DOI: 10.14456/mj-math.2018.3

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 63(694) Jan–Apr, 2018
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวย

Optical Properties of Conic Sections

รตวรรณ อรัญไสว
Ratawan Arunsawai

Department of Mathematics and Statistics
Prince of Songkla University, Hatyai Campus, Songkla, 91000

Email: ratawan.arunsawai@gmail.com

บทคัดย่อ

เราพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยซึ่งเกี่ยวข้องกับทางเดินของแสงที่ผ่านจุดโฟกัสของภาคตัดกรวยและสะท้อนที่ภาคตัดกรวยนั้นตามกฎการสะท้อนของแสง โดยใช้เทคนิคการพิสูจน์แบบไม่อิงระบบพิกัดและการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งซึ่งนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถเข้าใจได้ไม่ยาก

คำสำคัญ: ภาคตัดกรวย จุดโฟกัส สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ เทคนิคการพิสูจน์

ABSTRACT

We prove optical properties of conic sections involving trajectories of light passing through foci of the conic sections and reflecting at the conic sections according to the law of reflection. Proof techniques employed include coordinate-free proof and proof by contradiction, which are accessible to high-school students.

Keywords: Conic Sections, Focus, Optical Properties, Proof Techniques

1. บทนำ

ภาคตัดกรวยคือเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบ ได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายศึกษาสมบัติต่างๆของภาคตัดกรวยเหล่านี้ [1] โดยสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งคือจุดโฟกัสของภาคตัดกรวยการใช้คำว่า “จุดโฟกัส” ในความหมายทั่วไปนั้นมักจะใช้ในความหมายของการเป็นจุดรวมแสงในอุปกรณ์ทัศนศาสตร์ เช่น กล้องจุลทรรศน์หรือกล้องโทรทรรศน์ นักเรียนจึงอาจมีคำถามว่าจุดโฟกัสของภาคตัดกรวยนั้นมีสมบัติของการเป็นจุดรวมแสงในเชิงทัศนศาสตร์หรือไม่

บทความนี้จะนำเสนอสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวย และถึงแม้ว่าเราจะสามารถพิสูจน์สมบัติเหล่านี้โดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส [2, 3, 4] แต่เราจะใช้การพิสูจน์แบบไม่อิงระบบพิกัด (coordinate-free proof) ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (proof by contradiction) ซึ่งจะทำให้ได้บทพิสูจน์ที่กระชับ และนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถเข้าใจได้ไม่ยาก โดยผู้เขียนได้ศึกษาแนวคิดในการพิสูจน์ลักษณะนี้จาก [5, 6]

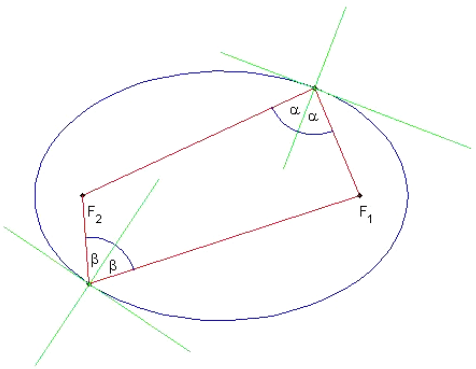
2. สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวย

สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยใดๆนั้นสรุปเป็นประโยคเพียงประโยคเดียวได้ดังนี้ [2, 3, 4]

“ถ้าแสงเดินทางออกจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งของภาคตัดกรวยและตกกระทบที่ภาคตัดกรวยนั้น แล้วแสงจะสะท้อนตามแนวเส้นตรงซึ่งผ่านจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของภาคตัดกรวยนั้น”

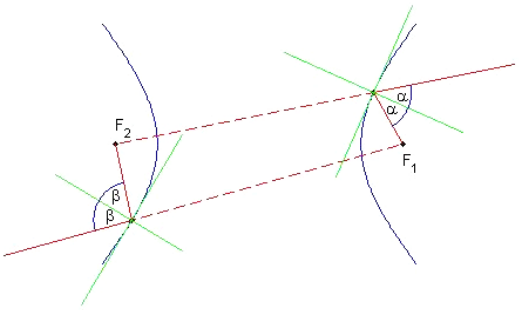
เราสมมติว่าแสงสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง กล่าวคือ “มุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน” โดยที่มุมทั้งสองคือมุมที่ลำแสงตกกระทบและลำแสงสะท้อนทำกับเส้นตั้งฉากของภาคตัดกรวย ณ จุดที่พิจารณา

รูปที่ 1 แสดงสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรี โดยเมื่อแสงที่เดินทางออกจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งของวงรีตกกระทบวงรี แล้วจะสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง และเดินทางผ่านจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของวงรี

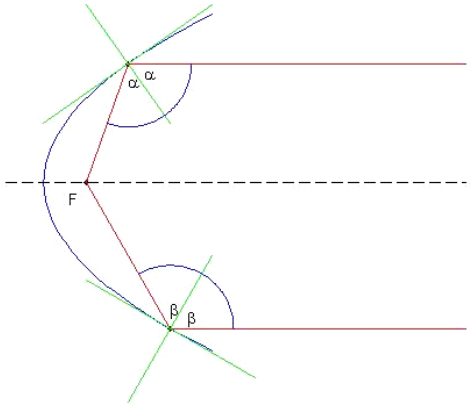


รูปที่ 1 สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรี

รูปที่ 2 แสดงสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของไฮเพอร์โบลา โดยเมื่อแสงที่เดินทางออกจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลาตกกระทบไฮเพอร์โบลา แล้วจะสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง และถึงแม้ว่าแสงสะท้อนจะไม่ผ่านจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา แต่ก็



รูปที่ 2 สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของไฮเพอร์โบลา



รูปที่ 3 สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของพาราโบลา

เดินทางตามแนวเส้นตรง (เส้นประ) ซึ่งผ่านจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา

รูปที่ 3 แสดงสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของพาราโบลา ถึงแม้ว่าพาราโบลามีจุดโฟกัสเพียงจุดเดียว แต่เราอาจสมมติว่าจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของพาราโบลาอยู่ที่อนันต์บนแกนสมมาตรทางด้านเปิดของพาราโบลา โดยเมื่อแสงที่เดินทางออกจากจุดโฟกัสของพาราโบลาตกกระทบพาราโบลา แล้วจะสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง และเดินทางไปยังจุดโฟกัสที่อนันต์ ซึ่งหมายความว่าแสงสะท้อนต้องขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลา ในทางกลับกันเมื่อแสงที่ขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลาตกกระทบพาราโบลา แล้วจะสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง และเดินทางผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา

ในกรณีของวงกลมนั้น เราอาจพิจารณาว่าจุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม แสงที่เดินทางออกจากจุดศูนย์กลางของวงกลมจะเดินทางตามแนวรัศมีของวงกลม และตกกระทบตั้งฉากกับเส้นรอบวงของวงกลม ดังนั้นแสงจะสะท้อนกลับตามแนวเดิมและเดินทางผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมอีกครั้ง

เราสามารถแปลงสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยให้เป็นสมบัติเชิงคณิตศาสตร์เพื่อให้เอื้อต่อการพิสูจน์ได้ดังนี้

"ถ้า P เป็นจุดใดๆ บนภาคตัดกรวยที่มีจุดโฟกัสที่ F_1และ F_2 แล้วเส้นตั้งฉากของภาคตัดกรวยที่จุด P จะแบ่งครึ่งมุมตรงข้ามคู่หนึ่งที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง $\overleftrightarrow{PF_1}$ และ $\overleftrightarrow{PF_2}$ (และเส้นสัมผัสของภาคตัดกรวยที่จุด P จะแบ่งครึ่งมุมตรงข้ามอีกคู่หนึ่ง)"

3. พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวย

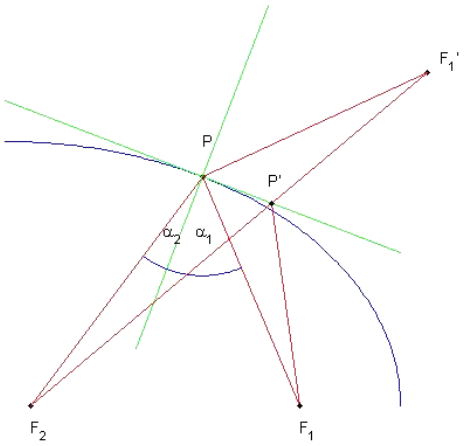
เราเห็นได้ง่ายแล้วว่าสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงกลมเป็นจริง เราจึงพิสูจน์เฉพาะสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรี ไฮเพอร์โบลา และพาราโบลา ดังนี้

3.1 วงรี

ก่อนที่จะพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรีนั้น เราอ้างอิงถึงนิยามของวงรีว่า วงรีที่มีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 คือเซตของจุด P โดยที่ $F_1P + F_2P$ เป็นค่าคงตัวซึ่งมากกว่า F_1F_2 และค่าคงตัวนี้เรียกว่า ผลรวมคงตัว ให้สังเกตว่าถ้าวงรีสองวงมีจุดโฟกัสร่วมกัน แล้ววงรีที่มีผลรวมคงตัวน้อยกว่าต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่า กล่าวคือ วงรีที่มีผลรวมคงตัวน้อยกว่าต้องอยู่ภายในวงรีที่มีผลรวมคงตัวมากกว่า

ในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งนั้น เราจะสมมติว่าเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ กล่าวคือ $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ดังรูปที่ 4

กำหนดให้ F_1' เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด F_1 ข้ามเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P จะได้ว่า $F_1P = F_1'P$ และมุมระหว่างเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P และส่วนของเส้นตรง $\overline{F_1'P}$ ต้องเท่ากับ



รูปที่ 4 พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรีโดยใช้ข้อขัดแย้ง

α_1 เมื่อเป็นเช่นนี้จุด $F_1^{'}, P, \quad F_2$ จึงไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

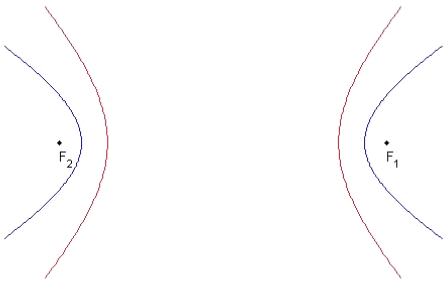
กำหนดให้ P' เป็นจุดตัดของเส้นตรง $\overleftrightarrow{F_1^{'}F_2}$ และเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P การที่จุด F_1', P, F_2 ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหมายความว่า P และ P' ไม่ใช่จุดเดียวกัน นอกจากนั้นแล้ว $F_1P' = F_1'P'$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_1P' + F_2P' &= F_1'P' + F_2P' \\ &= F_1'F_2 \\ &< F_1'P + F_2P \\ &= F_1P + F_2P \end{aligned}$$

โดยอสมการที่เกิดขึ้นคืออสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality) ดังนั้น $F_1P' + F_2P' < F_1P + F_2P$ ซึ่งหมายความว่าถ้าจุด P' อยู่บนวงรีที่มีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แล้ววงรีดังกล่าวจะต้องอยู่ภายในวงรีที่ผ่านจุด P และมีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แต่ข้อสรุปนี้ขัดแย้งกับการที่จุด P' อยู่บนเส้นสัมผัสของวงรีที่ผ่านจุด P จึงต้องอยู่ภายนอกวงรีดังกล่าว เนื่องจากข้อสมมติที่ว่าเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เราจึงสรุปได้ว่าเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P ต้องแบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ ตามที่ต้องการ

3.2 ไฮเพอร์โบลา

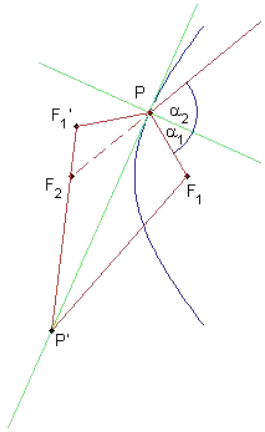
ก่อนที่จะพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของไฮเพอร์โบลานั้น เราอ้างอิงถึงนิยามของไฮเพอร์โบลาว่า ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 คือเซตของจุด P โดยที่ $|F_1P - F_2P|$ เป็นค่าคงตัวซึ่งน้อยกว่า F_1F_2 และค่าคงตัวนี้เรียกว่า ผลต่างคงตัว ให้สังเกตว่า ถ้าไฮเพอร์โบลาสองรูปมีจุดโฟกัสร่วมกัน แล้วไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างคงตัวมากกว่าต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่า ดังรูปที่ 5 ซึ่งไฮเพอร์โบลาสีน้ำเงินมีผลต่างคงตัวมากกว่าไฮเพอร์โบลาสีแดง



รูปที่ 5 ไฮเพอร์โบลาสองรูปที่มีจุดโฟกัสร่วมกัน

ในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งนั้น เราจะสมมติว่าเส้นตั้งฉากของไฮเพอร์โบลาที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ กล่าวคือ $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ดังรูปที่ 6

กำหนดให้ F_1' เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด F_1 ข้ามเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P จะได้ว่า $F_1P = F_1'P$ และมุมระหว่างเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P และส่วนของเส้นตรง $\overline{F_1'P}$ ต้องเท่ากับ α_1 เมื่อเป็นเช่นนี้จุด F_1', P, F_2 จึงไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



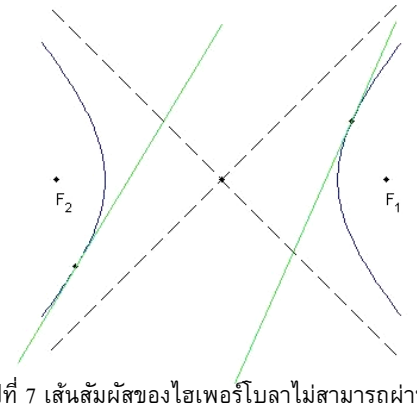
รูปที่ 6 พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของไฮเพอร์โบลาโดยใช้ข้อขัดแย้ง

กำหนดให้ P'เป็นจุดตัดของเส้นตรง $\overleftrightarrow{F_1'F_2}$ และเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P การที่จุด F_1', P, F_2 ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหมายความว่า

P และ P' ไม่ใช่จุดเดียวกัน นอกจากนั้นแล้ว $F_1P' = F_1'P'$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_1P' - F_2P' = F_1'P' - F_2P' &= F_1'F_2 \\ &> F_2P - F_1'P \\ &= F_2P - F_1P \end{aligned}$$

ดังนั้น $|F_1P' - F_2P'| > |F_1P - F_2P|$ ซึ่งหมายความว่าถ้าจุด P' อยู่บนไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แล้วไฮเพอร์โบลาดังกล่าวจะต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าไฮเพอร์โบลาที่ผ่านจุด P และมีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แต่ข้อสรุปนี้ขัดแย้งกับการที่จุด P' อยู่บนเส้นสัมผัสของไฮเพอร์โบลาที่ผ่านจุด P จึงต้องอยู่บนไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างคงตัวน้อยกว่าไฮเพอร์โบลาที่ผ่านจุด P (รูปที่ 7 แสดงให้เห็นว่าเส้นสัมผัสของไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งไม่สามารถผ่านจุดอื่นของไฮเพอร์โบลารูปนั้นได้



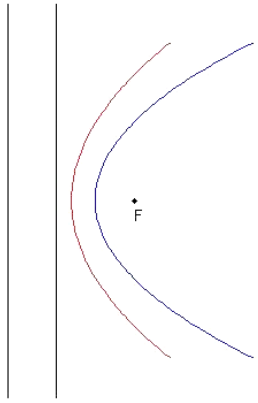
รูปที่ 7 เส้นสัมผัสของไฮเพอร์โบลาไม่สามารถผ่านจุดอื่นของไฮเพอร์โบลาได้

จึงไม่สามารถตัดไฮเพอร์โบลาอีกรูปหนึ่งที่มีจุดโฟกัสร่วมกันและอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าได้ เส้นประในรูปนี้คือเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา)

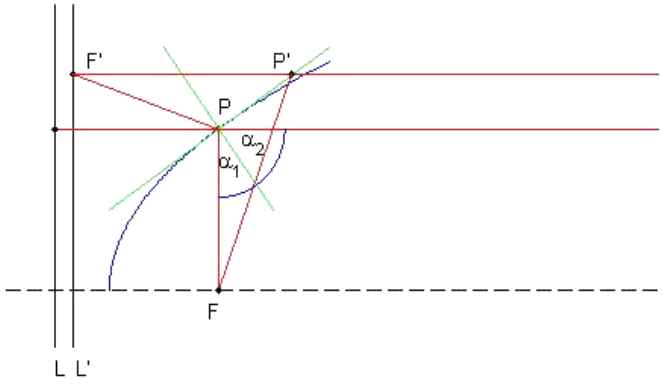
เนื่องจากข้อสมมติที่ว่าเส้นตั้งฉากของไฮเพอร์โบลาที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เราจึงสรุปได้ว่าเส้นตั้งฉากของไฮเพอร์โบลาที่จุด P ต้องแบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ ตามที่ต้องการ

3.3 พาราโบลา

ก่อนที่จะพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของพาราโบลานั้น เราอ้างอิงถึงนิยามของพาราโบลาว่า พาราโบลาที่มีจุดโฟกัสที่ F และเส้นไดเรกตริกซ์ L คือเซตของจุด P โดยที่ FP เท่ากับระยะตั้งฉากจากจุด P ถึงเส้นตรง L ให้สังเกตว่าถ้าพาราโบลาสองรูปมีจุดโฟกัสร่วมกัน และมีเส้นไดเรกตริกซ์ขนานกัน แล้วพาราโบลาที่อยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าก็จะมีเส้นไดเรกตริกซ์ที่อยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าด้วย ดังรูปที่ 8 ซึ่งเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลาสีน้ำเงินอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลาสีแดง



รูปที่ 8 พาราโบลาที่มีจุดโฟกัสร่วมกันและเส้นไดเรกตริกซ์ขนานกัน



รูปที่ 9 พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของพาราโบลาโดยใช้ข้อขัดแย้ง

ในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งนั้น เราจะสมมติว่า เส้นตั้งฉากของพาราโบลาที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุมที่ส่วนของเส้นตรง $\overline{FP}$ ทำกับเส้นตรงที่ผ่านจุด P และขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลา กล่าวคือ $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ดังรูปที่ 9

กำหนดให้ F' เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด F ข้ามเส้นสัมผัสของพาราโบลาที่จุด P จะได้ว่า $FP = F'P$ และมุมระหว่างเส้นตั้งฉากของพาราโบลาที่จุด P และส่วนของเส้นตรง $\overline{F'P}$ ต้องเท่ากับ α_1 เมื่อเป็นเช่นนี้ส่วนของเส้นตรง $\overline{F'P}$ จึงไม่ขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลา

กำหนดให้ P' เป็นจุดตัดของเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P และเส้นตรงที่ผ่านจุด F' และขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลา การที่ส่วนของเส้นตรง $\overline{F'P}$ ไม่ขนานกับแกน

สมมาตรของพาราโบลาหมายความว่า P และ P' ไม่ใช่จุดเดียวกัน นอกจากนั้นแล้ว $FP' = F'P'$

พิจารณาเส้นตรง L ซึ่งตั้งฉากกับแกนสมมาตรของพาราโบลา เส้นตรงดังกล่าวถูกสร้างขึ้นตรงข้ามกับด้านเปิดของพาราโบลาให้มีระยะตั้งฉากจากจุด P เท่ากับ FP ดังนั้น เส้นตรง L จึงต้องเป็นเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา และเส้นตรง L' ซึ่งผ่านจุด F' และตั้งฉากกับแกนสมมาตรของพาราโบลาต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าเส้นตรง L เพราะ $F'P$ เท่ากับระยะตั้งฉากจากจุด P ถึงเส้นตรง L แต่ส่วนของเส้นตรง $\overline{F'P}$ ไม่ตั้งฉากกับเส้นตรง L' จะได้ว่าถ้า P' เป็นจุดบนพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสที่ F และมีเส้นไดเรกตริกซ์ L' แล้วพาราโบลาดังกล่าวจะต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าพาราโบลาที่ผ่านจุด P (ซึ่งมีจุดโฟกัสร่วมกันและมีเส้นไดเรกตริกซ์ L) แต่ข้อสรุปนี้ขัดแย้งกับการที่จุด P' อยู่บนเส้นสัมผัสของพาราโบลาที่ผ่านจุด P จึงต้องอยู่บนพาราโบลาที่อยู่ไกลจากจุดโฟกัสมากกว่าพาราโบลาที่ผ่านจุด P

เนื่องจากข้อสมมติที่ว่าเส้นตั้งฉากของพาราโบลาที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุมที่ส่วนของเส้นตรง $\overline{FP}$ ทำกับเส้นตรงที่ผ่านจุด P และขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลาทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เราจึงสรุปได้ว่าเส้นตั้งฉากของพาราโบลาที่จุด P ต้องแบ่งครึ่งมุมดังกล่าวตามที่ต้องการ

4. สรุป

เราได้พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ที่เกี่ยวกับจุดโฟกัสของภาคตัดกรวยซึ่งเป็นเส้นโค้งระนาบ ในอุปกรณ์ทัศนศาสตร์นั้น ผิวสะท้อนมักจะเป็นผิวที่ได้จากการหมุน (surface of revolution) ภาคตัดกรวยรอบแกนสมมาตร เช่น ทรงรี (ellipsoid) พาราโบลอยด์ (paraboloid) หรือ ไฮเพอร์โบลอยด์ (hyperboloid) อย่างไรก็ตาม ถ้าแสงเดินทางบนระนาบที่ผ่านแกนสมมาตรของผิวสะท้อนเหล่านี้ แล้วสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ที่เราได้พิสูจน์ก็ยังคงเป็นจริงอยู่

ผู้อ่านที่มีความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (เกี่ยวกับความชันของเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่างเส้นตรง) และแคลคูลัส (เกี่ยวกับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง) สามารถพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยได้เช่นเดียวกัน โดยผู้อ่านจะพบว่าสามารถใช้เทคนิคการพิสูจน์โดยตรง (direct proof) ได้แต่ก็จะต้องจัดรูปพจน์เชิงพีชคณิตค่อนข้างมาก

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนได้รับคำชี้แนะในการศึกษาสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยจาก ผศ.ดร.บุญญิสา แซ่หล่อ และ ดร.อเนกวิทย์ บุญเกษม ในระหว่างการฝึกงานภาคฤดูร้อน ณ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตสุราษฎร์ธานี นอกจากนั้น ผู้เขียนยังได้ใช้ประโยชน์ในการศึกษาค้นคว้าจากหอบรรณสารสนเทศ และห้องวิจัยสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์และสารสนเทศ ณ มหาวิทยาลัย-สงขลานครินทร์ วิทยาเขตสุราษฎร์ธานี ด้วย

เอกสารอ้างอิง

[1] ภัทรา เตชาภิวาทย์, *เรขาคณิตวิเคราะห์*, กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2540.

[2] Algebra.com. 2016. *Lesson Optical property of a parabola*. Retrieved 25 November 2016 from

https://www.algebra.com/algebra/homework/Quadratic-relations-and-conic-sections/Optical-property-of-a-parabola.lesson

[3] Algebra.com. 2016. *Lesson Optical property of a hyperbola*. Retrieved 25 November 2016 from https://www.algebra.com/algebra/homework/Quadratic-relations-and-conic-sections/Optical-property-of-a-hyperbola.lesson

[4] Algebra.com. 2016. *Lesson Optical property of an ellipse*. Retrieved 25 November 2016 from https://www.algebra.com/algebra/homework/Quadratic-relations-and-conic sections/Optical-property-of-an ellipse.lesson

[5] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, New York, USA: Chelsea Publishing Company, 1952.

[6] Apollonius of Perga, *Conics*, New Mexico, USA:Green Lion Press, 1997.