



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 63(695) พฤษภาคม – สิงหาคม 2561

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: [MathThaiOrg@gmail.com](mailto:MathThaiOrg@gmail.com)



## เมทริกซ์กับการวิเคราะห์การลงทุน Matrix on Investment Analysis

เพชรรัตน์ รัตนวงษ์ และ กฤษณะ เนียมมณี

Petcharat Rattanawong<sup>1</sup> and Kritsana Neammanee<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Science and Social Sciences, Burapha University Sakaeo Campus, Sakaeo, 27160

<sup>2</sup>Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,  
Chulalongkorn University, Bangkok, 10330

Email: <sup>1</sup>[petchar@buu.ac.th](mailto:petchar@buu.ac.th) <sup>2</sup>[Kritsana.N@chula.ac.th](mailto:Kritsana.N@chula.ac.th)

### บทคัดย่อ

ในบทความนี้ จะกล่าวถึงการใช้ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์ ได้แก่ การคูณเมทริกซ์ และ เมทริกซ์ผกผัน ช่วยคำนวณผลลัพธ์จากการกระจายการลงทุนของนักลงทุน เพื่อให้ผู้ลงทุนไม่ขาดทุน เลย หรือผู้ลงทุนจะได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนสูงกว่าเงินลงทุนอย่างแน่นอน

**คำสำคัญ:** เมทริกซ์ผลตอบแทน พอร์ตการลงทุน พอร์ตการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง

พอร์ตแบบอับิพราจ ราคาสถานะ

### ABSTRACT

This article discusses the use of the basic knowledge of matrices, namely multiplication of matrices and inverse matrices, in order to calculate results of the investor diversification. Therefore, the investors do not lose at all or receive definitely a higher return on investment than investment.

**Keywords:** Return Matrix, Portfolio, Riskless Portfolio, Arbitrage Portfolio, State Prices

## 1. บทนำ

ในการลงทุน ผู้ลงทุนที่ต้องการบริหารจัดการการลงทุนของตนเองให้มีประสิทธิภาพสูงสุด จะต้องคำนึงถึงสองสิ่งต่อไปนี้ คือ ผลตอบแทนที่สูงที่สุด และความเสี่ยงอยู่ในระดับต่ำที่สุด ซึ่งสามารถทำได้โดยการกระจายการลงทุน (investment diversification)

การกระจายการลงทุน หมายถึง การลงทุนโดยแบ่งสัดส่วนการลงทุนออกไปถือครองสินทรัพย์หลาย ๆ ชนิด ไม่กระจุกเงินลงทุนทั้งหมดอยู่เพียงทางเลือกใดทางเลือกหนึ่ง อันจะทำให้มีปริมาณความเสี่ยงลดลงอย่างมาก และผลตอบแทนจากการลงทุนอาจจะลดลงไม่มาก ตัวอย่างเช่น นักลงทุนคนหนึ่งถือครองหุ้นของบริษัท ก และหุ้นของบริษัท ข ถ้าราคาหุ้นของทั้งสองบริษัทมีความสัมพันธ์กันในทิศทางตรงข้ามกัน หรือมีความสัมพันธ์กันน้อยมาก ทำให้ความเสี่ยงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นของทั้งสองบริษัทสามารถหักล้างกันไปได้บางส่วน ถ้าหุ้นตัวหนึ่งราคาตก แต่อีกตัวหนึ่งอาจจะราคาขึ้น ทำให้ผลตอบแทนการลงทุนอาจยังคงเป็นบวก หรือไม่เสียหายมากนัก [1, 2]

ในบทความนี้ จะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์ ช่วยในการคำนวณผลลัพธ์จากการกระจายการลงทุนของนักลงทุน เพื่อให้ผู้ลงทุนสามารถบริหารการลงทุนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ส่งผลให้ผู้ลงทุนไม่ขาดทุนเลย หรือผู้ลงทุนจะได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนสูงกว่าเงินลงทุนอย่างแน่นอน

## 2. แนวคิด วิธีการ และการวิเคราะห์การกระจายการลงทุนโดยใช้เมทริกซ์

เราสามารถนำความรู้เรื่องเมทริกซ์ มาประยุกต์ใช้ในการกระจายการลงทุนได้ ก่อนอื่น ขอแนะนำให้รู้จักคำศัพท์ที่สำคัญ ดังนี้ เมทริกซ์ผลตอบแทน (return matrix) พอร์ตการลงทุน (portfolio) พอร์ตการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง (riskless portfolio) และพอร์ตแบบอาบิทราจ (arbitrage portfolio)

**บทนิยาม 2.1** ในการลงทุนในหลักทรัพย์  $m$  ตัว ภายใต้  $n$  สถานการณ์ เราจะเรียก

เมทริกซ์  $\mathbf{R} = (r_{ij})$  ขนาด  $m \times n$  ว่า **เมทริกซ์ผลตอบแทน** (return matrix)

ถ้า  $r_{ij}$  คือ ผลตอบแทนรวมกับเงินต้นในการลงทุนในหลักทรัพย์ตัวที่  $i$  ในสถานการณ์ที่  $j$  ของเงินต้น 1 บาท

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 2.1** นายสมหมายต้องการลงทุนใน 3 อย่างต่อไปนี้ คือ พันธบัตร อสังหาริมทรัพย์ และหุ้น โดยคาดว่าผลตอบแทนในการลงทุนแต่ละอย่างใน 2 สถานการณ์ คือ

สถานการณ์ที่ 1 พรรคการเมือง ก เป็นผู้จัดตั้งรัฐบาล และ

สถานการณ์ที่ 2 พรรคการเมือง ข เป็นผู้จัดตั้งรัฐบาล

เป็นดังตาราง

| ประเภทของการลงทุน | สถานการณ์ที่ 1 | สถานการณ์ที่ 2 |
|-------------------|----------------|----------------|
| พันธบัตร          | 4%             | 5%             |
| อสังหาริมทรัพย์   | -5%            | 15%            |
| หุ้น              | 12%            | -20%           |

**หมายเหตุ** จำนวนติดลบ หมายถึง ขาดทุน

จงหาเมทริกซ์ผลตอบแทนการลงทุน

**วิธีทำ** ถ้าสมหมายลงทุนทุกอย่าง ๆ ละ 1 บาท จะได้ผลตอบแทนรวม (เงินต้นบวกกับผลตอบแทน) ดังตาราง

| ประเภทของการลงทุน | สถานการณ์ที่ 1 | สถานการณ์ที่ 2 |
|-------------------|----------------|----------------|
| พันธบัตร          | 1.04           | 1.05           |
| อสังหาริมทรัพย์   | 0.95           | 1.15           |
| หุ้น              | 1.12           | 0.80           |

ดังนั้น เราจะเขียนเมทริกซ์ผลตอบแทนขนาด  $3 \times 2$  ได้ดังนี้

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.04 & 1.05 \\ 0.95 & 1.15 \\ 1.12 & 0.80 \end{bmatrix}$$

**หมายเหตุ** เนื่องจากการลงทุนไม่ควรขาดทุนเกินกว่าต้นทุน ดังนั้นสมาชิกของเมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}$  จะมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ

**บทนิยาม 2.2** ในการลงทุนในหลักทรัพย์  $m$  ตัว เราจะเรียกเมทริกซ์

$$\mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]$$

ว่า **พอร์ตการลงทุน** (portfolio)

เมื่อ  $y_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) คือ จำนวนเงินลงทุนในหลักทรัพย์ตัวที่  $i$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 2.2** จากตัวอย่างที่ 2.1 ถ้าสมหมายตัดสินใจที่จะลงทุนในพันธบัตร 60,000 บาท อสังหาริมทรัพย์ 100,000 บาท และหุ้น 40,000 บาท จงเขียนพอร์ตการลงทุนของสมหมาย พร้อมทั้งคำนวณผลตอบแทนรวมด้วย

**วิธีทำ** เราจะเรียกเมทริกซ์แถว

$$\mathbf{Y} = [60000 \quad 100000 \quad 40000]$$

ว่า พอร์ตการลงทุน และสามารถคำนวณผลตอบแทนบวกเงินลงทุนได้ดังนี้

$$\text{สถานการณ์ที่ 1: } (60,000 \times 1.04) + (100,000 \times 0.95) + (40,000 \times 1.12) = 202,200 \text{ บาท}$$

$$\text{สถานการณ์ที่ 2: } (60,000 \times 1.05) + (100,000 \times 1.15) + (40,000 \times 0.80) = 210,000 \text{ บาท}$$

นั่นคือ เกิดจากผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\mathbf{YR} = [60000 \quad 100000 \quad 40000] \begin{bmatrix} 1.04 & 1.05 \\ 0.95 & 1.15 \\ 1.12 & 0.80 \end{bmatrix} = [202200 \quad 210000]$$

หมายความว่า

ถ้าพรรคการเมือง ก ได้เป็นผู้จัดตั้งรัฐบาล สมหมายจะได้รับผลตอบแทนรวม 202,200 บาท และถ้าพรรคการเมือง ข ได้เป็นผู้จัดตั้งรัฐบาล สมหมายจะได้รับผลตอบแทนรวม 210,000 บาท สังเกตว่าการลงทุนข้างต้น สมหมายจะไม่ขาดทุนเลยและได้กำไรเสมอ เนื่องจากได้ผลตอบแทนรวมมากกว่าเงินลงทุน 200,000 บาทในทุกสถานการณ์

นอกจากนี้ ยังมีพอร์ตการลงทุนที่น่าสนใจอีกชนิดหนึ่ง ดังต่อไปนี้

**บทนิยาม 2.3** เราจะเรียกพอร์ตการลงทุน  $\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]$  ที่มีเมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}$  ว่า **พอร์ตการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง** (riskless portfolio) ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ  $\mathbf{YR}$  มีค่าไม่น้อยกว่า  $y_1 + y_2 + \cdots + y_m$

จากบทนิยาม 2.3 ผลตอบแทนจากการลงทุนในทุกสถานการณ์สูงกว่าเงินลงทุน ดังนั้น การลงทุนจึงไม่มีความเสี่ยง พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 2.3** กำหนดเมทริกซ์ผลตอบแทน

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.95 & 1.05 \\ 1.40 & 1.63 \\ 1.05 & 1.05 \end{bmatrix}$$

และพอร์ตการลงทุน  $\mathbf{Y} = [1000 \ 10000 \ 6000]$

จงแสดงว่าพอร์ตการลงทุนนี้เป็นพอร์ตการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง

**วิธีทำ** จากพอร์ตการลงทุน จะได้ว่าเงินลงทุนรวม เท่ากับ  $1,000 + 10,000 + 6,000 = 17,000$  บาท

และคำนวณผลตอบแทนรวมได้

$$\mathbf{YR} = [1000 \ 10000 \ 6000] \begin{bmatrix} 0.95 & 1.05 \\ 1.40 & 1.63 \\ 1.05 & 1.05 \end{bmatrix} = [21250 \ 23650]$$

เนื่องจาก ผลตอบแทนรวมในทุกสถานการณ์สูงกว่า 17,000 บาท ดังนั้น พอร์ตการลงทุนนี้เป็นพอร์ตการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง

หากผู้ลงทุนไม่มีทุนเลย อาจอาศัยการกู้เงินมาลงทุนได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 2.4** นางสาวกัญญากู้เงินธนาคารมา 1,000,000 บาท โดยธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 6%

นำมาลงทุนในที่ดิน 400,000 บาท ทองคำ 400,000 บาท และพันธบัตร 200,000 บาท โดยมีอัตรา

ผลตอบแทนคาดหวัง ดังนี้

| ประเภทของการลงทุน | สถานการณ์ที่ 1 | สถานการณ์ที่ 2 |
|-------------------|----------------|----------------|
| ที่ดิน            | 5%             | -10%           |
| ทองคำ             | -5%            | 25%            |
| พันธบัตร          | 30%            | 15%            |

จงเขียนพอร์ตการลงทุนของนางสาวกัญญา พร้อมทั้งคำนวณผลตอบแทนรวม

**วิธีทำ** เนื่องจากกู้เงินมาลงทุน จึงเขียนพอร์ตการลงทุน และเมทริกซ์ผลตอบแทน ได้ดังนี้

พอร์ตการลงทุน  $\mathbf{Y}$  คือ

$$\mathbf{Y} = [\text{ที่ดิน} \ \text{ทองคำ} \ \text{พันธบัตร} \ \text{ธนาคาร}] = [400000 \ 400000 \ 200000 \ -1000000]$$

และเมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}$  คือ

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.05 & 0.90 \\ 0.95 & 1.25 \\ 1.30 & 1.15 \\ 1.06 & 1.06 \end{bmatrix}$$

สามารถคำนวณผลตอบแทนรวมได้ ดังนี้

$$\mathbf{YR} = \begin{bmatrix} 400000 & 400000 & 200000 & -1000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.05 & 0.90 \\ 0.95 & 1.25 \\ 1.30 & 1.15 \\ 1.06 & 1.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 30000 \end{bmatrix}$$

จากพอร์ตการลงทุนในตัวอย่าง 2.4 ผู้ลงทุนกู้ยืมเงินมาลงทุนทั้งหมด (นั่นคือ ลงทุน 0 บาท) ไม่มีโอกาสขาดทุน และมีอย่างน้อยหนึ่งวิธีที่มีกำไร เราเรียกพอร์ตการลงทุนแบบนี้ว่า พอร์ตแบบอาบิทราจ ซึ่งเป็นพอร์ตที่ไม่ต้องใช้เงินลงทุนแต่มีโอกาสที่จะได้กำไร จึงเป็นที่ต้องการของนักลงทุน ดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 2.4** เราจะเรียกพอร์ตการลงทุน  $\mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]$  ซึ่ง  $y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 0$  ที่มีเมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}$  ว่า **พอร์ตแบบอาบิทราจ** (arbitrage portfolio) ก็ต่อเมื่อ  $\mathbf{YR}$  ไม่มีสมาชิกที่น้อยกว่า 0 และมีอย่างน้อยหนึ่งสมาชิกที่มากกว่า 0

สังเกตว่า พอร์ตแบบอาบิทราจเป็นพอร์ตการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยงชนิดหนึ่ง หลังจากที่รู้จักเมทริกซ์ผลตอบแทน พอร์ตการลงทุน พอร์ตการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง และพอร์ตการลงทุนแบบอาบิทราจไปแล้วนั้น พบว่า พอร์ตแบบอาบิทราจเป็นที่ต้องการของนักลงทุนมากที่สุด เพราะไม่ต้องใช้เงินทุนของตัวเองเลย และผลตอบแทนการลงทุนจะไม่ขาดทุนเลยในทุกสถานการณ์ ต่อไปนี้เราจะประยุกต์ใช้การคูณเมทริกซ์ และเมทริกซ์ผกผันในการตรวจสอบว่า เมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}$  ที่กำหนดให้ จะสามารถสร้างพอร์ตการลงทุนแบบอาบิทราจได้หรือไม่ โดยอาศัยเครื่องมือสำคัญที่เรียกว่า ราคาสถานะ

**บทนิยาม 2.5** ให้  $\mathbf{R}$  เป็นเมทริกซ์ผลตอบแทนขนาด  $m \times n$  เราจะเรียกจำนวนจริงบวก  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ว่า **ราคาสถานะ** (state prices) สำหรับ  $\mathbf{R}$  ก็ต่อเมื่อ

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

เราสามารถหาราคาสถานะ  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ได้โดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้น แล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่า  $p_i > 0$  ทุก  $i=1, 2, \dots, n$  หรือไม่

**ทฤษฎีบท 2.1** ให้  $\mathbf{R}$  เป็นเมทริกซ์ผลตอบแทน

1. ถ้าสามารถหาราคาสถานะของ  $\mathbf{R}$  ได้ แล้วจะไม่มีพอร์ตแบบอาบิทราจ
2. ถ้าไม่สามารถหาราคาสถานะของ  $\mathbf{R}$  ได้ แล้วจะมีพอร์ตแบบอาบิทราจ

**บทพิสูจน์**

1. สมมติให้  $\mathbf{R} = (r_{ij})$  ขนาด  $m \times n$  เป็นเมทริกซ์ผลตอบแทนที่สามารถหาราคาสถานะได้

ให้  $\mathbf{P} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$  เป็นราคาสถานะของ  $\mathbf{R}$  ดังนั้น

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

และ  $p_i > 0$  ทุก  $i=1, 2, \dots, n$

สมมติให้มี  $\mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]$  ซึ่ง  $y_1 + y_2 + \dots + y_m = 0$  เป็นพอร์ตแบบอาบิทราจ โดยบทนิยาม 2.3

$$\mathbf{Y}\mathbf{R} = \left[ \sum_{i=1}^m y_i r_{i1} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^m y_i r_{in} \right]$$

มีสมบัติว่า  $\sum_{i=1}^m y_i r_{ij} \geq 0$  ทุก  $j=1, 2, \dots, n$  และมี  $j_0$  ซึ่ง  $\sum_{i=1}^m y_i r_{ij_0} > 0$

$$\text{ดังนั้น } (\mathbf{Y}\mathbf{R})\mathbf{P}^T = \left( \sum_{i=1}^m y_i r_{i1} \right) p_1 + \dots + \left( \sum_{i=1}^m y_i r_{in} \right) p_n > 0$$

$$\text{แต่ } (\mathbf{Y}\mathbf{R})\mathbf{P}^T = \mathbf{Y}(\mathbf{R}\mathbf{P}^T) = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = y_1 + y_2 + \dots + y_m = 0 \text{ ทำให้เกิดการขัดแย้ง}$$

ดังนั้น เราจึงไม่สามารถหาการลงทุนที่เป็นอาบิทราจได้

2. เราจะแสดงเฉพาะกรณีที่  $\mathbf{R}$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$  เท่านั้น และพิสูจน์โดยใช้ การแย้งสลับที่ (contrapositive)

สมมติให้

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ผลตอบแทนที่ไม่มีพอร์ตแบบอาบิทราบา และพิจารณา

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} - r_{21} & r_{12} - r_{22} \end{bmatrix}$$

จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้

กรณี 1  $r_{11} - r_{21} > 0$  และ  $r_{12} - r_{22} > 0$  หรือ

$r_{11} - r_{21} > 0$  และ  $r_{12} - r_{22} = 0$  หรือ

$r_{11} - r_{21} = 0$  และ  $r_{12} - r_{22} > 0$

เราจะได้ว่า  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$  เป็นพอร์ตแบบอาบิทราบา ซึ่งจะขัดแย้งกับสมมติฐาน ดังนั้น กรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 2  $r_{11} - r_{21} < 0$  และ  $r_{12} - r_{22} > 0$  หรือ

$r_{11} - r_{21} > 0$  และ  $r_{12} - r_{22} < 0$

โดยไม่เสียสยทั่วไป กำหนดให้  $r_{11} - r_{21} < 0$  และ  $r_{12} - r_{22} > 0$

ดังนั้น  $r_{11} < r_{21}$  และ  $r_{22} < r_{12}$  จะได้ว่า  $r_{11}r_{22} < r_{21}r_{12}$

ให้  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$  เมื่อ  $p_1 = \frac{r_{12} - r_{22}}{r_{12}r_{21} - r_{11}r_{22}}$  และ  $p_2 = \frac{r_{21} - r_{11}}{r_{12}r_{21} - r_{11}r_{22}}$

สังเกตว่า  $p_1 > 0, p_2 > 0$  และ  $\mathbf{R}\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} r_{11}p_1 + r_{12}p_2 \\ r_{21}p_1 + r_{22}p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น  $\mathbf{R}$  จะมีราคาสถานะ

กรณี 3  $r_{11} - r_{21} < 0$  และ  $r_{12} - r_{22} < 0$

เนื่องจาก  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -r_{11} + r_{21} & -r_{12} + r_{22} \end{bmatrix}$  และ  $-r_{11} + r_{21} > 0$  และ  $-r_{12} + r_{22} > 0$

ดังนั้น  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$  เป็นพอร์ตแบบอาบิทราบา เกิดข้อขัดแย้งกับ  $\mathbf{R}$  ไม่มีพอร์ตแบบอาบิทราบา

ดังนั้น กรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 4  $r_{11} - r_{21} = 0$  และ  $r_{12} - r_{22} < 0$  หรือ

$r_{11} - r_{21} < 0$  และ  $r_{12} - r_{22} = 0$



โดยไม่เสียนัยทั่วไป กำหนดให้  $r_{11} - r_{21} = 0$  และ  $r_{12} - r_{22} < 0$

เนื่องจาก  $[-1 \ 1]\mathbf{R} = [-r_{11} + r_{21} \ -r_{12} + r_{22}] = [0 \ -r_{12} + r_{22}]$  และ  $-r_{12} + r_{22} > 0$

ดังนั้น  $[-1 \ 1]$  เป็นพอร์ตแบบอับทราจ ดังนั้น กรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 5  $r_{11} - r_{21} = 0$  และ  $r_{12} - r_{22} = 0$

ให้  $\mathbf{P} = [p_1 \ p_2]$  เมื่อ  $p_1 = \frac{1}{2r_{11}}$  และ  $p_2 = \frac{1}{2r_{22}}$

สังเกตว่า  $p_1 > 0, p_2 > 0$  และ  $\mathbf{R}\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} r_{11}p_1 + r_{12}p_2 \\ r_{21}p_1 + r_{22}p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น  $\mathbf{R}$  จะมีราคาสถานะ

จากทั้ง 5 กรณี เราจะได้ว่ามี 2 กรณีเป็นจริง □

**ตัวอย่าง 2.5** สู้พิจารณาการลงทุนในที่ดิน ทองคำ หุ่นก่อสร้างใน 3 สถานการณ์ที่แตกต่างกัน พบว่า เมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}_1$  เป็นดังนี้

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.25 & 1.00 \\ 1.04 & 1.04 & 1.04 \\ 0.95 & 0.95 & 1.10 \end{bmatrix}$$

จงพิจารณาว่าสามารถจัดพอร์ตแบบอับทราจได้หรือไม่

**วิธีทำ** ต้องการหาราคาสถานะ  $p_1, p_2, p_3$  ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 1.25 & 1.00 \\ 1.04 & 1.04 & 1.04 \\ 0.95 & 0.95 & 1.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเมทริกซ์  $\mathbf{R}_1$  เขียนได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 1 \\ \frac{26}{25} & \frac{26}{25} & \frac{26}{25} \\ \frac{19}{20} & \frac{19}{20} & \frac{11}{10} \end{bmatrix}$$

และเมทริกซ์ผกผันของ  $\mathbf{R}_1$  คือ

$$\begin{bmatrix} -4 & \frac{425}{39} & -\frac{20}{3} \\ 4 & -\frac{50}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{475}{78} & \frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{425}{39} & -\frac{20}{3} \\ 4 & -\frac{50}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{475}{78} & \frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{2}{13} \\ \frac{15}{26} \end{bmatrix}$$

จากสมการข้างต้น จะได้ว่า  $p_1 = \frac{3}{13}$ ,  $p_2 = \frac{2}{13}$  และ  $p_3 = \frac{15}{26}$

เนื่องจาก  $p_i > 0$  ทุก  $i=1,2,3$  ดังนั้น เมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}_1$  สามารถหาคาสถานะได้ โดยทฤษฎีบทที่ 2.1 ข้อ 1 จึงไม่สามารถจัดพอร์ตแบบอภิศราได้

**ตัวอย่าง 2.6** ในการลงทุนที่ดิน พันธบัตร และหุ้นใน 3 สถานการณ์ มีเมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}_2$  ดังนี้

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1.10 & 1.00 & 0.95 \\ 1.05 & 1.05 & 1.05 \\ 1.15 & 1.10 & 1.05 \end{bmatrix}$$

จงพิจารณาว่าสามารถจัดพอร์ตแบบอภิศราได้หรือไม่

**วิธีทำ** ต้องการหาคาสถานะ  $p_1, p_2, p_3$  ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1.10 & 1.00 & 0.95 \\ 1.05 & 1.05 & 1.05 \\ 1.15 & 1.10 & 1.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเมทริกซ์  $\mathbf{R}_2$  เขียนได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{10} & 1 & \frac{19}{20} \\ \frac{21}{20} & \frac{21}{20} & \frac{21}{20} \\ \frac{23}{20} & \frac{11}{10} & \frac{21}{20} \end{bmatrix}$$

และเมทริกซ์ผกผันของ  $\mathbf{R}_2$  คือ

$$\begin{bmatrix} -\frac{20}{21} & -\frac{40}{441} & \frac{20}{21} \\ \frac{40}{21} & \frac{80}{441} & \frac{40}{21} \\ -\frac{20}{21} & -\frac{40}{441} & \frac{40}{21} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{21} & -\frac{40}{441} & \frac{20}{21} \\ \frac{40}{21} & \frac{80}{441} & \frac{40}{21} \\ -\frac{20}{21} & -\frac{40}{441} & \frac{40}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{40}{441} \\ \frac{1760}{441} \\ \frac{380}{441} \end{bmatrix}$$

จากสมการข้างต้น จะได้ว่า  $p_1 = -\frac{40}{441}$ ,  $p_2 = \frac{1760}{441}$  และ  $p_3 = \frac{380}{441}$

เนื่องจาก  $p_1 < 0$  ดังนั้น เมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}_2$  ไม่สามารถหาราคาสถาณะได้

จึงสามารถจัดพอร์ตแบบอภิปราจได้ เช่น

$$[-30000 \quad 10000 \quad 20000] \text{ และ } [-25000 \quad 10000 \quad 15000]$$

เป็นพอร์ตแบบอภิปราจของ  $\mathbf{R}_2$

**หมายเหตุ** ถ้าเมทริกซ์ผลตอบแทน  $\mathbf{R}$  ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน ( $\mathbf{R}^{-1}$ ) จะต้องใช้การดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์  $\mathbf{R}$  แทน

### 3. สรุป

จากการศึกษา พบว่าเราสามารถใช้อยู่เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์ช่วยตรวจสอบเมทริกซ์ผลตอบแทนว่าจะสามารถจัดพอร์ตการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยงและเป็นที่ต้องการของนักลงทุนได้

หรือไม่ แต่กระบวนการตรวจสอบนี้ยังไม่สามารถหาพอร์ตการลงทุนที่เหมาะสมให้นักลงทุนต้องหาพอร์ตการลงทุนที่เหมาะสมด้วยตนเอง

### เอกสารอ้างอิง

- [1] ตลาดตราสารหนี้ ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2558). *เอกสารเผยแพร่ความรู้ เรื่องตราสารหนี้ ชุดที่ 2 การกระจายความเสี่ยงเพื่อการลงทุนที่มีประสิทธิภาพ*. กรุงเทพมหานคร.
- [2] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2548). *เครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน*. กรุงเทพมหานคร.
- [3] ยุวรีย์ พันธุ์กล้า และ กฤษณะ เนียมมณี. (2558). *แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ II*. กรุงเทพมหานคร: พิกซ์การพิมพ์.
- [4] Capinski, M. and Zastawniak, T. (2011). *Mathematics for Finance, An Introduction to Financial Engineering*. London: Springer Verlag.
- [5] Buchanan, J. R. (2012). *An Undergraduate Introduction to Financial Mathematics*. World Scientific Publishing Company.
- [6] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill.
- [7] Karatzas, I. and Shreve, S. (1998). *Methods of Mathematical Finance*. New York: Springer Verlag.
- [8] Grimmett, G. and Welsh, D. (1986). *Probability: An Introduction*. Oxford University Press.
- [9] Gerber, H. U. (1997). *Life Insurance Mathematics*. Heidelberg: Springer Verlag.
- [10] Dwarsky, L. N. (2009). *Understanding the Mathematics of Personal Finance: An Introduction to Financial Literacy*. Wiley.
- [11] Anthony, M. and Biggs, N. (1996). *Mathematics for Economics and Finance: Methods and Modelling*. Cambridge University Press.