



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 63(694) Jan–Apr, 2018

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com



การจัดตารางแข่งขันฟุตบอลลีกให้มีความสมดุลสำหรับ ภาวะยกยอด

Balancing Carry-Over Effects in Football League Tournaments

กิตติรัช เยี่ยมทอง วิศรุต ประสานพานิช และ จริยา อู่ยยะเสถียร
Kittitat Iamthong¹ Wisarut Prasanphanich² and Chariya Uiyasathian³

¹Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330, Thailand

Email: ¹Kittitat.pele@gmail.com ²p.wisarut@yahoo.co.th ³chariya.u@chula.ac.th

บทคัดย่อ

ฟุตบอลลีกเป็นการแข่งขันชนิดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบ สำหรับทัวร์นาเมนต์ที่การแข่งขันในแมตช์ต่าง ๆ ส่งผลกระทบถึงประสิทธิภาพในการแข่งแมตช์ถัดไปด้วยนั้น การจัดตารางแข่งขันที่ไม่ดีอาจทำให้เกิดการได้เปรียบเสียเปรียบกันในหมู่ทีมที่เข้าแข่งขัน ในบทความนี้จะแสดงวิธีแก้ปัญหาดังกล่าวซึ่งเรียกว่าการจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอด ให้กับการแข่งขันฟุตบอลลีกของประเทศไทยและฟุตบอลลีกของประเทศสเปน

คำสำคัญ: การจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอด

ABSTRACT

Football leagues are round robin competitions. It is widely believed that for each match, each team has an effect on its opponent which would carry over to the next match. Such the carry-over effects might yield some advantage among competitors. In this article, we investigate the schedule arrangement of round robin





tournaments with the aim of distributing the carry-over effects as evenly as possible, which is called *round robin tournament balanced for carry-over*. Furthermore, we will apply our scheme for the Thai and Spanish football leagues.

Keywords: Round Robin Tournament Balanced for Carry-Over

1. บทนำ

ในปัจจุบันฟุตบอลเป็นกีฬาที่ได้รับความนิยมสูง และรูปการแข่งขันฟุตบอลที่ผู้คนติดตามมากที่สุดก็คือการแข่งขันฟุตบอลลีก (league) เพราะว่ามีจำนวนแมตช์การแข่งขัน (match) จำนวนมากให้ได้ติดตามกันตลอดทั้งปี ซึ่งในแต่ละประเทศก็จะมีฟุตบอลลีกเป็นของตนเอง



รูปที่ 1: การแข่งขันฟุตบอล (ที่มา : <https://www.pexels.com/> วันที่ 9 ธันวาคม 2559)

โดยผู้เข้าแข่งขันก็คือทีมจากสโมสรฟุตบอลภายในประเทศนั้น ๆ ฟุตบอลลีกในบางประเทศนั้นได้รับความนิยมสูงไปทั่วโลก จนกระทั่งสร้างมูลค่าทางการตลาดมหาศาล เช่น พรีเมียร์ลีก (Premier League) ลา ลีกา ลีก (La Liga League) บุนเดสลีกา ลีก (Bundesliga League) ซึ่งเป็นลีกของประเทศอังกฤษ สเปน และเยอรมนี ตามลำดับ ทั้งนี้จำนวนทีมที่เข้าแข่งขันในฟุตบอลลีกของแต่ละประเทศนั้นอาจ

มีไม่เท่ากัน เช่น ในฟุตบอลลีกของประเทศอังกฤษมีทีมเข้าร่วม 20 ทีม ส่วนในฟุตบอลลีกของประเทศเยอรมนีมีทีมเข้าร่วม 18 ทีม เป็นต้น

รูปแบบการแข่งขันฟุตบอลลีกนั้นก็จะมีเหมือนกันทุกประเทศ การแข่งขันตั้งแต่เริ่มต้นจนจบจะเรียกว่า **ฤดูกาล (season)** และในหนึ่งฤดูกาลจะแบ่งออกเป็นสอง**ครึ่งฤดูกาล** ซึ่งในแต่ละครั้งนั้นจะเป็นการแข่งขันแบบพบกันหมด คู่ละ 1 ครั้ง ดังนั้นจะเห็นว่าแต่ละทีมจะได้แข่งกับคู่แข่งทีละ 2 แมตช์ การแข่งขันนั้นจะจัดแข่งในทุก ๆ สัปดาห์ (ส่วนมากจะแข่งกันในวันหยุดสุดสัปดาห์) จะเรียกการแข่งขันในแต่ละสัปดาห์เดียวกันว่า**รอบการแข่งขัน (round)** เนื่องจากเหตุผลด้านการถ่ายทอดสดและลดการได้เปรียบเสียเปรียบในการแข่งขัน จึงต้องกำหนดให้ในแต่ละรอบการแข่งขันนั้นทุกทีมจะต้องมีแมตช์แข่งขัน 1 แมตช์ (ทุกทีมต้องมีแมตช์แข่งในทุกสัปดาห์) ซึ่งทำให้ได้ว่าฟุตบอลลีกจะมีทีมที่เข้าร่วมการแข่งขันเป็นจำนวนคู่เสมอ เราจะเรียกการแข่งขันในลักษณะเดียวกับครึ่งฤดูกาลนี้ว่า **ทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบ**

(round robin tournament) โดยในบทความของเรานี้จะพิจารณาการแข่งขันเฉพาะครึ่งฤดูกาลแรกเท่านั้น เพราะครึ่งฤดูกาลหลังสามารถจัดการแข่งขันแบบเดียวกันได้ตัวอย่าง

ของการจัดตารางแข่งฟุตบอลลีกนั้นได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 2 และรูปที่ 3

สิ่งที่เราจะพูดถึงในบทความนี้ เริ่มจากการเห็นว่าการแข่งฟุตบอลแต่ละแมตช์นั้นมีผลกระทบต่อเนื่องไปถึงการแข่งขันแมตช์ในสัปดาห์ถัดไป เนื่องจากว่ากีฬาฟุตบอลเป็นกีฬาที่ร่างกายต้องปะทะกัน การแข่งกับทีมที่แข็งแกร่ง วิ่งเยาะ หรือใช้ร่างกายปะทะหนักๆ ย่อมมีผลทำให้นักกีฬาในทีมเหนื่อย อ่อนล้า และเสี่ยงต่ออาการบาดเจ็บ ซึ่งจะเป็นผลดีแก่ทีมที่จะต้องแข่งกับเราถัดไป เช่น ทีม A ต้องแข่งกับทีม B และแข่งกับทีม C ในสัปดาห์ถัดไป เราจะเรียกเหตุการณ์แบบนี้ว่า **C ได้รับผลยกยอด (carry-over effect) จาก B** ถ้าทีม B เป็นทีมที่มีนักเตะเก่ง ๆ มากมายและเน้นการเข้าปะทะกับคู่ต่อสู้แรง ๆ ผลประโยชน์จะตกไปอยู่กับทีม C แน่ๆ จะเห็นว่าถ้าทีมที่ต้องแข่งกับทีมที่เพิ่งเจอ B มาในแมตช์ก่อนหน้านี้บ่อย ๆ ทีมนั้นก็จะได้ผลประโยชน์ในส่วนนี้อยู่หลาย

ครั้ง ดังนั้นในการแข่งขันเราควรจะลดการได้รับผลยกยอดจากทีมต่าง ๆ ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการจัดการแข่งขันดังกล่าว โดยเฉพาะอย่างยิ่งในฟุตบอลลีกของประเทศไทยและประเทศสเปน

2. ทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบ (Round Robin Tournaments)

2.1 การแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ (One Factorizations)

เพื่อความง่ายในการศึกษาเราอาจจะมองการแข่งขันครั้งฤดูกาลที่กล่าวมานั้นในรูปแบบของกราฟโดยให้แต่ละจุดยอดแทนทีมที่เข้าแข่งขัน และแต่ละเส้นเชื่อม $\{x, y\}$ แทนแมตช์ที่แข่งกันระหว่างทีม x และทีม y ให้การแข่งขันแบบทัวร์นาเมนต์แบบรอบของเรานั้นมีทีมที่เข้าร่วม $2n$ ทีม เนื่องจากการแข่งขันทั้งหมดเป็นการแข่งแบบพบกันหมดกราฟที่มีเส้นเชื่อม

Gameweek	Gameweek 1	Gameweek 2	Gameweek 3	Gameweek 4	Gameweek 5
Date	13 Aug 2016	20 Aug 2016	27 Aug 2016	10 Sep 2016	17 Sep 2016
Middlesbrough	Stoke City (H)	Sunderland (A)	West Bromwich Albion (A)	Crystal Palace (H)	Everton (A)
Crystal Palace	West Bromwich Albion (H)	Tottenham Hotspur (A)	AFC Bournemouth (H)	Middlesbrough (A)	Stoke City (H)
Everton	Tottenham Hotspur (H)	West Bromwich Albion (A)	Stoke City (H)	Sunderland (A)	Middlesbrough (H)
Manchester City	Sunderland (H)	Stoke City (A)	West Ham United (H)	Manchester United (A)	AFC Bournemouth (H)
Manchester United	AFC Bournemouth (A)	Southampton (H)	Hull City (A)	Manchester City (H)	Watford (A)
Tottenham Hotspur	Everton (A)	Crystal Palace (H)	Liverpool (H)	Stoke City (A)	Sunderland (H)
West Bromwich Albion	Crystal Palace (A)	Everton (H)	Middlesbrough (H)	AFC Bournemouth (A)	West Ham United (H)
AFC Bournemouth	Manchester United (H)	West Ham United (A)	Crystal Palace (A)	West Bromwich Albion (H)	Manchester City (A)
Chelsea	West Ham United (H)	Watford (A)	Burnley (H)	Swansea City (A)	Liverpool (H)
Hull City	Leicester City (H)	Swansea City (A)	Manchester United (H)	Burnley (A)	Arsenal (H)
Leicester City	Hull City (A)	Arsenal (H)	Swansea City (H)	Liverpool (A)	Burnley (H)
Stoke City	Middlesbrough (A)	Manchester City (H)	Everton (A)	Tottenham Hotspur (H)	Crystal Palace (A)
Swansea City	Burnley (A)	Hull City (H)	Leicester City (A)	Chelsea (H)	Southampton (A)
West Ham United	Chelsea (A)	AFC Bournemouth (H)	Manchester City (A)	Watford (H)	West Bromwich Albion (A)
Arsenal	Liverpool (H)	Leicester City (A)	Watford (A)	Southampton (H)	Hull City (A)
Southampton	Watford (H)	Manchester United (A)	Sunderland (H)	Arsenal (A)	Swansea City (H)
Sunderland	Manchester City (A)	Middlesbrough (H)	Southampton (A)	Everton (H)	Tottenham Hotspur (A)
Burnley	Swansea City (H)	Liverpool (A)	Chelsea (A)	Hull City (H)	Leicester City (A)
Liverpool	Arsenal (A)	Burnley (H)	Tottenham Hotspur (A)	Leicester City (H)	Chelsea (A)
Watford	Southampton (A)	Chelsea (H)	Arsenal (H)	West Ham United (A)	Manchester United (H)

รูปที่ 2 : การจัดตารางแข่ง 5 สัปดาห์แรกของการแข่งขันฟุตบอลพรีเมียร์ลีกฤดูกาล 2016/17

(ที่มา: <http://fantasypremierleague.tips/> วันที่ 9 ธันวาคม 2559)






Premier League 2013-14

Aug 17 Opening fixtures
 May 11 Final day fixtures

	Arsenal	Aston Villa	Cardiff	Chelsea	C. Palace	Everton	Fulham	Hull City	Liverpool	Man. City	Man. Utd	Newcastle	Norwich City	Southampton	Stoke City	Sunderland	Swansea City	Tottenham	West Brom	West Ham
Arsenal		Aug 17	Jan 1	Dec 21	Feb 1	Dec 7	Jan 18	Dec 3	Nov 2	Mar 29	Feb 11	Apr 26	Oct 19	Nov 23	Sep 21	Feb 22	Mar 8	Aug 31	May 3	Apr 12
Aston Villa	Jan 11		Nov 9	Mar 15	Dec 26	Oct 26	Apr 5	May 3	Aug 24	Sep 28	Dec 14	Sep 14	Mar 1	Apr 19	Mar 22	Nov 30	Dec 28	Oct 19	Jan 28	Feb 8
Cardiff	Nov 30	Feb 11		May 11	Apr 5	Aug 31	Mar 8	Feb 22	Mar 22	Aug 24	Nov 23	Oct 5	Feb 1	Dec 26	Apr 19	Dec 28	Nov 2	Sep 21	Dec 14	Jan 11
Chelsea	Mar 22	Aug 31	Oct 19		Dec 14	Feb 22	Sep 21	Aug 17	Dec 28	Oct 26	Jan 18	Feb 8	May 3	Nov 30	Apr 5	Apr 19	Dec 26	Mar 8	Nov 9	Jan 29
C. Palace	Oct 26	Apr 12	Dec 7	Mar 29		Nov 9	Oct 19	Jan 28	May 3	Apr 26	Feb 22	Dec 21	Jan 1	Mar 8	Jan 18	Aug 31	Sep 21	Aug 17	Feb 8	Dec 3
Everton	Apr 5	Feb 1	Mar 15	Sep 14	Feb 12		Dec 14	Oct 19	Nov 23	May 3	Apr 19	Sep 28	Jan 11	Dec 28	Nov 30	Dec 26	Mar 22	Nov 2	Aug 24	Mar 1
Fulham	Aug 24	Dec 7	Sep 28	Mar 1	May 11	Mar 29		Apr 26	Feb 12	Dec 21	Nov 2	Mar 15	Apr 12	Feb 1	Oct 5	Jan 11	Nov 23	Dec 4	Sep 14	Jan 1
Hull City	Apr 19	Oct 5	Sep 14	Jan 11	Nov 23	May 11	Dec 28		Nov 30	Mar 15	Dec 26	Mar 1	Aug 24	Feb 11	Dec 14	Nov 2	Apr 5	Feb 1	Mar 22	Sep 28
Liverpool	Feb 8	Jan 18	Dec 21	Apr 26	Oct 5	Jan 28	Nov 9	Jan 1		Apr 12	Aug 31	May 11	Dec 3	Sep 21	Aug 17	Mar 8	Feb 22	Mar 29	Oct 26	Dec 7
Manchester City	Dec 14	Mar 8	Jan 18	Feb 1	Dec 28	Oct 5	Mar 22	Aug 31	Sep 21	Aug 17	Nov 2	Apr 5	Feb 22	Feb 12	Nov 30	Nov 23	Apr 19	Nov 23	Apr 19	May 11
Manchester Utd	Nov 9	Mar 29	Jan 28	Aug 24	Sep 14	Dec 3	Feb 8	Apr 12	Mar 15	Mar 1		Dec 7	Apr 26	Oct 19	Oct 26	May 3	Jan 11	Jan 1	Sep 28	Dec 21
Newcastle Utd	Dec 28	Feb 22	May 3	Nov 2	Mar 22	Mar 8	Aug 31	Sep 21	Oct 19	Jan 11	Apr 5		Nov 23	Dec 14	Dec 26	Feb 1	Apr 19	Feb 12	Nov 30	Aug 24
Norwich City	May 11	Sep 21	Oct 26	Oct 5	Nov 30	Aug 17	Sep 19	Feb 8	Dec 28	Jan 28	Aug 31	Mar 8		Aug 24	Feb 11	Dec 14	Feb 22	Apr 5	Nov 9	
Southampton	Jan 28	Dec 3	Apr 12	Jan 1	Sep 28	Apr 26	Oct 26	Nov 9	Mar 1	Dec 7	May 11	Mar 29	Mar 15		Feb 8	Aug 24	Oct 5	Dec 21	Jan 11	Sep 14
Stoke City	Mar 1	Dec 21	Dec 3	Feb 7	Aug 24	Jan 1	May 3	Mar 29	Jan 11	Sep 14	Feb 1	Apr 12	Sep 28	Nov 2	Nov 23	Feb 11	Apr 26	Oct 19	Mar 15	
Sunderland	Sep 14	Jan 1	Apr 26	Dec 3	Mar 15	Apr 12	Aug 17	Feb 8	Sep 28	Nov 9	Oct 5	Oct 26	Dec 21	Jan 18	Jan 28		May 11	Dec 7	Mar 1	Mar 29
Swansea City	Sep 28	Apr 26	Feb 8	Apr 12	Mar 1	Dec 21	Jan 28	Dec 7	Sep 14	Jan 1	Aug 17	Dec 3	Mar 29	May 3	Nov 9	Oct 19	Jan 18	Mar 15	Oct 26	
Tottenham Hotspur	Mar 15	May 11	Mar 1	Sep 28	Jan 11	Feb 8	Apr 19	Oct 26	Dec 14	Jan 29	Nov 30	Nov 9	Sep 14	Mar 22	Dec 28	Apr 5	Aug 24	Dec 26	Oct 5	
West Bromwich Albion	Oct 5	Nov 23	Mar 29	Feb 11	Nov 2	Jan 18	Feb 22	Dec 21	Feb 1	Dec 3	Mar 8	Jan 1	Dec 7	Aug 17	May 11	Sep 21	Aug 31	Apr 12	Apr 26	
West Ham United	Dec 26	Nov 2	Aug 17	Nov 23	Apr 19	Sep 21	Nov 30	Mar 8	Apr 5	Oct 19	Mar 22	Jan 18	Feb 11	Feb 22	Aug 31	Dec 14	Feb 1	May 3	Dec 28	

Home games read horizontally, away games vertically

Information © Football DataCo Limited.

© GRAPHIC NEWS

รูปที่ 3 : ตารางแข่งขันของฟุตบอลพรีเมียร์ลีกฤดูกาล 2013/14

(ที่มา: <https://naveenpeter21.wordpress.com/> วันที่ 9 ธันวาคม 2559)

จากทุกแมตซ์ในการแข่งขันจะเป็นกราฟบริบูรณ์ K_{2n} เห็นได้ชัดว่าในแต่ละรอบการแข่งขันนั้นมีการแข่งขันทั้งหมด n แมตซ์ ดังนั้นกราฟที่แสดงการแข่งขันในแต่ละรอบการแข่งขันก็คือกราฟย่อยของ K_{2n} ที่มีเส้นเชื่อมทั้งหมด n เส้นโดยที่แต่ละเส้นจะไม่มีจุดปลายที่ซ้ำกัน เราจะเรียกแต่ละกราฟย่อยเหล่านี้ว่า

1-แฟกเตอร์ (1-factor) ของ K_{2n} เนื่องจากทุก 1-แฟกเตอร์เป็นกราฟที่เซตของจุดยอดคือเซตของจุดใน K_{2n} ดังนั้นเราสามารถกล่าวถึง 1-แฟกเตอร์โดยพิจารณาเฉพาะเส้นเชื่อมได้ กำหนดให้การแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ (**1-factorization**) F ของ K_{2n} คือ เซต

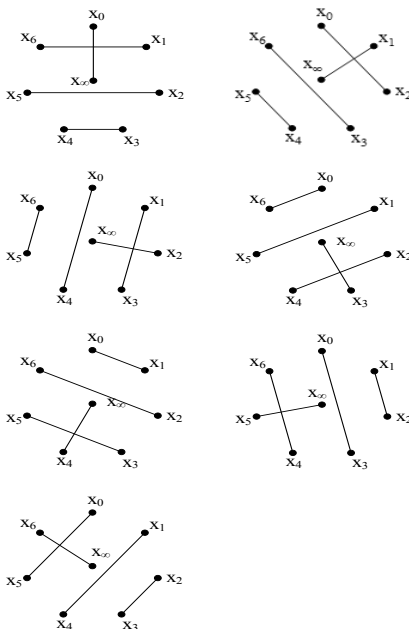
$F = \{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}$ โดยที่แต่ละ F_i เป็น 1-แฟกเตอร์ของ K_{2n} และไม่มี F_i สองอันใดๆ ที่มีเส้นเชื่อมซ้ำกัน จะเห็นได้โดยง่ายว่าการจัดตารางแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่มีทีมเข้าร่วม $2n$ ทีมก็คือการหาการแยกตัวประกอบ

1-แฟกเตอร์ของ K_{2n} นั่นเอง ทฤษฎีบทที่รู้จักกันดีต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าเราสามารถจัดตารางการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบสำหรับ $2n$ ทีมได้เสมอ

ทฤษฎีบทที่ 1 [1] กราฟบริบูรณ์ K_{2n} มีการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ 1 มีอยู่ในหนังสือทางทฤษฎีกราฟทั่วไป (เช่น [1]) ในที่นี้เราจะยกตัวอย่างกรณี $n = 4$ โดยการยกตัวอย่างการจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่มีทีมฟุตบอลเข้าร่วมการแข่งขัน 8 ทีม เราสามารถจัดโดยการสร้างการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์สำหรับ K_8 ดังต่อไปนี้ ให้จุดยอดของ K_8 แทนด้วย $x_\infty, x_0, x_1, \dots, x_6$

เราจะได้ว่า $F = \{F_0, F_1, \dots, F_6\}$ คือ



รูปที่ 4 : 1-แฟกเตอร์ทั้ง 7 ของการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์สำหรับ K_8

การแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ของ K_8 โดยที่สำหรับ $i \in \{0, 1, \dots, 6\}$

กำหนดให้ F_i ประกอบไปด้วยเส้นเชื่อม $\{x_{i+1}, x_{i-1}\}, \{x_{i+2}, x_{i-2}\}, \{x_{i+3}, x_{i-3}\}$ เมื่อตัวห้อยที่ไม่ใช่ ∞ คือจำนวนเต็มในมอดุโล 7

หลังจากที่เราได้การแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ของ K_8 แต่ละ 1-แฟกเตอร์จะถูกมองเป็นหนึ่งรอบการแข่งขัน และเส้นเชื่อมในแต่ละ 1-แฟกเตอร์ ก็คือ แมตซ์การแข่งขันในรอบนั้นๆ ถ้าเรานำ 1-แฟกเตอร์ของ K_8 ทั้งหมดในรูปที่ 4 มาแปลงเป็นตารางการแข่งขันในแต่ละรอบโดยการแทน x_∞ ด้วยทีมหมายเลข 1 และแทน x_i ด้วยทีมหมายเลข $i+2$ เราก็จะได้ตารางการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่แสดงในตารางที่ 1 ในทำนองเดียวกันเราสามารถสร้างตารางการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบ

ตารางที่ 1 : การจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่มีทีมเข้าร่วมแข่งขัน 8 ทีม

รอบการแข่งขัน	แมตซ์การแข่งขัน
รอบ F_0	1 vs 2 3 vs 8 4 vs 7 5 vs 6
รอบ F_1	1 vs 3 2 vs 4 5 vs 8 6 vs 7
รอบ F_2	1 vs 4 3 vs 5 2 vs 6 7 vs 8
รอบ F_3	1 vs 5 4 vs 6 3 vs 7 2 vs 8
รอบ F_4	1 vs 6 5 vs 7 4 vs 8 2 vs 3
รอบ F_5	1 vs 7 6 vs 8 2 vs 5 3 vs 4
รอบ F_6	1 vs 8 2 vs 7 3 vs 6 4 vs 5

สร้างตารางการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบให้กับการแข่งขันฟุตบอลลีกที่มีจำนวนทีมเข้าแข่งขันเป็นจำนวนคู่ได้ด้วยวิธีเดียวกันนี้เสมอ อย่างไรก็ตามอาจจะมีการสร้างการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์สำหรับ K_{2n} ที่แตกต่างกันได้หลายแบบด้วยวิธีอื่น ๆ อีก ซึ่งจะกล่าวถึงถัดไป

2.2 ทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอด (Round Robin

Tournament Balanced For Carry-over)

เพื่อที่จะสร้างการจัดตารางแข่งทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบให้แต่ละทีมมีการคละการได้รับผลยกยอดจากทีมต่าง ๆ เราจะเริ่มต้นด้วยการกำหนดสัญลักษณ์ต่าง ๆ เพื่ออำนวยความสะดวก

กำหนดให้การแข่งขันฟุตบอลลีกหนึ่งมีทีมเข้าแข่งขัน $2n$ ทีม และให้ S เป็นเซตของจุดยอดที่แทนทีมที่เข้าแข่งขัน พิจารณาตารางการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่จัดโดยการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์



$F = \{F_0, F_1, \dots, F_{2n-2}\}$ ของ K_{2n} ที่มี S เป็นเซตของจุดยอด สำหรับ $i \in \{0, 1, \dots, 2n-2\}$

กำหนดให้ x_i เป็นทีมที่แข่งกับ x ในการแข่งขันรอบ F_i ดังนั้น $F_i = \{\{x, x_i\} : x \in S\}$

สมมติในการแข่งขันรอบ F_j นั้น x แข่งกับ z และในรอบ F_{j+1} นั้น y แข่งกับ z ซึ่งจะได้ว่า

$x_j = z$ และ $y_{j+1} = z$ นั่นคือ $x_j = y_{j+1}$

จะเห็นว่าในรอบ F_{j+1} นั้น y จะได้รับผลยกยอดจาก x เราจึงเรียก x นี้ว่า **ตัวนำหน้า (predecessor)** ของ y ในรอบ F_j เขียนแทนด้วย

$p_j(y)$ ในอีกทางหนึ่งเราบอกได้ว่า x เป็นตัวนำหน้าของ y ในรอบ F_j ก็ต่อเมื่อมีทีม z ที่มีสมบัติว่า x แข่งกับ z เป็นแมตช์ในรอบ F_j และ

แข่งกับ z เป็นแมตช์ในรอบ F_{j+1} นอกจากนั้น

ถ้า $x_{2n-2} = y_1$ แล้วเราจะกำหนดให้ $x = p_{2n-2}(y)$

พิจารณาตัวอย่างในตารางที่ 1 จะเห็นว่า

$p_0(2) = 7, p_1(2) = 7, p_2(2) = 7,$

$p_3(2) = 7, p_4(2) = 7, p_5(2) = 1, p_6(2) = 8$

สังเกตว่ามี j ที่ทำให้ $p_j(2) = 7$ ถึง 5

ครั้ง ซึ่งหมายความว่าทีมหมายเลข 2 ได้รับผลยกยอดจากทีมหมายเลข 7 ถึง 5 แมตช์ ถ้าทีมหมายเลข 7 เป็นทีมที่แข็งแกร่งและเล่นเข้าปะ-

ทะหนัก ทีมหมายเลข 2 จะได้ผลประโยชน์จากการที่คู่ต่อสู้เหนื่อยล้ามาจากการแข่งกับทีม

หมายเลข 7 ถึง 5 แมตช์จากทั้งหมด 7 แมตช์ แต่ในทางกลับกัน ถ้าทีมหมายเลข 7 เป็นทีมที่

ไม่เก่ง ทีมหมายเลข 2 ก็จะได้รับผลประโยชน์ให้กับทีมอื่น ๆ หลายแมตช์เลยทีเดียว ดังนั้นจะ

เห็นว่าการจัดตารางการแข่งขันดังตารางที่ 1 เป็นการจัดตารางที่ไม่ยุติธรรมนัก เพื่อให้ไม่

เป็นการได้เปรียบเสียเปรียบ เราควรจัดตารางการแข่งขันให้ค่า $p_j(2)$ นั้นมีค่าแตกต่างกัน

ทั้งหมด เช่นเดียวกันสำหรับทุกทีม y นั้นควรมีค่า $p_j(y)$ แตกต่างกันทั้งหมด

กำหนดให้เซตของตัวนำหน้าของ y คือ

$$P(y) := \{p_j(y) : 0 \leq j \leq 2n-2\}$$

เราจะเรียกการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ $\mathcal{F}$ ว่า **สมดุลสำหรับภาวะยกยอด**

(balanced for carry-over) เมื่อ สำหรับทุก

$y \in S, p(y) = S \setminus \{y\}$ ซึ่งหมายความว่าแต่ละทีม y จะได้รับผลยกยอดจากทีมอื่นทุกทีมไม่ซ้ำกัน

ดังนั้น การสร้างการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดนี้เองคือ

ตารางการแข่งขันฟุตบอลลีกที่เราต้องการในปัญหาข้างต้น

ในการแข่งขันฟุตบอลลีกที่มี 8 ทีม เราสามารถจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดได้ดังที่แสดงในตารางที่ 2 ในทาง

กลับกัน W. D. Wallis ได้กล่าวเพิ่มเติมใน [1] ว่าถ้ามีทีมเข้าแข่งขัน 6 หรือ 10 ทีมนั้น เราจะ

ไม่สามารถจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดได้ นั่นก็แสดงว่าเรา

ไม่สามารถจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่

ตารางที่ 2 การจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดที่มีทีมเข้าร่วมแข่งขัน 8 ทีม

รอบการแข่งขัน	แมตช์การแข่งขัน			
รอบ F_0	1 vs 2	3 vs 7	4 vs 5	6 vs 8
รอบ F_1	1 vs 3	4 vs 8	5 vs 6	7 vs 2
รอบ F_2	1 vs 4	5 vs 2	6 vs 7	8 vs 3
รอบ F_3	1 vs 5	6 vs 3	7 vs 8	2 vs 4
รอบ F_4	1 vs 6	7 vs 4	8 vs 2	3 vs 5
รอบ F_5	1 vs 7	8 vs 5	2 vs 3	4 vs 6
รอบ F_6	1 vs 8	2 vs 6	3 vs 4	5 vs 7





สำหรับภาวะยกยอดได้เสมอไป ดังนั้นการจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดให้กับการแข่งขันต่าง ๆ จึงเป็นคำถามที่ท้าทาย

3. การจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดให้กับฟุตบอลลีกของประเทศไทย

ปัจจุบันฟุตบอลเป็นกีฬาที่ได้รับความนิยมในประเทศไทย



โดยการแข่งขันฟุตบอลลีกที่ถูกจัดอย่างเป็นทางการโดยสมาคมกีฬาฟุตบอลแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์คือการแข่งขันฟุตบอลโตโยต้า ไทยลีก (Toyota Thai League) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ไทยลีก ซึ่งการแข่งขันไทยลีกนี้มีมูลค่าทางการสูงมาก มีเงินสะพัดปีละมากกว่าหมื่นล้านบาท [2] อีกทั้งยังมียอดผู้เข้าชมต่อแมตช์การแข่งขันเฉลี่ยมากกว่า 5,000 คน [3] อีกทั้งมีส่วนช่วยในการพัฒนาและผลิตนักฟุตบอลทีมชาติไทยเป็นอย่างมาก

การแข่งขันไทยลีกในปัจจุบัน (พ.ศ. 2560) นั้นจะมีทีมเข้าร่วมแข่งขัน 18 ทีม ดังนั้นเราจะต้องจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดสำหรับ 18 ทีม จากการศึกษาของผู้เขียนยังไม่พบว่าจะสามารถจัดการแข่งทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดสำหรับ 18 ทีมได้ อย่างไรก็ตามในปี 1980 นั้น K. G. Russell ได้ศึกษาการจัดตารางแข่งทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบให้มีการได้เปรียบเสียเปรียบจากการได้รับผลยกยอดไม่

มากจนเกินไปสำหรับ p^{m+1} ทีมเมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะบวกและ m เป็นจำนวนเต็มบวก ผู้อ่านสามารถศึกษาต่อได้ใน [4] ซึ่งจะสามารถนำมาใช้กับการจัดแข่งขันฟุตบอลไทยลีกได้ โดยให้ $p=17$ และ $m=1$

อย่างไรก็ตาม ในวันที่ 28 พฤศจิกายน 2559 พล.ต.อ.สมยศ พุ่มพันธุ์ม่วงนายกสมาคมฟุตบอลแห่งประเทศไทย (ในพระบรมราชูปถัมภ์) ได้เปิดเผยผลในที่ประชุมของสมาคมฯ ว่าในปีพ.ศ. 2562 นั้น ไทยลีกจะมีการเปลี่ยนแปลงทีมที่ลงแข่งให้ลดลงเหลือ 16 ทีม [5] ซึ่งถ้ามีประกาศให้ออกมาอย่างเป็นทางการแล้ว เราสามารถใช้ความรู้เรื่องฟิลด์จำกัดในการจัดตารางแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดให้กับฟุตบอลลีกได้ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

ฟิลด์ (field) คือ เซตภายใต้การดำเนินการทวิภาค $+$ และ $\times$ ที่สอดคล้องกับสมบัติบางประการ ผู้อ่านสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน [6] และ [7] ในบางครั้งเราอาจจะเขียน ab แทน $a \times b$ ได้ ถ้าฟิลด์หนึ่งเกิดจากเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว จะเรียกฟิลด์นั้นว่า **ฟิลด์จำกัดขนาด n (finite field of order n)** เขียนแทนด้วย $GF(n)$ โดยขนาดของฟิลด์ที่เป็นไปได้นั้นต้องอยู่ในรูป p^m เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะบวกและ m เป็นจำนวนนับ โดยทั่วไปถ้าเราสามารถหาพหุนาม $f(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มมอดุโล p ที่ลดทอนไม่ได้ (irreducible polynomial) ดีกรี m เราสามารถเขียนสมาชิกของฟิลด์ขนาด p^m ได้ด้วยพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มมอดุโล p ที่ดีกรีน้อยกว่า m นั่นคือ



$$GF(p^m) = \{a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_0 : a_i \in \mathbb{Z}_p\}$$

ส่วนการดำเนินการทวิภาคทั้งสองก็คือการ + และ $\times$ ที่กระทำกับพหุนามตามปกติ โดยมีเงื่อนไขว่า $f(x) = 0$ ยกตัวอย่างเช่น พิลด์ขนาด $2^3 = 8$ สามารถเขียนแทนด้วย

$$GF(8) = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}$$

โดยมีการดำเนินการบวกเป็นการบวกพหุนามสัมประสิทธิ์มอดุโล p และการดำเนินการคูณตามตารางที่ 3 ในแต่ละฟิลด์จำกัดนั้นจะมีสมาชิก ξ ที่สอดคล้องกับ

$\{\xi^i : i \in \mathbb{N}\} = GF(n) \setminus \{0\}$ เราจะเรียกสมาชิกดังกล่าวว่าสมาชิกปฐมฐาน (primitive element) ของฟิลด์

ในตัวอย่างฟิลด์ขนาด 8 เราพบว่า $\xi = x+1$ เป็นสมาชิกปฐมฐาน เพราะว่า $\xi = x+1, \xi^2 = x^2+1, \xi^3 = x^2, \xi^4 = x^2+x+1, \xi^5 = x, \xi^6 = x^2+x$ และ $\xi^7 = 1$ ดังนั้น

$$GF(8) \setminus \{0\} = \{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^6\}$$

ซึ่งความรู้เหล่านี้จะถูกนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป

ตารางที่ 3 ตารางแสดงการดำเนินการคูณของสมาชิกใน $GF(8)$

$a \times b$	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
x	0	x	x^2	x^2+x	$x+1$	1	x^2+x+1	x^2+1
$x+1$	0	$x+1$	x^2+x	x^2+1	x^2+x+1	x^2	1	x
x^2	0	x^2	$x+1$	x^2+x+1	x^2+x	x	x^2+1	1
x^2+1	0	x^2+1	1	x^2	x	x^2+x+1	$x+1$	x^2+x
x^2+x	0	x^2+x	x^2+x+1	1	x^2+1	$x+1$	x	x^2
x^2+x+1	0	x^2+x+1	x^2+1	x	1	x^2+x	x^2	$x+1$

ทฤษฎีบทที่ 2 [4] สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m จะมีทวิรนาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดที่มีทิมเข้าแข่งขันเป็น 2^m เสมอ

พิสูจน์ สมมติให้จำนวนทิมทั้งหมดในการแข่งขันคือ 2^m ทิม เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกให้ ξ เป็นสมาชิกปฐมฐานของฟิลด์ $GF(2^m)$ เมื่อเราให้ $S = GF(2^m)$ จะได้ว่า

$$S = \{0, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2^m-2}, 1\}$$

กำหนดให้ $F_0 = \{z, z+1\} : z \in S$ ดังนั้น

F_0 เป็น 1-แพกเตอร์ และสำหรับแต่ละ

$i \in \{1, \dots, 2^m-2\}$ ให้

$F_i = \{\{\xi^i z, \xi^i(z+1)\} : z \in S\}$ (F_i เป็น 1-แพกเตอร์ เพราะว่าจุดยอดทุกจุดของ $GF(2^m)$ ปรากฏในเซตที่เป็นสมาชิกของ F_i)

ถ้า $x = \xi^i z$ จะได้ว่า

$$x_i = \xi^i(z+1) = x + \xi^i.$$

ให้ $p_j(y) = x$ จะได้ว่า $x_j = y_{j+1},$

$$x + \xi^j = y + \xi^{j+1},$$

$$x = y + \xi^j(1 + \xi)$$

ดังนั้น $P(y) = \{y + \xi^j(1 + \xi) : 0 \leq j \leq 2^m-2\}$



สังเกตว่า ξ^j เป็นสมาชิกที่ไม่ใช่ศูนย์ของ S และมีค่าแตกต่างกันทุกตัวเมื่อ $0 \leq j \leq 2^m - 2$ ซึ่งเป็นเช่นเดียวกันกับ $\xi^j(1+\xi)$ เพราะฉะนั้น

$$\{\xi^j(1+\xi) : 0 \leq j \leq 2^m - 2\} = S \setminus \{0\}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $P(y) = S \setminus \{y\}$ นั่นก็คือ

$$F = \{F_0, F_1, \dots, F_{2^m-2}\}$$

สร้างทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอด

ต่อไปจะแสดงการใช้ทฤษฎีบทที่ 2 สร้างการจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดที่มีทีมเข้าร่วมแข่งขัน 16 ทีม

เราทราบว่า x^4+x+1 เป็นพหุนามมี

สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มมอดุโล 2 ที่ลดทอนไม่ได้ดีกรี 4 จึงสามารถเขียนได้ว่า

$$GF(16) = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3, x^3+1, x^3+x, x^3+x+1, x^3+x^2, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+x^2+x+1\}$$

ใช้ $\xi = x$ เป็นสมาชิกปฐมฐาน และ

$$S = \{0, 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{14}\} \text{ ดังนั้น}$$

$$F_0 = \{\{z, z+1\} : z \in S\} \\ = \{\{0, 1\}, \{\xi, \xi^4\}, \{\xi^2, \xi^8\}, \{\xi^3, \xi^{14}\}, \{\xi^5, \xi^{10}\}, \{\xi^6, \xi^{13}\}, \{\xi^7, \xi^9\}, \{\xi^{11}, \xi^{12}\}\}$$

$$F_1 = \{\{\xi z, \xi(z+1)\} : z \in S\} \\ = \{\{0, \xi\}, \{\xi^2, \xi^5\}, \{\xi^3, \xi^9\}, \{\xi^4, 1\}, \{\xi^6, \xi^{11}\}, \{\xi^7, \xi^{14}\}, \{\xi^8, \xi^{10}\}, \{\xi^{12}, \xi^{13}\}\}$$

$$F_2 = \{\{\xi^2 z, \xi^2(z+1)\} : z \in S\} \\ = \{\{0, \xi^2\}, \{\xi^3, \xi^6\}, \{\xi^4, \xi^{10}\}, \{\xi^5, \xi\}, \{\xi^7, \xi^{12}\}, \{\xi^8, 1\}, \{\xi^9, \xi^{11}\}, \{\xi^{13}, \xi^{14}\}\}$$

⋮

$$F_{14} = \{\{\xi^{14} z, \xi^{14}(z+1)\} : z \in S\} \\ F_{14} = \{\{0, \xi^{14}\}, \{1, \xi^3\}, \{\xi, \xi^7\}, \{\xi^2, \xi^{13}\}, \{\xi^4, \xi^9\}, \{\xi^5, \xi^{12}\}, \{\xi^6, \xi^8\}, \{\xi^{10}, \xi^{11}\}\}$$

เราก็จะได้การแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดสำหรับ K_8

ถ้า 1-แฟกเตอร์ F_j แสดงถึงการแข่งขันรอบ F_j เมื่อแทน 0 ด้วยทีมหมายเลข 1 และแทน ξ^i ด้วยทีมหมายเลข $i+1$ เราจะได้การจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดที่มีทีมเข้าร่วมแข่งขัน 16 ทีมที่ปรากฏอยู่ในตารางที่ 4 ดังนั้นเราสามารถใช้อัลกอริทึมที่ 2 ในการจัดตารางการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดให้กับการแข่งขันฟุตบอลไทยลีกที่กำลังจะมีทีมเข้าแข่งขัน 16 ทีมในอนาคตได้โดยใช้ฟิลต์ที่มีขนาด 16 เข้ามาช่วย

4. การจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดให้กับฟุตบอลลีกของประเทศสเปน

หลายปีที่ผ่านมา

นี้ฟุตบอลลีกที่ได้รับ

ความสนใจมากที่สุด

ลีกหนึ่งก็คือลาลีกา ซึ่งเป็นการแข่งขันฟุตบอลลีกของประเทศสเปนโดยมีทีมจากสโมสรที่เข้าร่วมทั้งหมด 20 สโมสร ความสนใจเกือบทั้งหมดของผู้ที่ติดตามลาลีกาทั่วโลกนั้นตกไปที่ทีมจากสองสโมสรดังอย่าง สโมสรบาเซโลน่า (FC Barcelona) และ สโมสรเรียลมาดริด (Real Madrid C.F.) เนื่องจากเป็นสโมสรที่รวบรวมนักเตะชื่อดังระดับโลกไว้มากมาย และเป็นสองสโมสรที่แย่งแชมป์กันมาตลอด สโมสรที่แข่งกับสองสโมสรนี้มักจะตั้งใจและมุ่งมั่นมากเพราะต้องการที่จะไม่แพ้สองทีมดังนี้ให้ได้ เป็นผลให้นักกีฬาที่จะต้องแข่งกับสองทีมนี้อาจจะได้รับความเหนื่อยล้ากว่าปกติในการแข่งขันฟุตบอลลาลีกาฤดูกาล





ตารางที่ 4 การจัดทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอที่มีทีมเข้าร่วมแข่งขัน 16 ทีม

รอบ	แมตช์การแข่งขัน							
F_0	1 vs 16	2 vs 5	3 vs 9	4 vs 15	6 vs 11	7 vs 14	8 vs 10	12 vs 13
F_1	1 vs 2	3 vs 6	4 vs 10	5 vs 16	7 vs 12	8 vs 15	9 vs 11	13 vs 14
F_2	1 vs 3	4 vs 7	5 vs 11	6 vs 2	8 vs 13	9 vs 16	10 vs 12	14 vs 15
F_3	1 vs 4	5 vs 8	6 vs 12	7 vs 3	9 vs 14	10 vs 2	11 vs 13	15 vs 16
F_4	1 vs 5	6 vs 9	7 vs 13	8 vs 4	10 vs 15	11 vs 3	12 vs 14	16 vs 2
F_5	1 vs 6	7 vs 10	8 vs 14	9 vs 5	11 vs 16	12 vs 4	13 vs 15	2 vs 3
F_6	1 vs 7	8 vs 11	9 vs 15	10 vs 6	12 vs 2	13 vs 5	14 vs 16	3 vs 4
F_7	1 vs 8	9 vs 12	10 vs 16	11 vs 7	13 vs 3	14 vs 6	15 vs 2	4 vs 5
F_8	1 vs 9	10 vs 13	11 vs 2	12 vs 8	14 vs 4	15 vs 7	16 vs 3	5 vs 6
F_9	1 vs 10	11 vs 14	12 vs 3	13 vs 9	15 vs 5	16 vs 8	2 vs 4	6 vs 7
F_{10}	1 vs 11	12 vs 15	13 vs 4	14 vs 10	16 vs 6	2 vs 9	3 vs 5	7 vs 8
F_{11}	1 vs 12	13 vs 16	14 vs 5	15 vs 11	2 vs 7	3 vs 10	4 vs 6	8 vs 9
F_{12}	1 vs 13	14 vs 2	15 vs 6	16 vs 12	3 vs 8	4 vs 11	5 vs 7	9 vs 10
F_{13}	1 vs 14	15 vs 3	16 vs 7	2 vs 13	4 vs 9	5 vs 12	6 vs 8	10 vs 11
F_{14}	1 vs 15	16 vs 4	2 vs 8	3 vs 14	5 vs 10	6 vs 13	7 vs 9	11 vs 12

ปี 2008-2009 มีเหตุการณ์หนึ่งที่น่าสนใจมาก คือตารางการแข่งขันถูกจัดขึ้นโดยให้ทีมเกือบทั้งหมดที่ต้องแข่งกับสโมสรบาเซิลอนั้น ต้องแข่งกับสโมสรรีลมาดริดในรอบถัดไป นั่นคือทีมจากสโมสรรีลมาดริดได้รับผลยกยอจากทีมจากสโมสรบาเซิลอนาในเกือบทุกแมตช์ ดังที่แสดงในตารางที่ 5 จากเหตุการณ์ในครั้งนี้อาจเป็นที่ยกเถียงกันว่าการจัดตารางแข่งแบบนี้ทำให้ทีมจากสโมสรรีลมาดริดได้เปรียบในการแข่งขันหรือไม่

ทฤษฎีบทที่ 2 ทำให้เราสามารถจัดการแข่งทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอได้ในหลายกรณี แต่ก็ยังไม่เพียงพอสำหรับการนำไปแก้ปัญหาในการจัดการแข่งขันในฟุตบอลโลกของสเปนได้ เพราะว่าในลาลีกานั้นมีทีมเข้าร่วมแข่งขันอยู่ 20 ทีมซึ่งไม่ใช่จำนวนที่อยู่ในรูป 2^m จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1977 Ian Anderson [8]

นั้นสามารถหาการแข่งทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอสำหรับ 20 ทีมได้ ซึ่งการจัดตารางแข่งขึ้นดังกล่าวนี้ได้แนวคิดมาจากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ 1 หรือดังตัวอย่างการสร้างการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ของ K_8 นั่นเอง เริ่มต้นจากวงจุดหมายเลข $0, 1, 2, \dots, 18$ ลงบทเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุด ∞ เป็นจุดศูนย์กลางตามลำดับในทิศตามเข็มนาฬิกา กำหนดให้ F_0 แทน 1-แฟกเตอร์ดังต่อไปนี้

$$\{\{\infty, 0\}, \{1, 4\}, \{2, 9\}, \{3, 18\}, \{5, 13\}, 6, 11\}$$

$$\{7, 17\}, \{8, 14\}, \{10, 12\}, \{15, 16\}\}$$

โดยเขียนเป็นกราฟได้ดังรูปที่ 5 และสำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, 18\}$ กำหนด

$F_i = \{\{x+i, y+i\} : \{x, y\} \in F_0\}$ เมื่อ $\infty+i = \infty$ ซึ่งจะเห็นว่า $F_1, F_2, \dots, F_{18}$ เป็น 1-แฟกเตอร์ หรืออาจจะมองในอีกแง่หนึ่งได้ว่าสำหรับทุก F_i เป็น 1-แฟกเตอร์ที่เกิดจากการหมุนเส้นเชื่อมในรูปของ F_0 ให้มีเส้นเชื่อมระหว่าง ∞ กับ i



การสร้างการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ในลักษณะนี้เรียกว่าการสร้างโดยใช้ตัวเริ่ม (starter) ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ [1] โดย Anderson สามารถพิสูจน์ใน [8] ได้ว่าการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ $\{F_0, F_1, \dots, F_{18}\}$ มีความสมดุลสำหรับภาวะยกยอด ดังนั้นเราจึงสามารถจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอดสำหรับ 20 ทีมได้

5. การจัดการแข่งขันฟุตบอลให้เกิดความยุติธรรมในด้านอื่น ๆ

จากที่กล่าวมานั้นทำให้เราสามารถจัดการการแข่งขันฟุตบอลลีกของประเทศสเปนและฟุตบอลลีกในประเทศไทยให้สมดุลสำหรับภาวะยกยอดได้ แต่การศึกษานั้นเป็นการคำนึงถึงการได้รับผลยกยอดจากการแข่งขันในแมตช์ของรอบการแข่งขันก่อนหน้าเพียงหนึ่งรอบ

เท่านั้น ยิ่งไปกว่านั้นมีการศึกษาใน [9] ถึงการจัดตารางการแข่งขันทัวร์นาเมนต์ให้มีความสมดุลสำหรับภาวะยกยอด โดยคำนึงถึงการได้รับผลยกยอดที่ได้รับจากแมตช์การแข่งขันทุกแมตช์ที่ผ่านมาอีกด้วย

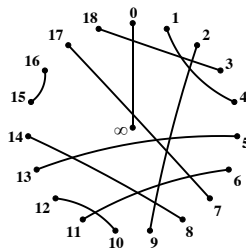
นอกจากนี้การแข่งขันฟุตบอลลีกยังมีการกำหนดให้ทุกทีมที่เข้าร่วมนั้นมีสนามฟุตบอลเป็นของตนเอง ดังนั้นในทุกแมตช์การแข่งขันจะถูกแบ่งเป็นแมตช์ทีมเหย้า (home team) คือแมตช์ที่ทีมนั้นได้เล่นในสนามของตนเอง และแมตช์ทีมเยือน (away team) คือแมตช์ที่ทีมนั้นต้องออกไปเล่นในสนามของคู่แข่ง เราจะเรียกการแข่งขันในลักษณะนี้ว่า การแข่งขันแบบเหย้า-เยือน (home-and-away schedule) เนื่องจากสองทีมใด ๆ จะต้องแข่งกัน 2 ครั้ง สองทีมนี้ก็จะสลับกันเล่นเป็นทีมเหย้าทีมละ 1 แมตช์ลำดับการเล่นแมตช์เหย้าหรือแมตช์เยือนให้มี

ตารางที่ 5 ตารางการแข่งขันฟุตบอลลีกาลีกของสโมสรบาเซโลนา และสโมสรรีลมาดริดในฤดูกาล 2008-2009

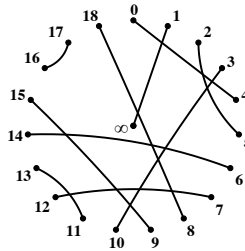
(ข้อมูลจาก : <http://www.football-lineups.com/> วันที่ 9 ธันวาคม 2559)

Match	Barcelona VS	Real Madrid VS
1	Numancia	Depor
2	Racing S.	Numancia
3	Sp.Gijon	Racing S.
4	Betis	Sp.Gijon
5	Espanyol	Betis
6	Athletico	Espanyol
7	Athletic	Athletico
8	Almeria	Athletic
9	Malaga	Almeria
10	Valladlid	Malaga
11	Recreativo	Valladlid
12	Getafe	Recreativo
13	Sevilla	Getafe
14	Valencia	Sevilla
15	Real	Barcelona
16	Villarreal	Valencia
17	Mallorca	Villarreal
18	Osasuna	Mallorca
19	Depor	Osasuna

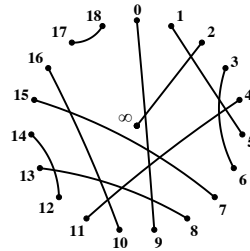
Match	Barcelona VS	Real Madrid VS
20	Numancia	Depor
21	Racing S.	Numancia
22	Sp.Gijon	Racing S.
23	Betis	Sp.Gijon
24	Espanyol	Betis
25	Athletico	Espanyol
26	Athletic	Athletico
27	Almeria	Athletic
28	Malaga	Almeria
29	Valladlid	Malaga
30	Recreativo	Valladlid
31	Getafe	Recreativo
32	Sevilla	Getafe
33	Valencia	Sevilla
34	Real	Barcelona
35	Villarreal	Valencia
36	Mallorca	Villarreal
37	Osasuna	Mallorca
38	Depor	Osasuna



F_0



F_1



F_2

รูปที่ 5 1-แฟกเตอร์ F_0, F_1, F_2 ของการสร้างการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ของ K_{20} ที่ใช้ในการสร้างทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับภาวะยกยอด

ความยุติธรรม บทความวิชาการ [10] ได้เขียนถึงการจัดตารางการแข่งขันโดยคำนึงถึงลำดับการเป็นทีมเหย้าทีมเยือนของการแข่งฟุตบอลแต่ละรอบการแข่งขัน ผู้อ่านสามารถศึกษาปัจจัยเหล่านี้ได้เพิ่มเติม เพื่อให้การจัดตารางการแข่งขันฟุตบอลลีกนี้ยุติธรรมมากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] W. D. Wallis, *Introduction to Combinatorial Designs*, 2nd ed. London England: Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [2] เกลินวิส. 2016. บอลไทยมาแรงแข่งลีกผู้ตัดสินเงินธุรกิจสะพัด 1.2 หมื่นล้าน. สืบค้นวันที่ 4 ธันวาคม 2559 จาก <http://www.dailynews.co.th/economic/515012>
- [3] วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี. 2016. ไทยลีก. สืบค้นวันที่ 4 ธันวาคม 2559 จาก https://th.wikipedia.org/wiki/ไทยลีก_2559
- [4] K. G. Russell, "Balancing carry-over effects in round robin tournaments," *Biometrika*, vol. 67, pp. 127-131, 1980.

- [5] สมาคมฟุตบอลแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์. 2016. *นายกสมาคมฟุตบอลเผยหลังการประชุมหารือเรื่องจัดแข่งขันฯ*. สืบค้นวันที่ 4 ธันวาคม 2559 จาก <http://fathailand.org/archives/14109>
- [6] วิรัตน์ สุวรรณภิกษาติ, *พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น*. กรุงเทพฯ. : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2556.
- [7] D. Dummit and R. Foote, *Abstract Algebra*. United states of America: Wiley, 2003.
- [8] I. Anderson, *Combinatorial Designs and their Applications*. Oxford, England: Oxford U. P., 1997.
- [9] M. B. Beintema, J. T. Bonn, R. W. Fitzgerald and J. L. Yucas, "Orderings of finite fields and balanced tournaments," *Ars Combin.* vol. 49, pp. 41-48, 1998.
- [10] ธนวัฒน์ วิเชียรไพศาล, มงคล ต้นทัพไทย และจริยา อยู่ยะเสถียร, "การจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยใช้ 1-แฟกเตอร์", *วารสารวิทยาศาสตร์ มช.* ปีที่ 41, ฉบับที่ 3, หน้า 648-656, 2556.