DOI: 10.14456/mj-math.2017.10

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(692) May–Aug, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ความงามทางคณิตศาสตร์กับสะเต็มศึกษา: Sierpinski Triangle

Aesthetic in Mathematics along with STEM Education: Sierpinski Triangle

ปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์
Pivawat Srisangwan

Wangkhoi Pittaya School, Nakhonsawan, 60220, Thailand

Email: pii.piyawat@utd.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์รู้ที่เน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหา เรื่อง ลำดับและอนุกรม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งผู้เขียนได้มีโอกาสทดลองใช้กับผู้เรียนและพบว่าทำให้ผู้เรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีความเข้าใจสาระหลักเกี่ยวกับลำดับทางคณิตศาสตร์ ใช้ทักษะการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ ภายใต้แนวคิดสะเต็มศึกษา (STEM Education) และที่สำคัญคือทำให้ผู้เรียนมองเห็นความงดงามที่อยู่ในซ่อนวิชาคณิตศาสตร์ นั่นคือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง “แฟร็กทัลสัมพันธ์สะเต็มศึกษา”

คำสำคัญ: สะเต็มศึกษา แฟร็กทัล

ABSTRACT

This article shows the example of learning activity on Mathematics connecting a process of Mathematical problem solving on Sequence & series of eleven grade students. The article found that the students have met the Mathematical skill and process as well as understand the concepts on sequence and use problem solving skill in appropriate way under the concept of STEM

Education. The students also feel the aesthetic in Mathematics through the learning activity of “Fractal and STEM Education”

Keywords: STEM Education, Fractal

1. บทนำ

วิชาคณิตศาสตร์ (Mathematics) ถือเป็นรากฐานสำคัญสำหรับการเรียนรู้วิชาอื่นๆ ในกลุ่มสะเต็มศึกษา ไม่ว่าจะเป็นวิทยาศาสตร์ (Science) เทคโนโลยี (Technology) หรือกระบวนการทางวิศวกรรม (Engineering) ซึ่งล้วนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ได้ทั้งสิ้น ถึงแม้ว่าลำดับของวิชาคณิตศาสตร์ (Mathematics) ในชื่อกลุ่มวิชาสะเต็มศึกษา (STEM Education) จะอยู่ในตำแหน่งสุดท้ายก็ตาม [1] โดยที่การจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สามารถนำแนวคิดสะเต็มศึกษา โดยเฉพาะการส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาต่างๆ อย่างเป็นระบบมาปรับใช้ได้ โดยไม่จำเป็นต้องบูรณาการเข้ากับกลุ่มวิชาอื่นๆ เสมอไป ยกตัวอย่างในบทความนี้ผู้เขียนได้นำเสนอการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้สอนสามารถใช้ความงามของเรขาคณิต (Geometry) ในรูปแบบของงานศิลปะบูรณาการเข้ากับสาระพีชคณิต (Algebra) ช่วยในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้สะเต็มศึกษา เรื่อง ลำดับและอนุกรม เป็นการใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ที่นักเรียนเคยเรียนมาเป็นเครื่องมือเพื่อช่วยในการแก้ปัญหา

2. แฟร็กทัล (Fractal)

แฟร็กทัล (Fractal) ในปัจจุบันเป็นคำที่ใช้ในเชิงวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ หมายถึง วัตถุทางเรขาคณิต ที่มีคุณสมบัติคล้ายตนเอง คือ ดูเหมือนกันไปหมด (เมื่อพิจารณาจากแง่ใดแง่หนึ่ง) ไม่ว่าจะดูที่ระดับความละเอียด (โดยการส่องขยาย) หรือสเกลใดก็ตาม แฟร็กทัล (Fractal) ได้ถูกค้นพบมานานก่อนที่คำว่า “แฟร็กทัล” จะถูกบัญญัติขึ้นมาใช้เรียกสิ่งเหล่านี้ ในปี ค.ศ.1872 คาร์ล ไวเออร์ชตรัสส์ (Karl Weierstrass) ได้ยกตัวอย่างของฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติ “everywhere continuous but nowhere differentiable” คือ มีความต่อเนื่องที่ทุกจุด แต่ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ ต่อมาในปี ค.ศ.1904 เฮลเก ฟอน ค็อค (Helge Von Koch) ได้ยกตัวอย่างทางเรขาคณิต ซึ่งได้รับการเรียกขานในปัจจุบันนี้ว่า

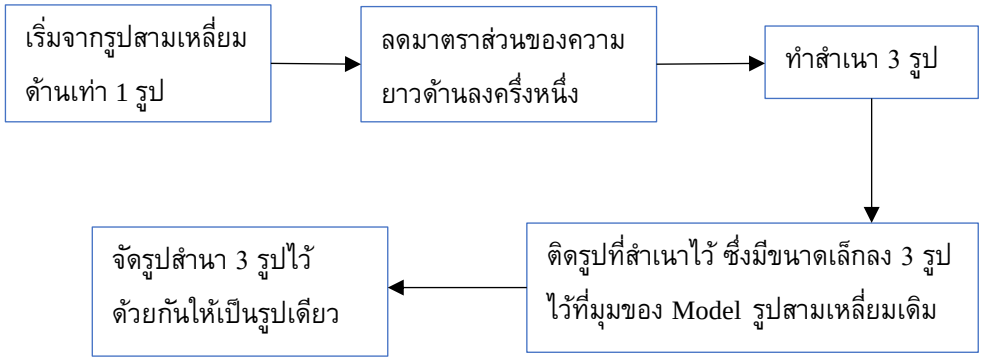
“เกล็ดหิมะค็อค” (Koch Snowflake) ต่อมา เกออร์ก คันทอร์ (Georg Cantor) ได้ยกตัวอย่างของ เซตย่อยของจำนวนจริง ซึ่งมีคุณสมบัติแฟร็กทัลนี้ เป็นที่รู้จักกันในชื่อ เซตคันทอร์ หรือ ฝุ่นคันทอร์ นอกจากนี้ยังมี นักคณิตศาสตร์อีกหลายคนในช่วงปลายคริสต์ศตวรรษที่ 19 ถึงต้นคริสต์ศตวรรษที่ 20 เช่น อองรี ปวงกาเร (Henri Poincare), เฟลิกซ์ คลิน (Felix Klein), ปีแอร์ ฟาตู (Pierre Fatou) และ กาสตง จูเลีย (Gaston Julia) ได้ศึกษาฟังก์ชันวนซ้ำ (Iterated Function) ซึ่งมีคุณสมบัติความคล้ายตนเอง (Self–similarity) ซึ่งความคล้ายตนเองเกิดขึ้นเมื่อโครงสร้างมีรูปแบบซ้ำๆ ของภาพที่เล็กลงๆ ที่ยังอยู่ในตัวมันในมาตราส่วนที่แตกต่างกัน

3. รูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกิ (Sierpinski Triangle)

รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ (Sierpinski Triangle) เป็นแฟร็กทัล ประเภทหนึ่งของรูปเรขาคณิต ได้รับการตั้งชื่อครั้งแรกในปี ค.ศ.1970 โดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ บีนอยท์ แมนเดลบร็อท (Benoit Mandelbrot) สร้างขึ้นโดยกระบวนการทำซ้ำ โดยจะเริ่มจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหนึ่งรูป และครั้งต่อไปจะใช้รูปที่เกิดขึ้นเป็นรูปใหม่ที่จะสร้างต่อไป โครงสร้างที่ซับซ้อนดังกล่าวมีความน่าสนใจ ด้วยความงดงามที่มีอานุภาพ สมบัติทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่ซ่อนอยู่ในโครงสร้างนี้ ปรากฏให้เห็นมากมายอย่างน่าอัศจรรย์ มีกระบวนการสร้าง ดังนี้

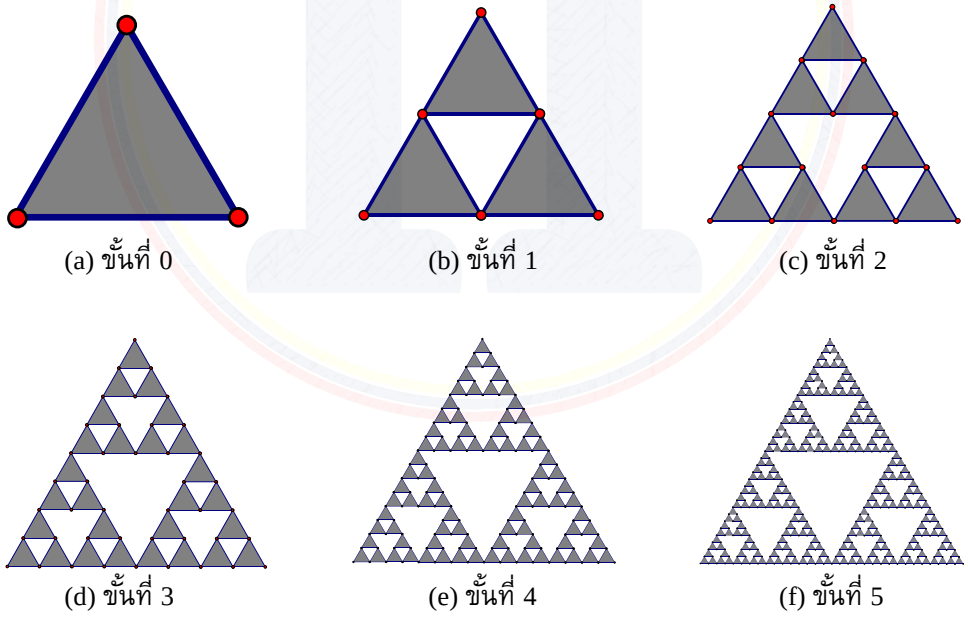
1. เริ่มจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 1 รูป
2. ลดมาตราส่วนของความยาวด้านลงครึ่งหนึ่ง
3. ทำสำเนา 3 รูป
4. ติดรูปที่สำเนาไว้ ซึ่งมีขนาดเล็กลง 3 รูปไว้ที่มุมของรูปสามเหลี่ยมเดิม
5. จัดรูปสำนา 3 รูป (ดังข้อ 4) ไว้ด้วยกันให้เป็นรูปเดียว
6. จากข้อ 5 ดำเนินการซ้ำตั้งแต่กระบวนการในข้อ 2 ลงมา

โดยมีแผนผังที่แสดงการสร้างดังนี้



รูปที่ 1 กระบวนการสร้างรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ (Sierpinski Triangle)

เมื่อดำเนินการตามกระบวนการดังกล่าว โดยใช้โปรแกรม The Geometer' s Sketchpad (GSP) แล้วจะได้รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ (Sierpinski Triangle) มีลักษณะ ดังต่อไปนี้



(a) ขั้นที่ 0 (b) ขั้นที่ 1 (c) ขั้นที่ 2

(d) ขั้นที่ 3 (e) ขั้นที่ 4 (f) ขั้นที่ 5

รูปที่ 2 (a)-(f) รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ (Sierpinski Triangle) ขั้นที่ 0 ถึง ขั้นที่ 5 ตามลำดับ

โดยการทำกระบวนการข้างต้นซ้ำแล้วซ้ำอีก โดยแต่ละครั้งจะใช้รูปที่เกิดขึ้นเป็นรูปใหม่ที่จะสร้างต่อไป โครงสร้างที่ซับซ้อนน่าตื่นตาตื่นใจด้วยความงามที่มีอานุภาพและสมบัติทางคณิตศาสตร์จะเริ่มปรากฏออกมา จากกระบวนการสร้างรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ (Sierpinski Triangle) ข้างต้น จะเห็นว่าผู้เรียนได้ใช้กระบวนการทางวิศวกรรมสร้างแบบรูปที่มีคุณสมบัติคล้ายตนเอง (Self–similarity) เพื่อศึกษาสมบัติทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่ซ่อนอยู่ในโครงสร้างนี้

4. ความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่ซ่อนอยู่ในรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ

ความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่น่าสนใจหลายเรื่องสามารถสำรวจและค้นหา ทำให้อยู่ในรูปทั่วไป (General Form) ได้โดยให้นักเรียนใช้รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิที่สร้างขึ้นโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) บางเรื่องได้ให้ไว้ในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ความสัมพันธ์เชิงตัวเลขในรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ

รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ ขั้นที่	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	***n***
จำนวนรูปสามเหลี่ยมสีทึบ	1	3	9	27	81	243	3^n
จำนวนรูปสามเหลี่ยมสีขาว	0	1	4	13	40	121	$\frac{3^n-1}{2}$
จำนวนจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมสีทึบ	3	6	15	42	123	366	$a_{n-1} + 3^n$ $(a_0 = 3)$
จำนวนจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมสีขาว	0	3	12	39	120	363	$\frac{3\ 3^n-1}{2}$
อัตราส่วนระหว่างจำนวนรูปสามเหลี่ยมสีทึบกับจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{243}{1024}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$
เส้นรอบรูปรอบ ๆ รูปสามเหลี่ยมสีทึบ	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n$

ตัวอย่าง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับของจำนวนรูปสามเหลี่ยมสีทึบ

ลำดับของจำนวนรูปสามเหลี่ยมสีทึบในรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ คือ 1, 3, 9, 27, 81, 243, …

เราจะหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 1, 3, 9, 27, 81, 243, … ได้ดังนี้

กำหนดให้ n แทน จำนวนขั้นของการสร้างรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ และ

a_n แทน พจน์ที่ n ของลำดับของจำนวนรูปสามเหลี่ยมสีทึบ

จากลำดับ 1, 3, 9, 27, 81, 243, … เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 = 3^0 \\ a_1 &= 3 = 3^1 \\ a_2 &= 9 = 3^2 \\ a_3 &= 27 = 3^3 \\ a_4 &= 81 = 3^4 \\ a_5 &= 243 = 3^5 \\ &\vdots \\ a_n &= 3^n \end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับ 1, 3, 9, 27, 81, 243, … นี้ จะมีพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 3^n$ เราจึงได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมสีทึบในรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ คือ $a_n = 3^n$ เมื่อ n แทน จำนวนขั้นของการสร้างรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ ■

ในสภาพที่กำหนดใดๆ ขั้นตอนถัดไปจะมีรูปสามเหลี่ยมเป็นสามเท่าของชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมเสมอ ดังนั้นรูปจะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา แต่สภาพที่จำกัดภาพที่ย่อส่วนยังจะอยู่เหมือนภาพทั้งภาพแน่นอน ภาพในอุดมคติเช่นนี้คือสิ่งที่เป็นรูปธรรม ภาพที่ดีที่สุดที่สามารถแสดงได้คือ ขั้นตอนจำกัดบางขั้น ซึ่งผู้สอนอาจเชื่อมโยงให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับจำกัด (Finite Sequence) และลำดับอนันต์ (Infinite Sequence)

5. คำถามท้าทายความคิดของนักเรียน (Intellectual Challenge to Learners)

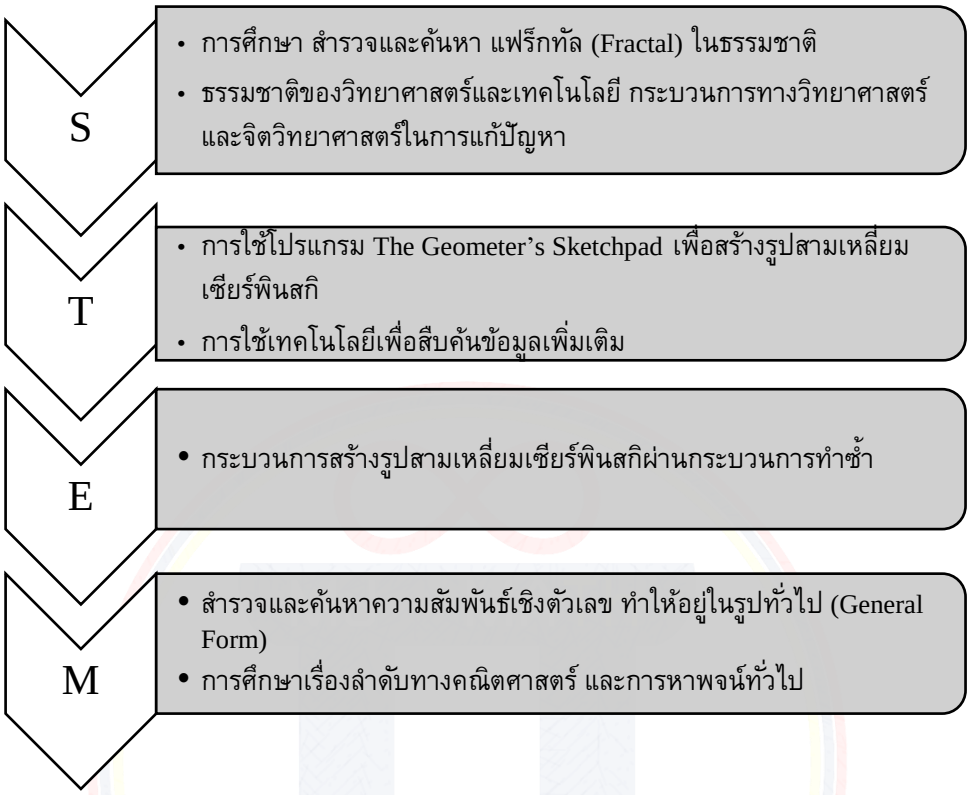
1. เพราะเหตุใดลำดับของการศึกษาความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่ซ่อนอยู่ในรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ (Sierpinski Triangle) จึงเริ่มต้นที่ a_0

2. ร่วมกันศึกษาความงามทางคณิตศาสตร์รูปแบบอื่นๆ ที่มีคุณสมบัติคล้ายตนเอง (Self-similarity) เช่น เส้นโค้งค็อค, เส้นโค้งมังกร, Peano Curve, แฟร็กทัลในทางศิลปะ เป็นต้น สามารถต่อยอดเป็นโครงงานคณิตศาสตร์หรือโครงงานสะเต็มศึกษาได้หรือไม่ อย่างไร

3. ในธรรมชาติเราสามารถพบ แฟร็กทัล (Fractal) ได้จากสิ่งใดได้บ้าง จงยกตัวอย่าง

4. รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิ (Sierpinski Triangle) กับลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence) มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ อย่างไร

5. ให้นักเรียนนำรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกิที่สร้างขึ้น ไปต่อยอดหรือพัฒนาเป็นผลงานหรือนวัตกรรมที่นักเรียนสนใจ เช่น ลวดลายของเสื้อยืด, ลายกระเบื้อง, ลายเสื่อ ฯลฯ ทั้งนี้อาจทำในรูปแบบของโครงงานหรือนวัตกรรม/ สิ่งประดิษฐ์ ตามความสามารถและความสนใจของนักเรียน



รูปที่ 3 เชื่อมโยงกิจกรรม "แฟร็กทัลสัมพันธ์สะเต็มศึกษา" กับกลุ่มวิชาใน STEM Education

แม้ว่าสะเต็มศึกษาจะไม่ได้มีคำจำกัดความที่ชัดเจน แต่หากพิจารณาส่วนของแนวความคิดและหลักการ ก็จะเห็นว่าส่วนใหญ่จะอยู่บนพื้นฐานเดียวกัน คือ ความต้องการที่จะพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความคิดในการแก้ไขปัญหาที่พบเห็นในชีวิตจริง สร้างเสริมประสบการณ์ ทักษะชีวิต (ทักษะในศตวรรษที่ 21) มีความคิดสร้างสรรค์ และเตรียมความพร้อมให้กับนักเรียนในการปฏิบัติงาน (อาชีพ) ที่ต้องใช้องค์ความรู้และทักษะกระบวนการด้านต่าง ๆ ที่กำลังจะเกิดขึ้นอย่างมากมายในอนาคตได้ [3]

บางครั้งเราอาจเจอการเพิ่มศาสตร์ทางศิลปะ (Arts) เข้าไปใน STEM Education จะช่วยทำให้นักเรียนได้มีโอกาสได้ถ่ายทอดหรือประยุกต์ใช้ความคิดรวบยอด (Concept) ด้วยความคิดสร้างสรรค์และมีจินตนาการมากยิ่งขึ้น นักเรียน

สามารถสื่อสารความคิดของตนเองออกมาในรูปแบบของดนตรีและการเคลื่อนไหว การสื่อสารด้วยภาษาท่าทาง หรือการสื่อสารออกมาในรูปแบบของการวาดภาพ หรือการสร้างโมเดลจำลอง แม้ว่าจิตรกรจะบอกเราว่าสัญลักษณ์บางอย่างของคณิตศาสตร์ เช่น การสมมาตร การเท่ากัน การไม่เท่ากัน สิ่งเหล่านี้มักจะเกี่ยวข้องกับศิลปะ แต่ศิลปะจริงๆ ไม่ต้องการ การบวก การลบ การหารหรือการคูณ แต่อย่างใด แต่ถ้าเราสังเกตให้ดีเราจะพบว่ารูปเรขาคณิตต่าง ๆ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม มักปรากฏบนรูปภาพเสมอและบางครั้งจำเป็นต้องใช้การคำนวณทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ภาพที่สร้างมีความสวยงาม สมมาตร สัดส่วนถูกต้อง ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่าศิลปะและคณิตศาสตร์เกี่ยวเนื่องกัน แม้ว่าเวลาจะเปลี่ยนไปนานแค่ไหนศิลปะมักคู่กับคณิตศาสตร์เสมอ

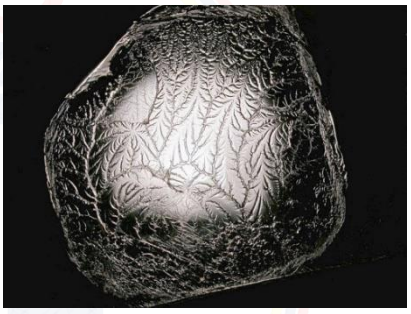
6. บทสรุป

จากตัวอย่างการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม ในบทความนี้ คงแสดงให้เห็นแล้วว่าคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์อย่างใกล้ชิดต่อวิชาวิทยาศาสตร์เทคโนโลยี และการออกแบบทางวิศวกรรมในกลุ่มวิชาสะเต็มศึกษาเพียงใด ทำให้นักเรียนเห็นว่างานศิลปะทางคณิตศาสตร์ ถ้ามีแบบแผนที่แน่นอนแม่นยำและมีการวางแผนกำหนดโครงสร้างอย่างเรียบร้อยแล้ว เมื่อนำเข้าสู่กระบวนการออกแบบทางวิศวกรรมหรือเข้าสู่ระบบเทคโนโลยีสมัยใหม่ เช่น คอมพิวเตอร์ ทำให้เกิดภาพที่สวยงาม และสามารถพัฒนางานศิลปะทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น [2] สำหรับแบบรูป (Pattern) ที่จะเกิดขึ้นนั้น อาจจะขึ้นอยู่กับพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา แบบจำลองทางเทคโนโลยี หรือทางวิทยาศาสตร์อื่นๆ ดังตัวอย่าง

รูปที่ 3(a) ภาพใบเฟิร์นที่สร้างโดยคอมพิวเตอร์โดยเทคนิคแฟร็กทัล

รูปที่ 3(b) บร็อกโคลีชนิดหนึ่ง (Romanesco Broccoli) มีลักษณะของแฟร็กทัล

รูปที่ 3(c) การงอกของผลึกทองแดงในสารละลายคอปเปอร์ซัลเฟตในการชุบโลหะด้วยไฟฟ้า



รูปที่ 3(d) แฟร็กทัลเกิดขึ้นเมื่อดึงแผ่นอคริลิกที่ติดกันด้วยกาวออกจากกัน

รูปที่ 3(a)-(b) การเกิดแบบรูป (Pattern) โดยพื้นฐานทางชีววิทยา

รูปที่ 3(c)-(d) การเกิดแบบรูป (Pattern) โดยพื้นฐานทางเคมี

ที่มา: https://th.wikipedia.org/wiki/แฟร็กทัล

นอกจากนี้แฟร็กทัลยังพบในศาสตร์อื่นๆ เช่น การป้อนไฟฟ้าแรงสูงให้กับก้อนอคริลิกจนแตกให้เห็นรูปแฟร็กทัลที่เรียกว่า Lichtenberg Figure, แฟร็กทัลที่เกิดขึ้นจากรอยแตกบนผิวของแผ่นดีวีดีเมื่อโดนรังสีจากไมโครเวฟ และพบได้ในงานศิลปะ ตัวอย่างเช่นภาพเขียนของจิตรกรชาวอเมริกัน แจ็คสัน พอลล็อก

(Jackson Pollock) ซึ่งดูผิวเผินจะประกอบด้วยหยดหมึกหรือแต้มหมึกที่ไม่เป็นระเบียบ แต่จากการวิเคราะห์ด้วยคอมพิวเตอร์ก็พบรูปแบบของแฟร็กทัลในงานของเขา เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

[1] อลงกต ใหม่ด้วง, "เชื่อมโยงความคิดคณิตสะเต็ม," *นิตยสารสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)*, ปีที่ 42, ฉบับที่ 186, pp. 16-20, 2557.
A. Maidoung, "Using Mathematical ideas to link STWM Education," *Magazine by the Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology*, vol. 42, no. 186, pp. 16-20, 2014 (in Thai).

[2] นิวตรอนดอทอาร์เอ็มยูทีฟิสิกส์ดอทคอม. 2017. *ศิลปะทางคณิตศาสตร์*. สืบค้นวันที่ 19 มีนาคม 2560 จาก https://goo.gl/P7Ps60
Neutron.rmutphysics.com. 2017. *Math Art*. Retrieved 19 March 2017 from https://goo.gl/P7Ps60

[3] สไลด์แชร์ดอทเน็ท. 2017. *การจัดการเรียนรู้ตามแนวทางสะเต็มศึกษา*. สืบค้นวันที่ 19 มีนาคม 2560 จาก https://www.slideshare.net/wawachira/stem-education-62525207
Slideshare.net. 2017. *STEM Education: The Innovative Way of Learning*. Retrieved 19 March 2017 from https://www.slideshare.net/wawachira/stem-education-62525207