19	8	3	10
									7	2	3
									0	4	8
									5	6	1

ภาพที่ 7 ภาพแสดงรูบิคตัวเลขจัตุรัสกลทั้ง 6 ด้าน

5. อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

จากผลการศึกษาการออกแบบรูบิคต้นแบบขนาด 3×3 โดยประยุกต์ใช้แนวคิดจัตุรัสกล แทนการใช้สีแบบดั้งเดิม พบว่าเป็นแนวทางที่สามารถยกระดับความซับซ้อนของของเล่นประเภทพัฒนาสมองได้อย่างมีนัยสำคัญ การจัดวางตัวเลขให้ได้ค่าผลรวมตามเงื่อนไขของจัตุรัสกลในแต่ละด้าน เช่น 12, 21, 30, 39, 48 และ 57 นั้น ช่วยส่งเสริมให้ผู้เล่นใช้กระบวนการคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์และการวิเคราะห์อย่างเป็นระบบมากขึ้น การที่ค่ากลของจัตุรัสกลมีความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ เช่น ค่ากลมีค่าเป็น 3 เท่าของเลขตรงกลางทุกกรณี สะท้อนถึงโครงสร้างที่มีรูปแบบชัดเจนและสามารถนำไปใช้ในการออกแบบอย่างมีแบบแผน ทำให้รูปแบบของรูบิคนี้ไม่เพียงแต่เป็นของเล่น แต่ยังสามารถใช้เป็นสื่อการเรียนรู้ที่กระตุ้นการคิดเชิงตรรกะได้ดี การมีเงื่อนไข

เพิ่มเติมในการจำกัดจำนวนเลขซ้ำในตำแหน่งเดียวกันไม่เกิน 2 ตำแหน่งในแต่ละด้าน ยังช่วยควบคุมระดับความยากของโจทย์ไม่ให้สูงเกินไป ส่งผลให้ผู้เล่นสามารถฝึกฝนและพัฒนาทักษะการคิดได้อย่างต่อเนื่อง

ในอนาคตควรศึกษาความเป็นไปได้ในการออกแบบรูบิคจัตุรัสกลสำหรับขนาดที่ใหญ่ขึ้น เช่น 4×4 หรือ 5×5 เพื่อเพิ่มความท้าทายและสามารถบูรณาการหลักคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เช่น การจัดการเมทริกซ์ หรือระบบสมการเชิงเส้น

6. กิตติกรรมประกาศ

วิจัยคณิตศาสตร์เรื่อง รูบิคตัวเลขจัตุรัสกล สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีด้วยความอนุเคราะห์จากสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ ภาควิชาวิทยาคำนวณและเทคโนโลยีดิจิทัล คณะศิลปศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน

7. เอกสารอ้างอิง

สุรัตนา สังข์หนุน. (2560). *พีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น*. กองส่งเสริมวิชาการ มจพ. คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์.

Andrews, W.S. (1960). *Magic Squares and Cubes*, Dover, New York.

Cammann, S. (1960). The Evolution of Magic Squares in China. *Journal of the American Oriental Society, 80*(2), 116-124. https://doi.org/10.2307/595587

Emanuele, D. (2009). *Handout I: Construction of Magic Squares*. https://people.math.binghamton.edu/zaslav/Oldcourses/386.F10/delucchi.magic-squares.pdf?utm_source=chatgpt.com

Michael, T. (2007). *The Mathematics of The Rubik's Cube*, Chicago. http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2007/REUPapers/FINALAPP/Travis.pdf

Pringle, T. (2024). *Magic Squares and Using Magic Series for Theory*. https://cklixx.people.wm.edu/teaching/math400/Tyler.pdf?utm_source=chatgpt.com

Tomba, I. (2012). A Technique for Constructing Even-order Magic Squares using Basic Latin Squares. *International Journal of Scientific and Research Publications, 2*(7), 1-10. https://www.ijsrp.org/research_paper_jul2012/ijsrp-july-2012-103.pdf