



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 62(693) Sep–Dec, 2017

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org>

MathThaiOrg@gmail.com



ทฤษฎีบทเซวา Ceva's Theorem

ภักคินี ชิตสกุล

Pakkinee Chitsakul

Retired Associate Professor

Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Chalongkrung Rd., Bangkok, 10520

Email: jimreivat99@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเซวาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานและสามเหลี่ยมคล้าย และนำทฤษฎีบทเซวาใช้ในการพิสูจน์ความรู้ทางเรขาคณิต เกี่ยวกับเซนทรอยด์ และออร์โทเซนเตอร์ของสามเหลี่ยม รวมถึงการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและล้อมรอบสามเหลี่ยม

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทเซวาเซนทรอยด์ ออร์โทเซนเตอร์ จุดศูนย์กลางวงกลมแนบในสามเหลี่ยม จุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

ABSTRACT

This article shows how to prove Ceva's theorem by using the knowledge concern on parallel lines and similar triangles. We employ Ceva's theorem for proving centroid and orthocenter and also finding incenter and circumcenter of a triangle.

Keywords: Ceva's Theorem, Centroid, Orthocenter, Incenter of a Triangle, Circumcenter of a Triangle





1. บทนำ

ทฤษฎีบทเชวา ถ้า $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC CA และ AB ตามลำดับ แล้ว AD BE และ CF ตัดกันที่จุดเดียวกันก็ต่อเมื่อ
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

ทฤษฎีบทเชวาเป็นทฤษฎีบทที่มีความสำคัญในการศึกษาเรขาคณิต เนื่องจากสามารถนำทฤษฎีบทเชวาใช้ในการพิสูจน์ความรู้ทางเรขาคณิตเกี่ยวกับ เซนทรอยด์และออร์โทเซนเตอร์ของสามเหลี่ยม รวมถึงการหาจุดศูนย์กลางของ วงกลมแนบใน และการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

บทความนี้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเชวาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับเส้นขนาน และสามเหลี่ยมคล้าย และนำทฤษฎีบทเชวาพิสูจน์ความรู้ทางเรขาคณิตต่อไปนี้

- เส้นที่ลากจากมุมของสามเหลี่ยมไปแบ่งครึ่งด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมหรือ มัชฐานจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่งในสามเหลี่ยม เรียกจุดนี้ว่า เซนทรอยด์ ซึ่งจุดนี้จะเป็นจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้วย
- เส้นที่ลากจากมุมของสามเหลี่ยมไปตั้งฉากกับด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมหรือ เส้นที่แทนส่วนสูงของสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง เรียกจุดนี้ว่า ออร์โทเซนเตอร์
- เส้นที่แบ่งครึ่งมุมทุกมุมของสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่งใน สามเหลี่ยม ซึ่งจุดตัดนี้จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม
- เส้นที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง ซึ่งจุดตัดนี้จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

2. การพิสูจน์ทฤษฎีบทเชวา

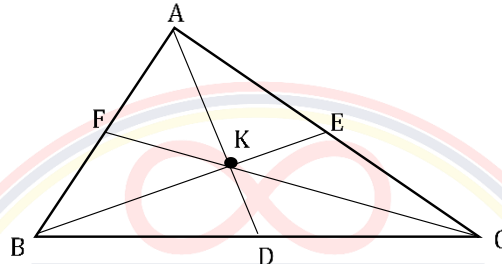
บทตั้ง 1 ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกันแล้ว

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$





- สิ่งที่กำหนดให้
1. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ
 2. ให้ D เป็นจุดบนด้าน BC
 3. ให้ E เป็นจุดบนด้าน CA
 4. ให้ AD และ BE ตัดกันที่ K
 5. ให้ CK ต่อไปตัดด้าน AB ที่ F ดังรูปที่ 1



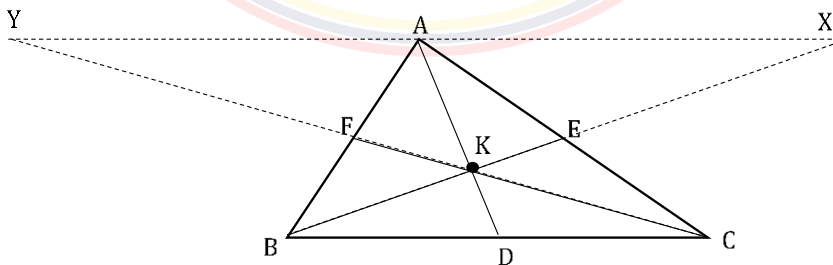
รูปที่ 1 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทตั้ง 1

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

สร้างเพื่อการพิสูจน์

1. ลากเส้นตรง XY ผ่านจุด A ให้ขนานกับ BC
2. จากจุด B ต่อ BE ออกไปทาง E ให้ตัดเส้นขนานกับ BC ที่ X
3. จากจุด C ต่อ CF ออกไปทาง F ให้ตัดเส้นขนานกับ BC ที่ Y ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 สร้างเพื่อการพิสูจน์ตามบทตั้ง 1



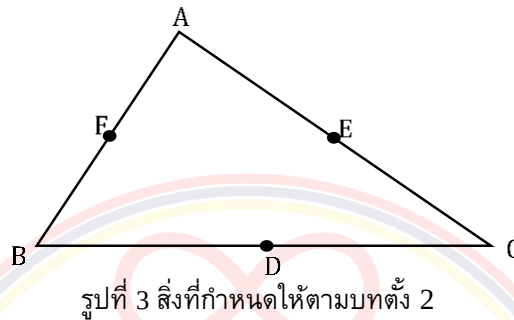
พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\widehat{FAY} = \widehat{FBC}$	1. มุมแย้ง ($YX \parallel BC$ มี AB เป็นเส้นตัดขวาง)
2. $\widehat{AYF} = \widehat{BCF}$	2. มุมแย้ง ($YX \parallel BC$ มี YC เป็นเส้นตัดขวาง)
3. $\widehat{AFY} = \widehat{BFC}$	3. มุมตรงข้าม (AB ตัดกับ YC ที่ F)
4. $\triangle AFY \sim \triangle BFC$	4. จาก 1 2 และ 3 สามเหลี่ยมคล้าย คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม
5. $\frac{AF}{BF} = \frac{AY}{BC}$	5. จาก 4 ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันของ สามเหลี่ยมคล้าย จะเป็นสัดส่วนที่เท่ากัน
6. $\frac{CE}{AE} = \frac{CB}{AX}$	6. ในทำนองเดียวกันกับ 5 ($\triangle CEB \sim \triangle AEX$)
7. $\frac{AX}{DB} = \frac{AK}{DK}$	7. ในทำนองเดียวกันกับ 5 ($\triangle AXK \sim \triangle DBK$)
8. $\frac{AY}{DC} = \frac{AK}{DK}$	8. ในทำนองเดียวกันกับ 5 ($\triangle YAK \sim \triangle CDK$)
9. $\frac{AX}{DB} = \frac{AY}{DC}$	9. จาก 7 และ 8
10. $\frac{BD}{DC} = \frac{AX}{AY}$	10. จาก 9
11. $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{AY}{BC} \cdot \frac{AX}{AY} \cdot \frac{CB}{AX}$	11. จาก 5 10 และ 6
12. $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$	12. จาก 11

บทตั้ง 2 ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี $D E$ และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ แล้ว AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน

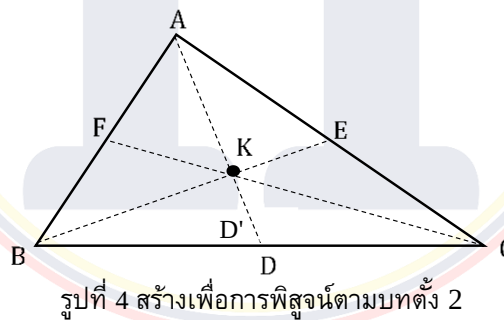


- สิ่งที่กำหนดให้
1. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ
 2. ให้ D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ
 3. ให้ $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ ดังรูปที่ 3



สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เส้น AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน

- สร้างเพื่อการพิสูจน์
1. ลาก BE และ CF ตัดกันที่จุด K
 2. จาก AK ต่อไปตัด BC ที่จุด D' ดังรูปที่ 4



พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$	1. กำหนดให้
2. $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$	2. สร้างและบทตั้ง 1
3. $\frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{D'C}$	3. จาก 1 และ 2





4. $\frac{BD}{DC} + 1 = \frac{BD'}{D'C} + 1$ $\frac{BD + DC}{DC} = \frac{BD' + D'C}{D'C}$ $\frac{BC}{DC} = \frac{BC}{D'C}$	4. จาก 3
5. $D = D'$ หรือ AD, BE และ CF ตัดกัน ที่จุด K เดียวกัน	5. จาก 4

จากบทตั้ง 1 ถ้า AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน แล้ว
 $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

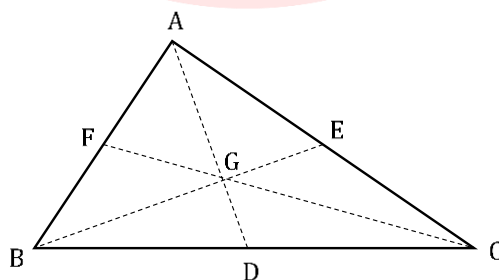
จากบทตั้ง 2 ถ้า $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ แล้ว AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K
เดียวกัน

ดังนั้นจากบทตั้ง 1 และบทตั้ง 2 จะได้ทฤษฎีบทเซวา
AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

3. เซนทรอยด์และออร์โทเซนเตอร์

บทแทรก 1 เส้นที่ลากจากมุมของสามเหลี่ยมไปแบ่งครึ่งด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม ตัด
กันที่จุดเดียวกันภายในสามเหลี่ยม เรียกว่า จุดเซนทรอยด์
สิ่งที่กำหนดให้ 1. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

2. D E และ F เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน BC, CA และ AB ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทแทรก 1





สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

เส้น AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด G เดียวกัน

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $BD = DC$	1. กำหนดให้ (D เป็นจุดกึ่งกลาง BC)
2. $CE = EA$	2. กำหนดให้ (E เป็นจุดกึ่งกลาง CA)
3. $AF = FB$	3. กำหนดให้ (F เป็นจุดกึ่งกลาง AB)
4. $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$	4. จาก 3, 1 และ 2
5. AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด G เดียวกัน	5. จาก 4 และทฤษฎีบทเซวา

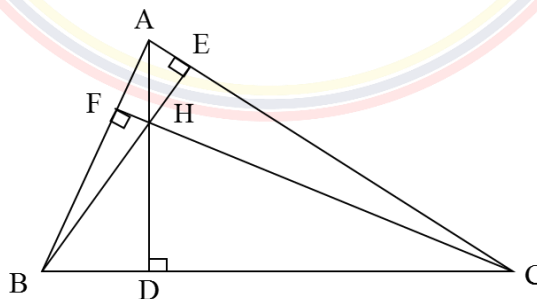
บทแทรก 2 เส้นที่แทนส่วนสูงเมื่อเทียบกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมใดๆ ตัดกันที่จุดเดียวกัน

สิ่งที่กำหนดให้ 1. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

2. ให้ $AD \perp BC$ ที่ D

ให้ $BE \perp CA$ ที่ E

ให้ $CF \perp AB$ ที่ F ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทแทรก 2

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

เส้น AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด H เดียวกัน

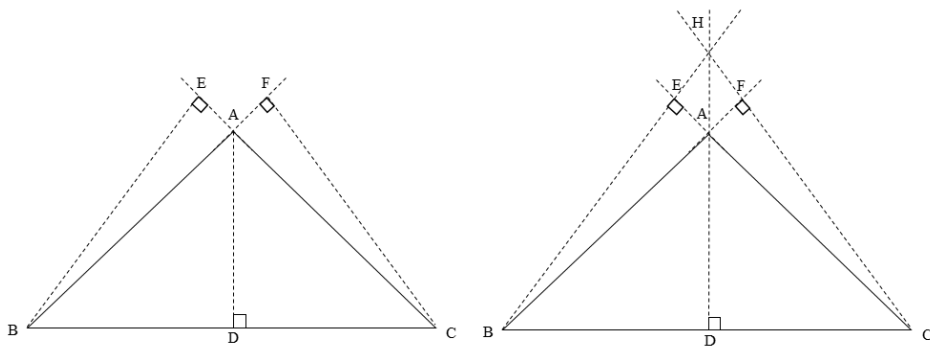


พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\hat{BEC} = \hat{ADC} = 90^\circ$	1. กำหนดให้ ($BE \perp CA$ และ $AD \perp BC$)
2. $\hat{BCE} = \hat{ACD}$	2. มุมร่วม
3. $\hat{EBC} = \hat{DAC}$	3. มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันมีค่า 180° เมื่อมุมภายในของสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม แล้วมุมที่เหลือย่อมมีค่าเท่ากัน จาก 1 และ 2
4. $\triangle BCE \sim \triangle ACD$	4. จาก 1 2 และ 3 สามเหลี่ยมคล้าย คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม
5. $\frac{CE}{CD} = \frac{BE}{AD}$	5. จาก 4 ด้านที่อยู่ลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมคล้ายจะเป็นสัดส่วนที่เท่ากัน
6. $\frac{AF}{AE} = \frac{CF}{BE}$	6. ในทำนองเดียวกับ 5 ($\triangle CAF \sim \triangle BAE$)
7. $\frac{BD}{BF} = \frac{AD}{CF}$	7. ในทำนองเดียวกับ 5 ($\triangle ABD \sim \triangle CBF$)
8. $\frac{AF}{AE} \cdot \frac{CE}{CD} \cdot \frac{BD}{BF} = \frac{CF}{BE} \cdot \frac{BE}{AD} \cdot \frac{AD}{CF}$	8. จาก 6 5 และ 7
9. $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$	9. จาก 8
10. AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด H เดียวกัน	10. จาก 9 และทฤษฎีบทเซวา

ข้อสังเกต ออร์โทเซนเตอร์อาจจะอยู่ภายในหรือภายนอกสามเหลี่ยม ถ้าสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมมุมป้านแล้วออร์โทเซนเตอร์จะอยู่ภายนอกสามเหลี่ยม

ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมที่มี $\hat{BAC} > 90^\circ$ โดย $AD \perp BC$ ที่ D $BE \perp$ ส่วนต่อ CA ที่ E และ $CF \perp$ ส่วนต่อ BA ที่ F ดังรูปที่ 7(ก) แล้ว BE , DA และ CF ตัดกันที่จุดเดียวกัน H ดังรูปที่ 7(ข) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบทเซวาในทำนองเดียวกับบทแทรก 2



(ก)

(ข)

รูปที่ 7 ออร์โทเซนเตอร์อยู่ภายนอกสามเหลี่ยม

4. จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและล้อมรอบสามเหลี่ยม

นิยาม วงกลมแนบในสามเหลี่ยม คือวงกลมซึ่งบรรจุอยู่ภายในสามเหลี่ยมโดยสัมผัสทั้งสามด้านของสามเหลี่ยมเป็นเส้นสัมผัสกับวงกลมนั้น เรียกจุดศูนย์กลางของวงกลมว่า จุดของวงกลมแนบใน

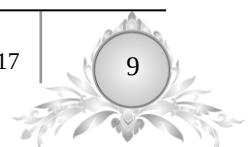
บทแทรก 3 เส้นแบ่งครึ่งมุมทุกมุมของสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดเดียวกันซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม

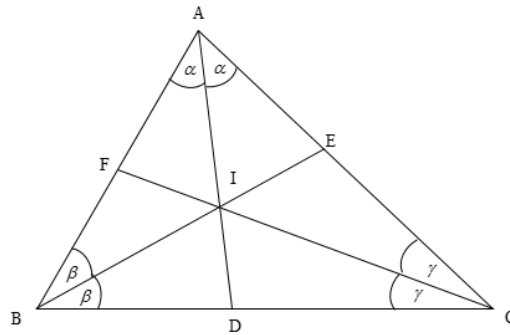
สิ่งที่กำหนดให้ 1. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

2. ให้ D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ

3. ให้ด้าน AD, BE และ CF แบ่งครึ่ง $\hat{A}$ $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ตามลำดับ

4. ให้ $\alpha = \frac{1}{2}\hat{A}$ $\beta = \frac{1}{2}\hat{B}$ และ $\gamma = \frac{1}{2}\hat{C}$ ดังรูปที่ 8





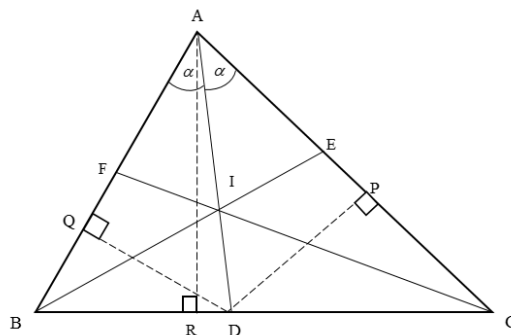
รูปที่ 8 สร้างรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ตามบทแทรก 3

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

- 1) เส้น AD , BE และ CF ตัดกันที่จุด I เดียวกัน
- 2) I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม

สร้างเพื่อการพิสูจน์ 1)

1. จาก D ลากเส้น $DP \perp AC$ และ $DQ \perp AB$ แล้ว $AD \sin \alpha$ คือ ส่วนสูงของ $\triangle ADC$ และ $\triangle ADB$
2. จาก A ลาก $AR \perp BC$ แล้ว AR คือส่วนสูงของ $\triangle ADB$ และ $\triangle ADC$ ดังรูปที่ 9



รูปที่ 9 สร้างเพื่อการพิสูจน์ 1) ตามบทแทรก 3

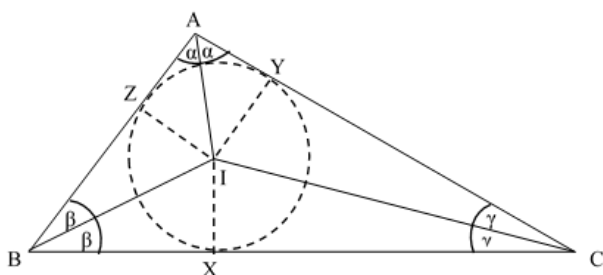
ข้อกำหนด ให้ (ABC) แทนพื้นที่ของ $\triangle ABC$

พิสูจน์ 1)

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $(ABD) = \frac{1}{2} \times BD \times AR$	1. สูตรการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม คือ $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$
2. $(ACD) = \frac{1}{2} \times CD \times AR$	2. ในทำนองเดียวกับ 1
3. $(ABD) = \frac{1}{2} \times AB \times AD \sin \alpha$	3. ในทำนองเดียวกับ 1 และสร้างเพื่อการพิสูจน์
4. $(ACD) = \frac{1}{2} \times AC \times AD \sin \alpha$	4. ในทำนองเดียวกับ 1 และสร้างเพื่อการพิสูจน์
5. $\frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{BD}{CD}$	5. จาก 1 และ 2
6. $\frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{AB}{AC}$	6. จาก 3 และ 4
7. $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$	7. จาก 5 และ 6
8. $\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$	8. ในทำนองเดียวกับ 7
9. $\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}$	9. ในทำนองเดียวกับ 7
10. $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB}$	10. จาก 8 7 และ 9
11. $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$	11. จาก 10
12. AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด I เดียวกัน	12. จาก 11 และทฤษฎีบทเซวา

สร้างเพื่อการพิสูจน์ 2) จาก I ลาก IX, IY และ IZ ตั้งฉากกับ BC, CA และ AB ตามลำดับ ดังรูปที่ 10





รูปที่ 10 สร้างเพื่อการพิสูจน์ 2) ตามบทแทรก 3

พิสูจน์ 2)

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\angle ZAI = \angle YAI$	1. กำหนดให้ (AI แบ่งครึ่ง $\hat{A}$)
2. $\angle AZI = \angle AYI = 90^\circ$	2. สร้างเพื่อการพิสูจน์ ($IY \perp AC$ และ $IZ \perp AB$)
3. $\angle AIZ = \angle AIY$	3. มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันมีค่า 180° เมื่อมุมภายในของสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม แล้วมุมที่เหลือย่อมมีค่าเท่ากัน จาก 1 และ 2
4. $\triangle AZI \cong \triangle AYI$	4. มุม-ด้าน-มุม จาก 1 4 และ AI เป็นด้านร่วม
5. $IZ = IY$	5. จาก 4
6. $IZ = IX$	6. ในทำนองเดียวกับ 5
7. $IX = IY = IZ$ หรือ I เป็นจุด ศูนย์กลางของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$	7. จาก 5 และ 6

ข้อสังเกต จากบทแทรก 3 จะได้ว่า

1. ถ้า r เป็นรัศมีของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ แล้ว $IX = IY = IZ = r$
2. รัศมีของวงกลมตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุดสัมผัสเนื่องจาก
 $IX \perp BC$ $IY \perp CA$ และ $IZ \perp AB$ ที่ X Y และ Z ตามลำดับ

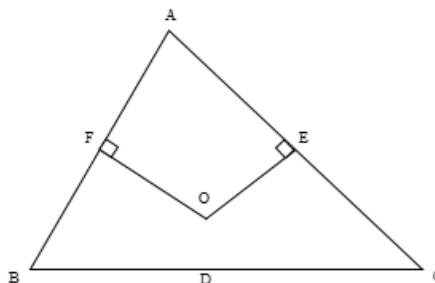


3. จากจุดหนึ่งจุดภายนอกวงกลมสามารถลากเส้นสัมผัสวงกลมได้สองเส้นที่มีความยาวเท่ากัน เนื่องจาก $\triangle AZI \perp \triangle AYI$ แล้ว $AZ = AY$ ในทำนองเดียวกัน $CX = CY$ และ $BX = BZ$

นิยาม วงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม (Circumcircle of Triangle) คือวงกลมที่มีเส้นรอบวงของวงกลมผ่านจุดยอดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม

บทแทรก 4 เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดเดียวกันซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

- สิ่งที่กำหนดให้
1. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ
 2. ให้ D E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ
 3. ให้ $OE \perp AC$ และ $OF \perp AB$ ดังรูปที่ 11



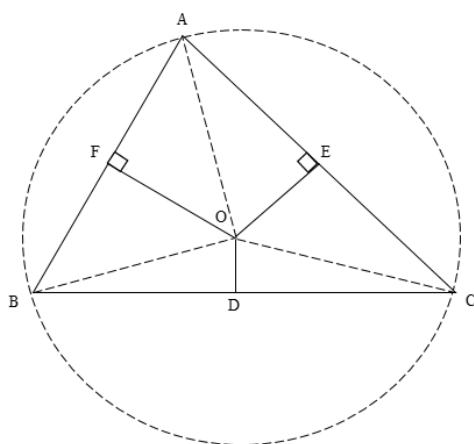
รูปที่ 11 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทแทรก 4

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

- 1) $OD \perp BC$
- 2) O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

สร้างเพื่อการพิสูจน์

1. ลาก OD
2. ลากด้าน OA, OB และ OC ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12 สร้างเพื่อการพิสูจน์ตามบทแทรก 4

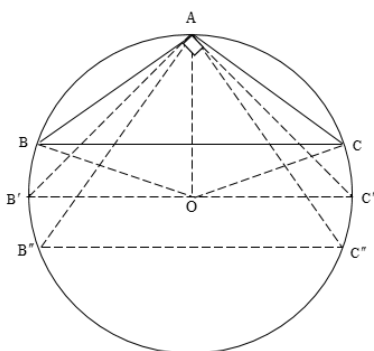
พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $AF = BF$	1. กำหนดให้ (F เป็นจุดกึ่งกลาง AB)
2. $\angle AFO = \angle BFO = 90^\circ$	2. กำหนดให้ ($OF \perp AB$)
3. $\triangle AFO \cong \triangle BFO$	3. ด้าน-มุม-ด้าน จาก 1 2 และ OF เป็นด้านร่วม
4. $AO = BO$	4. จาก 3
5. $AO = CO$	5. ในทำนองเดียวกับ 4 ($\triangle AEO \cong \triangle CEO$)
6. $AO = BO = CO$ หรือ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมรอบ $\triangle ABC$	6. จาก 4 และ 5
7. $BD = CD$	7. กำหนดให้ (D เป็นจุดกึ่งกลาง BC)
8. $\triangle BDO \cong \triangle CDO$	8. ด้าน-ด้าน-ด้าน จาก 6 7 และ DO เป็นด้านร่วม



9. $\widehat{BDO} = \widehat{CDO}$	9. จาก 8
10. $\widehat{BDO} + \widehat{CDO} = 180^\circ$	10. เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งมุมประชิดรวมกันมีค่า 180°
11. $\widehat{BDO} = \widehat{CDO} = 90^\circ$	11. จาก 9 และ 10
12. $OD \perp BC$	12. จาก 11

ข้อสังเกต จุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมอาจจะอยู่ภายในหรือภายนอกสามเหลี่ยม ถ้าสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมมุมป้านแล้วศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบจะอยู่ภายนอกสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 13



รูปที่ 13 จุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ อยู่ภายนอกสามเหลี่ยม
เมื่อ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน

5. บทสรุป

การพิสูจน์ทฤษฎีบทเชวา และการนำทฤษฎีบทเชวาไปใช้ในการหาเซนทรอยด์ ออร์โทเซนเตอร์ จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม และจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม เป็นหัวข้อที่มีความสำคัญในการศึกษาสมบัติทางเรขาคณิตบางประการของสามเหลี่ยม เช่น จุดทั้งสี่จุดดังกล่าวจะเป็นจุดเดียวกัน ก็ต่อเมื่อสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า จุดทั้งสี่จุดนี้จะอยู่บนเส้นตรง



เดียวกัน ก็ต่อเมื่อสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สำหรับสามเหลี่ยมใดๆ ที่ไม่ใช่สามเหลี่ยมด้านเท่า เช่นทอไรด์ ออร์โทเซนเตอร์ และจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกเส้นตรงนี้ว่า เส้นออยเลอร์ (Euler Line) เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] H. S. M. Coxeter & S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, United States of America, Washington D. C.: The Mathematical Association of America, 1967.
- [2] ทศวรรษ วงศ์วัฒนอนันต์ ธนภฤต กวินสังคม และสุพัตรา อินชუმ. “การศึกษาสมบัติบางประการของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ.” ปัญหาพิเศษนักศึกษาคณะคณิตศาสตร์ประยุกต์. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. กทม. 2559.