DOI: 10.14456/mj-math.2017.5

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(692) May–Aug, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ฟังก์ชันเมทริกซ์กับการประยุกต์ในคณิตศาสตร์การเงิน

Matrix Function with Application in Financial Mathematics

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ
Wichai Witayakiattilerd

Department of Mathematics and Statistics,
Faculty of Science and Technology, Thammasat University,
Paholyothin Road, Klong Luang, Rangsit, Pathumthani, 12121, Thailand

Email: wichai@mathstat.sci.tu.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอแนวความคิดการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ โดยเริ่มจากการนิยามฟังก์ชันกำลังของเมทริกซ์หลังจากนั้นได้ขยายแนวความคิดไปยังการนิยามฟังก์ชันใด ๆของเมทริกซ์ และได้ยกตัวอย่างการคำนวณค่าเพื่อให้เข้าใจนิยามได้อย่างชัดเจน นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงการประยุกต์ฟังก์ชันเมทริกซ์ในคณิตศาสตร์การเงินอีกด้วย

คำสำคัญ: ฟังก์ชันเมทริกซ์ เมทริกซ์แปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ รูปแบบบัญญัติจอร์แดน ฟังก์ชันกำลังของเมทริกซ์ ฟังก์ชันอดิศัยของเมทริกซ์

ABSTRACT

This article presents a concept to define a function of matrix. Start by defining a power function of matrix is then expanded to the concept of the definition of any function of matrix. Some calculating-examples are provided to clearly understand. An application to financial mathematics is shown.

Keywords: Function of Matrix, Diagonalizable Matrix, Jordan Canonical Form, Power Function of Matrix, Transcendental Function of Matrix

1. บทนำ

วัตถุประสงค์ของบทความนี้เพื่อถ่ายทอดแนวคิดอย่างง่ายในการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ โดยขยายแนวคิดจากการนิยามฟังก์ชันสเกลาร์ นำไปสู่การนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์จากฟังก์ชันที่ถูกขยาย หลังจากนั้นขยายแนวคิดไปยังการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ใดๆโดยผ่านรูปแบบบัญญัติจอร์แดน

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันของตัวแปรเดียวเหนือสนาม F (เซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ หรือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน$\mathbb{C}$) เพื่อความสะดวกจะกำหนดให้ F เป็น $\mathbb{C}$ นั่นคือพิจารณาฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ $\mathbb{C}$ ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : D_f \to \mathbb{C}$ เมื่อ $D_f \subseteq \mathbb{C}$ แทนโดเมนของ f หรืออาจจะเขียนในรูปการส่งค่า $x \mapsto f(x)$ นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณา f เป็นการส่งค่าจากปริภูมิเมทริกซ์บน $\mathbb{C}$ขนาด 1×1 ไปยังปริภูมิของเมทริกซ์บน $\mathbb{C}$ ขนาด 1×1 ได้อีกด้วย นั่นคือ $f([x]) = [f(x)]$

กำหนดให้ $\mathbb{C}^{n\times n}$ เป็นปริภูมิเมทริกซ์บน $\mathbb{C}$ ขนาด $n\times n$ ปัญหาหนึ่งที่น่าสนใจ คือ จะนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ซึ่งส่งค่าจาก $\mathbb{C}^{n\times n}$ ไปยัง $\mathbb{C}^{n\times n}$อย่างไร นั่นคือ ถ้าให้ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$และ $f : D_f \to \mathbb{C}^{n\times n}$เมื่อ $D_f \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$แล้วจะนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ $f(A)$อย่างไร เช่น ควรจะนิยามe^A, $\sin A$ และ$\cos A$อย่างไร

2. ความรู้เบื้องต้นในพีชคณิตเชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นในพีชคณิตเชิงเส้นซึ่งใช้ในการนิยามและคำนวณค่าของฟังก์ชันเมทริกซ์

กำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A เรียก เซต $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ ว่า สเปกตรัม (Spectrum) ของเมทริกซ์ A และเรียก $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$ ว่า รัศมีเชิงสเปกตรัม (Spectral radius) ของเมทริกซ์ A

2.1 เมทริกซ์แปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ และมีค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด กำหนดให้ $E_{\lambda_k}(A)$ แทนปริภูมิเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ Aที่สมนัยกับ $\lambda_k, k = 1, \ldots, m$ และ มิติของ$E_{\lambda_k}(A)$ เขียนแทนด้วย$\dim E_{\lambda_k}(A)$ ซึ่งจะกล่าวว่า *เมทริกซ์ A แปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้* (Diagonalizable matrix) ถ้ามี

เมทริกซ์ไม่เอกฐาน S ซึ่ง

$$S^{-1}AS = D \tag{1}$$

เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม หรือกล่าวได้ว่าเมทริกซ์ A คล้ายกับ เมทริกซ์ D นั่นเอง สมบัติการแปลงให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้จะช่วยทำให้สามารถคำนวณค่าต่าง ๆเมทริกซ์ A ได้ง่ายขึ้น เช่น การหาดีเทอร์มิแนนต์ การหาเมทริกซ์อินเวอร์ส หรือ การคำนวณค่าอื่น ๆที่เกี่ยวกับเมทริกซ์ เป็นต้น โดยเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ เป็นตามทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 [1] กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{m} \dim E_{\lambda_k}(A) = n$ ก็ต่อเมื่อ A แปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

จากเงื่อนไข $\sum_{k=1}^{m} \dim E_{\lambda_k}(A) = n$ ในทฤษฎีบท 1 ทำให้ทราบว่าปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A คือ $\operatorname{Span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (อาจมีบางค่าที่ซ้ำกันได้) ตามลำดับ เมทริกซ์ไม่เอกฐาน S ที่ทำให้ $S^{-1}AS = D$ โดยที่ $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม สามารถกำหนดให้เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีแต่ละคอลัมน์เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ นั่นคือ $S = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ผลที่ตามมาคือ สามารถเขียนเมทริกซ์ A ในรูป $A = SDS^{-1}$ ซึ่งทำให้สามารถคำนวณค่าต่าง ๆของเมทริกซ์ A ได้ง่ายและสะดวกขึ้น อาทิ

$$\det A = \det SDS^{-1} = \det D \text{ และ } A^{-1} = \left(SDS^{-1}\right)^{-1} = S\,D^{-1}S^{-1} \tag{2}$$

2.2 รูปแบบบัญญัติจอร์แดน

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา หาก $\dim E_\lambda(A) < m$ เมทริกซ์ A จะไม่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ อย่างไรก็ตามสำหรับเมทริกซ์ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ใดๆ จะสามารถแปลงให้อยู่ในรูปใกล้เคียงกับเมทริกซ์ทแยงมุม ที่เรียกว่า *รูปแบบบัญญัติจอร์แดน* (Jordan canonical form) ได้เสมอ

ทฤษฎีบท 2 [1] กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ และให้ $\sum_\lambda \dim E_\lambda(A) = s$ จะมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ซึ่ง

$$Q^{-1}AQ = J = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, ..., J_s\} = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix} \tag{3}$$

โดยที่แต่ละเมทริกซ์ $J_k \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$ เรียกว่า *บล็อซ์กจอร์แดน* (Jordan block) ซึ่งเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมในรูป $J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}$ และสมนัยกับเวกเตอร์ฐานของ $E_{\lambda_k}(A)$ สำหรับค่าลักษณะเฉพาะ λ_k ของเมทริกซ์ A

พิจารณาเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 1$ และมีปริภูมิของเวกเตอร์ คือ $\operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ทำให้ได้ว่า $\sum_{k=1}^{m} \dim E_{\lambda_k}(A) = 2 < 3$

ดังนั้นเมทริกซ์ A ไม่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ อย่างไรก็ตาม โดยทฤษฎีบท 2 สามารถแปลงเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติจอร์แดนได้

คำถามที่น่าสนใจคือ จะหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ได้อย่างไรในเมื่อ

$\sum_{k=1}^{m} \dim E_{\lambda_k}(A) < n$ นั่นแสดงว่าจำนวนเวกเตอร์ฐานของปริภูมิเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A น้อยกว่า n ดังนั้น จึงไม่สามารถสร้างเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ซึ่งแต่ละคอลัมน์ประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั้งหมดแต่สามารถสร้างได้เพียงบางคอลัมน์เท่านั้น โดยคอลัมน์ที่เหลือจะเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไป (Generalized eigenvectors) ของเมทริกซ์ A ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3 เรียกเวกเตอร์ไม่ใช่ศูนย์ x ว่า *เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไป* ของเมทริกซ์ A ระดับขั้น k ที่สมนัยกับค่าลักษณะ λ ถ้า

$$(A-\lambda I)^k x = 0 \quad \text{และ} \quad (A-\lambda I)^{k-1} x \neq 0 \qquad (4)$$

จะเห็นว่ากรณีที่ $k=1$ ในบทนิยาม 3 ก็คือนิยามของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะปกตินั่นเอง ให้ x เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของเมทริกซ์ A ระดับขั้น k ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ นิยาม

$$x_1 = \left(A-\lambda I\right)^{k-1} x \quad \text{และ} \quad x_i = \left(A-\lambda I\right)^{k-i} x \quad \text{สำหรับ } i = 2,\ldots,k \qquad (5)$$

จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $i = 2,3,\ldots,k$, $\left(A-\lambda I\right)^i x_i = \left(A-\lambda I\right)^k x = 0$ และ $\left(A-\lambda I\right)^{i-1} x_i = \left(A-\lambda I\right)^{k-1} x \neq 0$ ดังนั้นเวกเตอร์ $x_i = \left(A-\lambda I\right)^{k-i} x$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของเมทริกซ์ A ระดับขั้น i

บทนิยาม 4 เรียกเซตของเวกเตอร์ $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ที่นิยามตาม (5) ว่า *โซ่ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไป* ของเมทริกซ์ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ

โซ่ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปที่นิยามตาม (5) จะมีสมบัติเป็นอิสระเชิงเส้น และยูเนียนทั้งหมดของโซ่ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปจะเป็นอิสระเชิงเส้นและแผ่ทั่ว (Span) ปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของเมทริกซ์ A และสำหรับเมทริกซ์ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ใดๆ สามารถสร้างเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ได้โดยกำหนดให้เป็นเมทริกซ์ซึ่งแต่ละคอลัมน์เป็นฐานของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของเมทริกซ์ A

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}5 & 8 & -4\\ -3 & -5 & 3\\ -2 & -4 & 3\end{bmatrix}$ จงเขียนเมทริกซ์ A ในรูป QJQ^{-1} เมื่อ Q เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $J=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,...,J_s\}$ โดยที่ $J_k\in\mathbb{C}^{m_k\times m_k}$ เป็นบล็อซ์กจอร์แดน

วิธีทำ เราได้หาค่าลักษณะเฉพาะและปริภูมิเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A มาแล้ว ซึ่งได้ค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda=1$ และมีปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ คือ $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ ดังนั้นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ จะเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของ $\lambda=1$ ที่มีค่าระดับชั้นเป็น 1 ซึ่งก่อกำเนิดโซ่ $\{x\}$ ต่อไปจะหาค่าระดับชั้นอื่นที่เป็นไปได้ของค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda=1$ โดยพิจารณา

$(A-I)^k=\begin{bmatrix}4 & 8 & -4\\ -3 & -6 & 3\\ -2 & -4 & 2\end{bmatrix}^k$ สำหรับบางจำนวนนับ k ดังนี้

ซึ่งพบว่า $(A-I)\neq 0$ และ $(A-I)^2=\begin{bmatrix}4 & 8 & -4\\ -3 & -6 & 3\\ -2 & -4 & 2\end{bmatrix}^2=0$

ดังนั้น ค่าระดับชั้นที่เป็นไปได้สูงสุดของค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda=1$ คือค่าระดับชั้น 2 สำหรับกรณีนี้ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda=1$ จะก่อกำเนิดโซ่ $\{y_1,y_2\}$ โดยที่ y_1 และ y_2 สอดคล้องเงื่อนไข (5) นั่นคือ สอดคล้องกับสมการ $\quad y_1=(A-I)y\neq 0$

และ $\quad y_2=y$ เมื่อ $(A-I)^2y=0$

จะเห็นว่าจากสมการ $(A-I)^2y=0$ จะได้ y เป็นเวกเตอร์ใดๆที่ไม่ใช่เวกเตอร์ 0 นั่นคือสามารถเลือก $y\neq 0$ และทำให้ $(A-I)y\neq 0$

ในที่นี้ เลือก $y=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ จะได้ $(A-I)y=\begin{bmatrix}4 & 8 & -4\\ -3 & -6 & 3\\ -2 & -4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-3\\-2\end{bmatrix}\neq 0$

ดังนั้นได้ โซ่ $\{y_1, y_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ซึ่งทำให้ยูเนียนทั้งหมดของโซ่ของเวกเตอร์

ลักษณะเฉพาะทั่วไปคือ $\{x, y_1, y_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

กำหนดให้ $Q = [x, y_1, y_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ และ

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

เมื่อ $J = \mathrm{diag}\{J_1, J_2\}$ โดยที่ $J_1 = [1]$ และ $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นบล็อซ์กจอร์แดน

นั่นคือสามารถเขียนเมทริกซ์ A ได้ในรูป $A = QJQ^{-1}$ □

3. ฟังก์ชันเมทริกซ์

กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ หากกล่าวถึงฟังก์ชันเมทริกซ์ของเมทริกซ์ A อาจมีแนวทางในการนิยามได้หลากหลาย อาทิ

- การนิยามฟังก์ชันของ A แบบรายสมาชิก เช่น $e^A = \left[e^{a_{ij}} \right]_{n \times n}$
- การนิยามฟังก์ชันของ A ไปยัง $\mathbb{C}^{m \times r}$ เช่น

$$f\left(\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

- การนิยามฟังก์ชันของ A ไปยัง F ($\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$) เช่น $f(A) = \|A\|$

แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ $f(A)$ ที่มีความเป็นทั่วไปจากฟังก์ชันสเกลาร์ $f(x)$ โดย $f(A)$ ยังเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกับเมทริกซ์ A โดยก่อนอื่นจะกล่าวถึงฟังก์ชันเมทริกซ์โดยใช้แนวความคิดของฟังก์ชันที่ถูกขยายมาจากฟังก์ชันสเกลาร์ของตัวแปรเดียว

3.1 ฟังก์ชันที่ถูกขยาย

บทนิยาม 5 กำหนดให้ $f:D_f \rightarrow \mathbb{C}$ ($D_f \subseteq \mathbb{C}$) เป็นฟังก์ชัน
เรียก $f:D_f^{n\times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$ ว่า *ฟังก์ชันที่ถูกขยาย*

จากบทนิยาม 5 ทำให้ทราบว่าแนวทางหนึ่งในการนิยามฟังก์ชันก์ของเมทริกซ์คือการนิยามในรูปฟังก์ชันที่ถูกขยาย เช่น

- ฟังก์ชัน $f(x)=5x$ สำหรับทุกๆ $x\in\mathbb{C}$ มีฟังก์ชันที่ถูกขยาย คือ $f(A)=5A$ สำหรับทุกๆ $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$
- ฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ สำหรับทุกๆ $x\in\mathbb{C}$ มีฟังก์ชันที่ถูกขยาย คือ $f(A)=A^2$ สำหรับทุกๆ $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$

3.1.1 ฟังก์ชันกำลังของเมทริกซ์

กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก ฟังก์ชันกำลังของเมทริกซ์ f จะนิยามจากฟังก์ชันที่ถูกขยายมาจาก $f(x)=x^m$ สำหรับทุกๆ $x\in\mathbb{C}$ นั่นคือ ฟังก์ชันกำลัง f ของเมทริกซ์นิยามโดย

$$f(A)=A^m \quad \text{สำหรับทุกๆ } A\in\mathbb{C}^{n\times n} \tag{6}$$

โดยที่ $A^m=AA^{m-1}$ เมื่อ $A(0)=I$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณขนาด $n\times n$ โดยใช้แนวความคิดเดียวกัน ฟังก์ชันกำลัง A^{-m} นิยามได้โดย

$$A^{-m}=(A^m)^{-1} \quad \text{สำหรับทุกๆ } A\in\mathbb{C}^{n\times n} \text{ ซึ่ง } A^m \text{ มีอินเวอร์ส} \tag{7}$$

3.1.2 ฟังก์ชันพหุนามของเมทริกซ์

กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนามในตัวแปร x กำลัง n นั่นคือ

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \tag{8}$$

สำหรับบางสเกลาร์ $a_k,\ k=1,2,\ldots n$ โดยที่ $a_n\neq 0$ ดังนั้นสามารถนิยามพหุนามจากฟังก์ชันที่ถูกขยาย ดังนี้

$$p(A):=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I \text{ , สำหรับทุกๆ } A\in\mathbb{C}^{n\times n} \tag{9}$$

ข้อสังเกตประการหนึ่งคือ ถ้า $p(\lambda)$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว จะได้ $p(A)=0$ เรียกสมบัติีนี้ว่า *กฎของเคย์เลย์*

3.1.3 ฟังก์ชันเชิงเศษส่วนของเมทริกซ์

กำหนดให้ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนามและ $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ เป็นฟังก์ชันเชิงเศษส่วน สำหรับทุกๆ $x\in\mathbb{C}$ ซึ่ง $q(x)\neq 0$ สามารถนิยามฟังก์ชันเชิงเศษส่วนของเมทริกซ์ได้โดย

$$f(A)=\left(q(A)\right)^{-1}p(A) \text{ สำหรับทุกๆ } A\in\mathbb{C}^{n\times n} \text{ ซึ่ง } \left(q(A)\right)^{-1} \text{มีค่า} \tag{10}$$

แนวความคิดของการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชันที่ถูกขยายดูเหมือนจะสมเหตุสมผลและไม่ยุ่งยาก อย่างไรก็ตามถ้าฟังก์ชันสเกลาร์นั้นเป็นฟังก์ชันอดิศัย ปัญหาคือ ฟังก์ชันเมทริกซ์จากฟังก์ชันที่ถูกขยายเหล่านั้น จะมีความหมายและคำนวณค่าอย่างไร เช่น ฟังก์ชัน e^A, $\sin A$ และ $\cos A$

3.2 นิยามของฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านรูปแบบบัญญัติจอร์แดน

กำหนดให้ $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะจำนวน m ค่าที่แตกต่างกันทั้งหมดคือ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ และ n_i เป็นอันดับของบล็อกจอร์แดนที่ใหญ่ที่สุดที่บรรจุ λ_i

บทนิยาม 6 จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนสเปกตรัมของ A ถ้า

$$f^{(j)}(\lambda_i),\ j=0,1,\ldots,n_i-1,\ i=1,2,\ldots,m \text{ มีค่า} \tag{11}$$

และเรียกค่าใน (11) ว่า ค่าของฟังก์ชันบนสเปกตรัมของ A

บทนิยาม 7 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ใดๆซึ่ง $A=QJQ^{-1}$ เมื่อ $J=\operatorname{diag}\{J_1,\ldots,J_m\}$ และกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนสเปกตรัมของ A ฟังก์ชัน f ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$f(A)=Qf(J)Q^{-1}=Q\operatorname{diag}\{f(J_1),\ldots,f(J_m)\}Q^{-1} \tag{12}$$

$$\text{เมื่อ } f(J_k)=\begin{bmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \cdots & \dfrac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_k) \\ 0 & & & f(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{13}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้า $J = D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ จะได้

$$f(A) = Qf(D)Q^{-1} = Q\mathrm{diag}\{f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n)\}Q^{-1} \tag{14}$$

ตัวอย่างที่ 2 จากตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ จงคำนวณค่า e^A

วิธีทำ เนื่องจาก $\{1\}$ เป็นสเปกตรัมของ A ดังนั้น e^t เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนสเปกตรัมของ A จากตัวอย่างที่ 1 ได้ว่า $A = QJQ^{-1}$ เมื่อ

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\{J_1, J_2\}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $J_1 = [1]$ และ $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จากสูตร (13) ในบทนิยาม 7 จะได้

$e^J = \mathrm{diag}\{e^{J_1}, e^{J_2}\}$ เมื่อ $e^{J_1} = e^{[1]} = [e]$ และ $e^{J_2} = e^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & e \end{bmatrix}$ ดังนั้น

$$e^A = Qe^JQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e & 8e & -4e \\ -3e & -5e & 3e \\ -2e & -4e & 3e \end{bmatrix}$$

□

3.3 อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันเมทริกซ์

อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันเมทริกซ์เป็นเครื่องมือหนึ่งซึ่งใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันเมทริกซ์ ซึ่งเงื่อนไขการมีการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันนั้นจะต้องสอดคล้องกับรัศมีการลู่เข้าของฟังก์ชันสเกลาร์ ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8 [2] สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ที่มีการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด a คือ $f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$ ซึ่งมีรัศมีการลู่เข้า r สำหรับแต่ละ $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ จะได้ว่า $f(A)$ นิยามได้และ

$$f(A)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(A-aI)^j \tag{15}$$

ก็ต่อเมื่อ แต่ละค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ ที่แตกต่างกันทั้งหมดของเมทริกซ์ A สอดคล้องเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งต่อไปนี้

(1) $|\lambda_i-a|<r$, $i=1,2,...,m$

(2) $|\lambda_i-a|=r$ และ อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f^{(n_i-1)}(\lambda)$ ลู่เข้าที่จุด $\lambda=\lambda_i$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,...,m$

โดยทฤษฎีบท 8 ทำให้สามารถนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ได้อีกแนวทางหนึ่ง ดังเช่นฟังก์ชันต่อไปนี้

3.3.1 ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลเมทริกซ์

การนิยามฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลเมทริกซ์จะเริ่มจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ e^x รอบจุด 0 คือ

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\text{ , สำหรับทุกๆ } x\in\mathbb{C} \tag{16}$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 8 ฟังก์ชันก์เอ็กโปเนนเชียลเมทริกซ์ e^A นิยามได้โดย

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!},\quad\text{สำหรับทุกๆเมทริกซ์ } A\in\mathcal{M}^{n\times n} \tag{17}$$

นอกจากการใช้บทนิยาม 7 และ ทฤษฎีบท 8 ยังสามารถใช้สมบัติต่อไปนี้ช่วยในการคำนวณค่าของ e^A ได้อีกด้วย

ทฤษฎีบท 9 [3] ให้ $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ จะได้ว่า

(1) ถ้า A และ B มีสมบัติสลับที่การคูณ นั่นคือ $AB=BA$ แล้ว $e^{A+B}=e^Ae^B$

(2) ถ้า $\theta\in\mathbb{C}$ แล้ว $e^{\begin{pmatrix}0&\theta\\-\theta&0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

(3) $e^{\operatorname{diag}\{A,B\}} = \operatorname{diag}\{e^A, e^B\}$

(4) ถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงคำนวณ e^{At}

วิธีทำ เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

และ $2I, -4\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ มีสมบัติสลับที่ ดังนั้น $e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{bmatrix}} e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}(-4t)}$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4t & 8t^2 \\ 0 & 1 & -4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -4e^{2t}t & 8e^{2t}t^2 \\ 0 & e^{2t} & -4e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$ □

3.3.2 ลอการิทึมเมทริกซ์

แนวทางหนึ่งในการนิยามฟังก์ชันลอการิทึมเมทริกซ์คือการนิยามผ่านอนุกรมเทย์เลอร์ เนื่องจากอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด 0 ของ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad (18)$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกๆ x ที่ $|x| < 1$ โดยการแทน x ด้วย $-x$ ใน (18) จะได้

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \qquad (19)$$

เมื่อนำ (19) หักออกด้วย (18) จะได้

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right) \tag{20}$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ จะได้ $x=\dfrac{1-y}{1+y}$ และ

$$\ln y=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{2k+1} \tag{21}$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกๆ y เมื่อ $\left|\dfrac{1-y}{1+y}\right|<1$ นั่นคือ $\operatorname{Re}(y)>0$

ดังนั้น ฟังก์ชันลอการิทึมเมทริกซ์ สามารถนิยามได้โดย

$$\ln A=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left((I-A)(I+A)^{-1}\right)^{2k+1} \tag{22}$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกๆ $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ เมื่อ $\min_k \operatorname{Re}(\lambda_k(A))>0$

3.3.3 ฟังก์ชันกำลังเศษส่วนของเมทริกซ์

ในหัวข้อนี้จะนิยามฟังก์ชันกำลังเศษส่วนของเมทริกซ์ (Matrix fractional power function) ซึ่งไม่ได้หมายถึงเมทริกซ์ที่มีกำลังเป็นเศษส่วนเพียงเท่านั้น ยังหมายถึงเมทริกซ์ที่มีกำลังเป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย แต่ยังคงเรียกชื่อเช่นเดิม

กำหนดให้ $r\in\mathbb{C}$ จะได้ว่า $x^r=e^{r\ln x}$ สำหรับทุกๆ $x>0$ และ เนื่องจาก $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$ ลู่เข้าสำหรับทุกๆ $x\in\mathbb{C}$ จะได้

$$x^r=1+r\ln x+\frac{(r\ln x)^2}{2!}+\frac{(r\ln x)^3}{3!}+\dots \tag{23}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันกำลังเศษส่วนเมทริกซ์ สามารถนิยามได้โดย

$$A^r=1+r\ln A+\frac{(r\ln A)^2}{2!}+\frac{(r\ln A)^3}{3!}+\dots \tag{24}$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกๆ $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ เมื่อ $\min_k \operatorname{Re}(\lambda_k(A))>0$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $p\geq 2$ ที่เป็นจำนวนนับ จะเรียก

$$A^{1/p}=1+\frac{\ln A}{p}+\frac{(\ln A)^2}{p^2 2!}+\frac{(\ln A)^3}{p^3 3!}+\dots \tag{25}$$

ว่า *รากที่ p ที่เป็นบวกของเมทริกซ์ A* ซึ่งจะมีค่าเมื่อ $\min_k \operatorname{Re}(\lambda_k(A))>0$

3.3.4 ฟังก์ชันอดิศัยเมทริกซ์

ฟังก์ชันอดิศัยในที่นี้ได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกซึ่งสามารถนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์จากฟังก์ชันที่ถูกขยายของฟังก์ชันเหล่านี้โดยเขียนฟังก์ชันดังกล่าวในรูปฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล ดังนี้

สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ และ } \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{26}$$

และ สำหรับฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \text{ และ } \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2i} \tag{27}$$

เมื่อ $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}$, $e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k x^k}{k!}$ และ $e^{-ix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k x^k}{k!}$, สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{C}$ โดยที่ $i = \sqrt{-1}$ เป็นจำนวนจินตภาพในจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 10 กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ฟังก์ชันตรีโกณมิติเมทริกซ์นิยามได้โดย

1. $\cos A = \frac{e^{Ai}+e^{-Ai}}{2}$
2. $\sin A = \frac{e^{Ai}-e^{-Ai}}{2i}$
3. $\sec A = (\cos A)^{-1}$ เมื่อ $\det(\cos A) \neq 0$
4. $\tan A = \sin A \sec A$
5. $\csc A = (\sin A)^{-1}$ เมื่อ $\det(\sin A) \neq 0$
6. $\cot A = \cos A \csc A$

บทนิยาม 11 กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกเมทริกซ์นิยามได้โดย

1. $\cosh A = \frac{e^{A}+e^{-A}}{2}$
2. $\sinh A = \frac{e^{A}-e^{-A}}{2i}$
3. $\mathrm{sech} A = (\cosh A)^{-1}$ เมื่อ $\det(\cosh A) \neq 0$

4. $\tan A = \sinh A \operatorname{sech} A$

5. $\operatorname{csch} A = (\sinh A)^{-1}$ เมื่อ $\det(\sinh A) \neq 0$

6. $\coth A = \cosh A \operatorname{csch} A$

4. การประยุกต์ในคณิตศาสตร์การเงิน: แบบจำลองการจ่ายชำระหนี้

พิจารณาการผ่อนชำระหนี้สินเชื่อที่อยู่อาศัย 1 รายการ สมมุติให้ p_0 เป็นเงินต้นที่ลูกหนี้กู้ยืมหรือวงเงินที่สถาบันการเงินอนุมัติให้ผู้กู้ โดยที่การจ่ายชำระคืนนั้นจะต้องจ่ายชำระคืนเป็นจำนวนเงินที่มากกว่าดอกเบี้ยที่เกิดขึ้น ณ เวลานั้น ให้ $p(t)$ แทนเงินต้นหรือมูลค่าหนี้คงเหลือหลังจากการชำระหนี้ที่เวลา t ใดๆ ตลอดช่วงเวลาแห่งสัญญาการกู้ยืม $[0,T]$ โดยที่ T เป็นเวลาสิ้นสุดของสัญญา สมมติว่าผู้กู้สามารถจ่ายชำระคืนเงินกู้ ได้ตลอดเวลา โดยที่อัตราการจ่ายชำระคืน ที่ t ใดๆ เท่ากับ $h(t)$ ต่อปี ภายใต้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง $\rho(t)$ ต่อปี พิจารณามูลค่าของหนี้คงเหลือที่เวลา $t+\delta$ หลังจากมีการจ่ายชำระหนี้อย่างต่อเนื่องบนช่วง $[t,t+\delta], \delta << 1$ จะได้ว่า เงินต้นคงเหลือหลังจากการชำระหนี้ที่เวลา $t+\delta$ เท่ากับ มูลค่าของหนี้สะสม หักออกด้วย มูลค่าของเงินจ่ายชำระคืนตลอดช่วง $[t,t+h]$ นั่นคือ

$$p(t+\delta) = p(t)e^{\int_t^{t+\delta} \rho(s)ds} - \int_t^{t+\delta} h(s)e^{\int_s^{t+\delta} \rho(\tau)d\tau} ds \tag{28}$$

ผลที่ตามมาคือ
$$\begin{aligned} p(t+\delta) &= p(t)e^{\rho(t)\delta + o(\delta)} - h(t)e^{\rho(t)\delta+o(\delta)}\delta + o(\delta) \\ &= \left[p(t) - h(t)\delta\right]\left[1+\rho(t)\delta\right] + o(\delta) \end{aligned} \tag{29}$$

เมื่อ $f(x) = o(g(x))$ เมื่อ $x \to a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ซึ่งหมายถึง $f(x)$ มีค่าน้อยกว่า $g(x)$ มากๆเมื่อ x เข้าใกล้ a ดังนั้น $o(\delta^n) \to 0$ เมื่อ $\delta \to 0$ จึงสามารถตีความเป็นค่าความคลาดเคลื่อนในเทอมของ δ ที่มีกำลังสูงกว่า n เมื่อ δ เข้าใกล้ 0 ซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{p(t+\delta) - p(t)}{\delta} = -h(t) + \left[p(t) - h(t)\delta\right]\rho(t) + \frac{o(\delta)}{\delta} \tag{30}$$

ถ้าให้ $\delta \to 0$ จะได้

$$\frac{dp(t)}{dt} = \rho(t)p(t) - h(t) \tag{31}$$

เพื่อความสะดวกกำหนดสัญลักษณ์ $[a_1,...,a_n]$ แทนเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จากแบบจำลองการจ่ายชำระหนี้สินเชื่อ 1 รายการ ตามสมการ (31) ดังนั้นจะได้แบบจำลองการจ่ายชำระหนี้ของรายการของสินเชื่อขนาด n (รายการ) อธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ใน $\mathbb{R}^n$ ดังนี้

$$\frac{dp(t)}{dt} = \rho(t)\,p(t) - h(t) \tag{32}$$

เมื่อ $p(t) = [p_1(t),...,p_n(t)]$ แทนรายการของเงินต้นคงเหลือที่เวลา t ใดๆ

$\rho(t) = \operatorname{diag}\{\rho_1(t),...,\rho_n(t)\}$ แทนเมทริกซ์ของอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง

$h(t) = [h_1(t),...,h_n(t)]$ แทนการลดลงของเงินต้น หรือ อัตราการจ่ายชำระคืน

T_i แทนอายุของสัญญาการจ่ายชำระหนี้ สัญญาที่ $i = 1,...,n$ และ

$T = \max_i T_i$ ซึ่งจะเป็นเวลาที่น้อยที่สุดที่จ่ายชำระหนี้ ครบทุกสัญญา

พิจารณาสมการ (32) เมื่อคูณ $e^{-\int_0^t \rho(s)ds}$ ทั้ง 2 ข้างของสมการจะได้

$$e^{-\int_0^t \rho(s)ds}\,dp(t) - e^{-\int_0^t \rho(s)ds}\,\rho(t)\,p(t)dt = -e^{-\int_0^t \rho(s)ds}\,h(t)dt \tag{33}$$

ซึ่งสามารถลดรูป และอินทิเกรตตั้งแต่เวลา 0 ถึง k ใดๆ ได้เป็น

$$\int_0^k d\left(e^{-\int_0^t \rho(s)ds}\,p(t)\right) = -\int_0^k e^{-\int_s^t \rho(s)ds}\,h(t)dt \tag{34}$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยของแบบจำลองชำระหนี้ ในรูป

$$p(k) = e^{\int_0^k \rho(s)ds}\,p_0 - \int_0^k e^{\int_t^k \rho(s)ds}\,h(t)dt \tag{35}$$

เมื่อ $e^{\int_0^k \rho(s)ds} = e^{\operatorname{diag}\left\{\int_0^k \rho_1(s)ds,...,\int_0^k \rho_n(s)ds\right\}} = \operatorname{diag}\left\{e^{\int_0^k \rho_1(s)ds},...,e^{\int_0^k \rho_n(s)ds}\right\}$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $\rho(t) = \operatorname{diag}\{\rho_1,...,\rho_n\}$ และ $h(t) = [h_1,...,h_n]$

จะได้ หนี้คงเหลือที่เวลา k ใดๆ จะเท่ากับ

$$p(k) = \operatorname{diag}\{e^{\rho_1 k},...,e^{\rho_n k}\}\,p_0 - \int_0^k \operatorname{diag}\{e^{\rho_1(k-t)},...,e^{\rho_n(k-t)}\}[h_1,...,h_n]dt$$

$$= \text{diag}\left\{e^{\rho_1 k},\ldots,e^{\rho_n k}\right\} p_0 - \left[\int_0^k h_1 e^{\rho_1(k-t)}dt,\cdots,\int_0^k h_n e^{\rho_n(k-t)}dt\right]$$

$$= \left[e^{\rho_1 k} p_0 - \frac{h_1(e^{\rho_1 k}-1)}{\rho_1},\ldots, e^{\rho_n k} p_0 - \frac{h_n(e^{\rho_n k}-1)}{\rho_n}\right] \tag{36}$$

และเมื่อมีการชำระหนี้เสร็จสมบูรณ์จะได้ $p(T)=0$ นั่นคือ

$$e^{\rho_j T} p_0 = \frac{h_j(e^{\rho_j T}-1)}{\rho_j} \quad \text{สำหรับทุกๆ } j=1,2,\ldots,n \tag{37}$$

นอกจากการประยุกต์ฟังก์ชันเมทริกซ์ในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของการจ่ายชำระหนี้ตามที่ได้กล่าวแล้ว ยังพบการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเมทริกซ์ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้านอื่นๆ เช่น ทางด้านคณิตศาสตร์การเงิน ทฤษฎีการควบคุม ปัญหาต่างๆทางฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น ซึ่งผู้อ่านสามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้ในบทความวิจัย บทความวิชาการ หรือหนังสือที่เกี่ยวข้อง อาทิ อ้างอิงรายการ [4-9 และเอกสารอ้างอิงภายในเล่ม]

5. สรุป

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอแนวคิดพื้นฐานในการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ ซึ่งมีลักษณะมีความเป็นนัยทั่วไปจากฟังก์ชันสเกลาร์ โดยเริ่มจากการนิยามฟังก์ชันของเมทริกซ์โดยใช้ฟังก์ชันที่ถูกขยายจากฟังก์ชันสเกลาร์ หลังจากนั้นได้นำสู่การนิยามของฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านรูปแบบบัญญัติจอร์แดนของฟังก์ชันที่นิยามบนสเปกตรัมของเมทริกซ์ใดๆ อย่างไรก็ตามการคำนวณค่าของฟังก์ชันเมทริกซ์ในรูปฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านรูปแบบบัญญัติจอร์แดนนั้นก็ยังมีความยุ่งยากอยู่ดี ในบทความนี้จึงได้นำเสนอการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านฟังก์ชันที่ถูกขยายจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสเกลาร์ ซึ่งจะมีประโยชน์มากในเรื่องของการประมาณค่าของฟังก์ชัน นอกจากนี้ในบทความนี้ได้ยกตัวอย่างการประยุกต์ในการสร้างแบบจำลองการจ่ายชำระหนี้ เพื่อให้ผู้อ่านเห็นถึงความเชื่อมโยงของทฤษฎีทางคณิตศาสตร์กับปัญหาทางโลกจริงมากขึ้น

6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ เป็นอย่างยิ่ง ที่เป็นแรงผลักดันและกำลังใจทำให้เกิดการสร้างสรรค์บทความทางวิชาการนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] Constantinidex, G. M. and Malliaris A. G., “Portfolio Theory,” Chapter 1 in R. Jarrow et al. Eds. Handbooks in OR & MS, vol. 9, 1995

[2] F. R. Gantmacher, The Theory of matrices, New York: Chelsea publishing company, 1959.

[3] Hong Sung Pyo, Chapter 8: Jordan Canonical Forms, from http://math.postech.ac.kr/~sungpyo/LinearAlge-2007/Chap8.pdf

[4] J. W. Polderman and J. C. Willems, Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach, New York: Springer Verlag, 1998.

[5] Jean-Philippe Bouchaud and Marc Potters, Financial Applications of Random Matrix Theory: a short review, from http://math.postech.ac.kr/~sungpyo/LinearAlge-2007/Chap8.pdf., 2009.

[6] John H. Cochrane, Time Series for Macroeconomics and Finance, Chicago: University of Chicago, 1997.

[7] Lawrence C. Evans, An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory, Berkeley: University of California, 1983.

[8] Nicholas J. Higham, Function of Matrices: Theory and Computation, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[9] Wolfgang Ertel, Advanced Mathematics for Engineers, Hochschule Ravensburg-Weingarten University of Applied Sciences, 2008.