



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 62(691) Jan-Apr, 2017

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org>MathThaiOrg@gmail.com

ลำดับฟีโบนัชชีในรายวิชาคณิตศาสตร์

The Fibonacci Sequence in Mathematics Courses

แก่ง วิบูลย์รัญญ์

Keng Wiboon-ton

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok, 10330, ThailandEmail: keng.w@chula.ac.th, kwiboon-ton@gmail.com

บทคัดย่อ

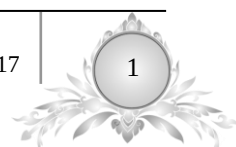
บทความนี้แสดงการหาและพิสูจน์สูตรของลำดับฟีโบนัชชีด้วยวิธีต่างๆ โดยใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในระดับมัธยมและระดับปริญญาตรี ซึ่งวิธีต่างๆ เหล่านี้ประกอบไปด้วยเนื้อหาในเรื่องลำดับเรขาคณิต ฟังก์ชันก่อกำเนิดและเนื้อหาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

คำสำคัญ: ลำดับฟีโบนัชชี ลำดับเรขาคณิต ฟังก์ชันก่อกำเนิด พีชคณิตเชิงเส้น

ABSTRACT

This article gives several methods for finding and proving the well-known formula of the Fibonacci sequence. In these methods, we employ many topics ranging from high-school mathematics to university mathematics. The topics we use include geometric sequences, generating functions and some topics in linear algebra.

Keywords: Fibonacci sequence, Geometric sequences, Generating functions, Linear Algebra





1. บทนำ

บ่อยครั้งการแก้โจทย์ในวิชาคณิตศาสตร์ สามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งแต่ละวิธีอาจใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาที่แตกต่างกัน ดังนั้น การแก้โจทย์ที่ผู้ทำสามารถทำได้หลายวิธี จะทำให้ได้เห็นมุมมองในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์หลายๆ สาขา ซึ่งบางครั้งทำให้ได้เห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์สาขาต่างๆ ได้

บทความนี้ นำเสนอวิธีต่างๆ ในการหาสูตรของลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci Sequence) ซึ่งเป็นลำดับเวียนเกิดที่นิยามโดยกำหนดให้

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \quad (\text{เงื่อนไขเริ่มต้น})$$

$$\text{และ} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots \quad (*)$$

จะเห็นว่าการนิยามข้างต้นเป็นการนิยามลำดับเวียนเกิด (Recursive Sequence) กล่าวคือ ในเบื้องต้นเราทราบว่า $F_1 = F_2 = 1$ จากนั้น การหา F_3 ต้องใช้ค่าของ F_1 และ F_2 ซึ่งโดย (*) จะได้ว่า $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$ จากนั้น หา F_4 โดยใช้ค่าของ F_3 และ F_2 ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ โดยจะเห็นว่า การนิยามลำดับ $(F_n)_{n=1}^\infty$ ข้างต้นนั้น นิยามโดยแจ่มชัด (Well-defined) กล่าวคือ เงื่อนไขเริ่มต้น และสมการเวียนเกิด (*) สอดคล้องกันเป็นอย่างดีทำให้สามารถระบุเทอมที่ n ใดๆ ของลำดับได้ นอกจากนี้จะเห็นว่ามีลำดับ $(F_n)_{n=1}^\infty$ ลำดับเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องทั้ง เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขเวียนเกิด (*) ข้างต้น

สูตรของบีเนต์ (Binet's Formula) สำหรับการหาพจน์ที่ n ของลำดับฟีโบนัชชี คือ $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{โดยที่ } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ และ } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$(\text{สังเกตว่า } \alpha + \beta = 1, \alpha - \beta = \sqrt{5} \text{ และ } \alpha\beta = -1)$$

บทความนี้นำเสนอวิธีการต่างๆ ในการหาสูตรของบีเนต์

หมายเหตุ: จากนี้เป็นต้นไป จะแทนค่าของ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ด้วย α และ β ตามลำดับ





2. นานาวิธีในการหาสูตรของบีเนต

วิธีที่ 1 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับเรขาคณิตซึ่งเป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

ในระดับมัธยมศึกษา ทราบว่าพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence) อยู่ในรูป $a_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ โดยที่ $a, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ซึ่งลำดับเรขาคณิตนี้ สามารถเขียนได้ในรูปของลำดับเวียนเกิดได้โดยให้

$$a_1 = a \quad (\text{เงื่อนไขเริ่มต้น})$$

$$\text{และ} \quad a_{n+1} = ra_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

ซึ่งจะเห็นว่าสมการเวียนเกิด (1) มีรูปของสมการที่คล้ายกับสมการเวียนเกิดฟีโบนัชชี (*) ดังนั้น จึงคาดว่าจะมีลำดับเรขาคณิตที่สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด (*)

ให้ลำดับเรขาคณิต $(ar^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด (*)

$$\text{จะได้ว่า} \quad ar^{n+1} = ar^n + ar^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ดังนั้น} \quad r^2 = r + 1 \quad \text{นั่นคือ} \quad r^2 - r - 1 = 0$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{หรือ} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{นั่นคือ} \quad r = \alpha \quad \text{หรือ} \quad \beta$$

ทำให้ได้ว่า ลำดับเรขาคณิตทั้งหมดที่สอดคล้องสมการเวียนเกิด (*) คือ ลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป $(a\alpha^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ และ $(b\beta^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ นอกจากนี้ สังเกตว่าผลบวกของลำดับเรขาคณิต $(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ ก็สอดคล้องกับสมการเวียนเกิดฟีโบนัชชีด้วย

ดังนั้น เงื่อนไขเริ่มต้นที่ว่า $F_1 = F_2 = 1$ เป็นเงื่อนไขที่ทำให้สามารถหาค่าเฉพาะของ a และ b ได้

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $F_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ แล้วจะได้ว่าเงื่อนไข $F_1 = F_2 = 1$ ทำให้ได้ระบบสมการ

$$a + b = 1$$

$$\text{และ} \quad a\alpha + b\beta = 1$$

$$\text{ซึ่งมีคำตอบเป็น} \quad a = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \quad \text{และ} \quad b = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{-\beta}{\sqrt{5}}$$





จึงได้ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

ทำให้ได้ว่าลำดับ $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ สอดคล้องนิยามของลำดับฟีโบนัชชี

เนื่องจากลำดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับนิยามของลำดับฟีโบนัชชีมีเพียงลำดับเดียวเท่านั้น ดังนั้น สรุปได้ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

วิธีที่ 2 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริภูมิย่อย (Subspaces) ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra)

แนวคิดของวิธีนี้จะเหมือนกับแนวคิดของวิธีที่ 1 เพียงแต่วิธีการให้เหตุผลของวิธีที่ 2 นั้นจะใช้ภาษาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นที่อยู่ในรูปของปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์นั่นเอง

ให้ $\mathbb{R}^\infty$ แทนปริภูมิของลำดับของจำนวนจริงทั้งหมด จะได้ว่า $\mathbb{R}^\infty$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space) เหนือสนาม $\mathbb{R}$

พิจารณาปริภูมิ

$$F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \mid x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

จะได้ว่า F เป็นปริภูมิย่อย (Subspace) ของ $\mathbb{R}^\infty$

ให้ $\vec{a} = (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ และ $\vec{b} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$

สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ เป็นฐานของ F (ละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน)

ดังนั้น F มีมิติเท่ากับ 2

ทำนองเดียวกันกับวิธีที่ 1 สามารถแสดงได้ว่า F มีสมาชิกที่เป็นลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป $(1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}, \dots)$ อยู่เพียงแค่สองลำดับเท่านั้นคือ $\vec{u} = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}, \dots)$ และ $\vec{v} = (1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots, \beta^{n-1}, \dots)$

ในขณะเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (ละไว้เป็นแบบฝึกหัด) ยิ่งไปกว่านั้น จากที่ทราบว่ามิติของ F เท่ากับ 2 ทำให้ได้ด้วย $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นฐานของ F

ให้ $\vec{f} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \in F$ นั่นคือ $\vec{f}$ เป็นลำดับฟีโบนัชชี

เนื่องจาก $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นฐานของ F ดังนั้น มีจำนวนจริง a, b ที่ทำให้ $\vec{f} = a\vec{u} + b\vec{v}$





โดยการเทียบสองพจน์แรกของสมการนี้ จะได้ระบบสมการ $a + b = 1$ และ $\alpha a + \beta b = 1$ ซึ่งเป็นระบบสมการเดียวกันกับระบบสมการที่ปรากฏในวิธีที่ 1

$$\text{ดังนั้น จะได้ว่า } a = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \text{ และ } b = \frac{-\beta}{\sqrt{5}}$$

$$\text{นั่นคือ } \vec{f} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha \alpha^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta \beta^{n-1} \right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) \right)_{n=1}^{\infty} \text{ นั่นเอง}$$

#

วิธีที่ 3 : ใช้ความรู้เรื่องตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear Operators)

ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

$$\text{ให้ } D: \mathbb{R}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}^{\infty} \text{ นิยามโดย } D((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

จะได้ว่า D เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน $\mathbb{R}^{\infty}$

$$\text{ให้ } F := \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{R}^{\infty} \mid x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{ให้ } T: \mathbb{R}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}^{\infty} \text{ นิยามโดย } T := D^2 - D - 1$$

$$\text{นั่นคือ } T(\vec{x}) = (D^2 - D - 1)(\vec{x}) = D(D(\vec{x})) - D(\vec{x}) - \vec{x} \text{ สำหรับ } \vec{x} \in \mathbb{R}^{\infty}$$

จะได้ว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน $\mathbb{R}^{\infty}$

$$\text{นอกจากนี้ จะได้ด้วยว่า } T = (D - \alpha)(D - \beta) = (D - \beta)(D - \alpha)$$

$$\text{สามารถแสดงได้ว่า } \ker T = F, \ker(D - \alpha) \subseteq \ker T \text{ และ } \ker(D - \beta) \subseteq \ker T \text{ (ละไว้เป็นแบบฝึกหัด)}$$

$$\text{สำหรับ } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\infty} \text{ ซึ่ง } (D - \alpha)\vec{x} = \vec{0} \text{ จะได้ว่า } D\vec{x} = \alpha\vec{x}$$

$$\text{นั่นคือ } (x_2, x_3, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) \text{ ดังนั้น เมื่อ } x_1 \neq 0 \text{ จะได้ว่า}$$

$$\alpha = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \dots$$

นั่นคือ $\vec{x}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป

$$(x_1, x_1\alpha, x_1\alpha^2, x_1\alpha^3, \dots) = x_1(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$$

$$\text{ดังนั้น } \ker(D - \alpha) \subseteq \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)\}$$

$$\text{เห็นได้ชัดว่า } \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)\} \subseteq \ker(D - \alpha)$$





ดังนั้น $\ker(D - \alpha) = \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)\}$

ทำนองเดียวกัน $\ker(D - \beta) = \text{span}\{(1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots)\}$

ให้ $\vec{y} \in F = \ker T$ จะได้ว่า $(D - \beta)((D - \alpha)\vec{y}) = T(\vec{y}) = \vec{0}$

ดังนั้น $(D - \alpha)\vec{y} \in \ker(D - \beta) = \text{span}\{(1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots)\}$

ทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $(D - \alpha)(D - \beta) = (D - \beta)(D - \alpha)$

จะได้ด้วยว่า $(D - \beta)\vec{y} \in \ker(D - \alpha) = \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)\}$

ดังนั้น มีจำนวนจริง $a, b \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $D\vec{y} - \alpha\vec{y} = b(1, \beta, \beta^2, \dots)$

และ $D\vec{y} - \beta\vec{y} = a(1, \alpha, \alpha^2, \dots)$

นำสมการแรกลบด้วยสมการที่สองข้างต้น จะได้

$$-\sqrt{5}\vec{y} = (\beta - \alpha)\vec{y} = b(1, \beta, \beta^2, \dots) - a(1, \alpha, \alpha^2, \dots)$$

$$\in \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \dots), (1, \beta, \beta^2, \dots)\}$$

นั่นคือ $\vec{y} \in \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \dots), (1, \beta, \beta^2, \dots)\}$

ดังนั้น $\ker T \subseteq \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \dots), (1, \beta, \beta^2, \dots)\}$

เนื่องจาก $\text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \dots), (1, \beta, \beta^2, \dots)\} \subseteq \ker(D - \alpha) + \ker(D - \beta)$
 $\subseteq \ker T + \ker T = \ker T$

ทำให้ได้ว่า $F = \ker T = \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \dots), (1, \beta, \beta^2, \dots)\}$

ให้ $\vec{f} = (1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ นั่นคือ $\vec{f}$ แทนลำดับฟีโบนัชชี

ดังนั้น $\vec{f} \in F = \text{span}\{(1, \alpha, \alpha^2, \dots), (1, \beta, \beta^2, \dots)\}$

จะได้ว่า มีจำนวนจริง c และ d ที่ทำให้

$$(1, 1, 2, 3, 5, \dots) = \vec{f} = c(1, \alpha, \alpha^2, \dots) + d(1, \beta, \beta^2, \dots)$$

ดังนั้นจะได้สมการ $c + d = 1$ และ $\alpha c + \beta d = 1$

ซึ่งได้ $c = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ และ $d = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\vec{f} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ เหมือนในวิธีที่ 2 นั้นเอง

#

วิธีที่ 4 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ในระดับมัธยมศึกษา

ให้ $\vec{x}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$





จะได้ว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนัชชีสามารถเขียนได้ในรูปของสมการเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$A \vec{x}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = \vec{x}_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

จะได้ว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n , $\vec{x}_n$ สามารถเขียนย้อนกลับไปได้เรื่อยๆ จนถึงพจน์ที่มี $\vec{x}_1$ ได้ดังนี้

$$\vec{x}_n = A \vec{x}_{n-1} = A(A \vec{x}_{n-2}) = A(A(A \vec{x}_{n-3})) = \dots = A^{n-1} \vec{x}_1$$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาสูตรของ A^{n-1} ได้ ก็จะได้สูตรของลำดับฟีโบนัชชี นั่นเอง

ดังนั้น จะหาขั้นตอนวิธีที่ทำให้การคำนวณ A^{n-1} นั้นทำได้โดยง่าย

สังเกตว่า ถ้าสามารถหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ที่ทำให้ $P^{-1}AP = D$ โดยที่ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม แล้ว จะได้ว่า

$$A^{n-1} = (PDP^{-1})^{n-1} = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n-1}P^{-1}$$

จะเห็นว่าการหาเมทริกซ์ D^{n-1} นั้นทำได้โดยการยกกำลัง $n-1$ ไปที่สมาชิกในแนวทแยงมุมของ D นั่นเอง ซึ่งทำให้การหา A^{n-1} ก็จะทำเพียงแค่การคำนวณผลคูณ $PD^{n-1}P^{-1}$ เท่านั้น

ดังนั้นจึงต้องการหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และ เมทริกซ์ทแยงมุม D ที่สอดคล้องกับสมการ $P^{-1}AP = D$ ให้ได้นั่นเอง

$$\text{สมมติว่า } P^{-1}AP = D \text{ ดังนั้น } AP = PD$$

เขียน $P = [\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2]$ และ $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ จะได้ว่า $A\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1$ และ $A\vec{p}_2 = \lambda_2\vec{p}_2$ (สังเกตว่า $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \neq \vec{0}$ เพราะว่า P เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ($\det P \neq 0$)) ดังนั้น $(\lambda_1 I_2 - A)\vec{p}_1 = \vec{0}$ และ $(\lambda_2 I_2 - A)\vec{p}_2 = \vec{0}$

ในที่นี้ $I_2 = \text{diag}(1, 1)$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

จะได้ว่า ถ้า $(\lambda_1 I_2 - A)$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

แล้วจะได้ว่า $\vec{p}_1 = (\lambda_1 I_2 - A)^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\lambda_1 I_2 - A$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน นั่นคือ $\det(\lambda_1 I_2 - A) = 0$

ทำนองเดียวกัน $\det(\lambda_2 I_2 - A) = 0$

ดังนั้น ต้องการหา $\lambda \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\det(\lambda I_2 - A) = 0$

ซึ่งจะได้สมการพหุนาม $\lambda^2 - \lambda - 1 = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \det(\lambda I_2 - A) = 0$





ดังนั้น $\lambda = \alpha$ หรือ β สังเกตว่า $\alpha + \beta = 1$ และ $\alpha\beta = -1$

แทน $\lambda_1 = \alpha$ และ $\lambda_2 = \beta$ ในสมการ $(\lambda_1 I_2 - A)\vec{p}_1 = \vec{0}$ และ

$$(\lambda_2 I_2 - A)\vec{p}_2 = \vec{0}$$

$$\text{จะได้ } \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha - 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{p}_1 = \vec{0} \text{ และ } \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \beta - 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{p}_2 = \vec{0}$$

ซึ่งแก้ระบบสมการเชิงเส้นหา $\vec{p}_1$ และ $\vec{p}_2$ ได้ชุดหนึ่ง คือ

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ และ } \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น จะได้ว่า } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \text{ และ } D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\text{ซึ่งทำให้หาตัวผกผันของ } P \text{ ได้เป็น } P^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \beta^{n-1} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{ทำให้ได้ว่า } A^{n-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} \beta\alpha^{n-1} - \alpha\beta^{n-1} & -\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\ \beta\alpha^n - \alpha\beta^n & -\alpha^n + \beta^n \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \vec{x}_n = A^{n-1}\vec{x}_1 = A^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} (\beta - 1)\alpha^{n-1} + (1 - \alpha)\beta^{n-1} \\ (\beta - 1)\alpha^n + (1 - \alpha)\beta^n \end{bmatrix}$$

$$\text{เนื่องจาก } \alpha + \beta = 1 \text{ ดังนั้น } \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ว่า } F_n = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^n - \beta^n) \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots \text{ นั่นเอง}$$

#

วิธีที่ 5 : ใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด (Generating Functions)

พิจารณาฟังก์ชันก่อกำเนิดที่อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$

จะได้ว่า $xF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n$ และในทำนองเดียวกัน

$$x^2 F(x) = \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

พิจารณา

$$F(x) - xF(x) - x^2 F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

$$= (F_1 x + F_2 x^2) - F_1 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n$$

$$= x$$





ดังนั้น
$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

พิจารณา

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x}{x^2 - x - 1} = \frac{x}{(x - \alpha)(x - \beta)}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(x) &= F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x} - \alpha\right)\left(\frac{1}{x} - \beta\right)} = \frac{x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right) \quad \text{โดยการแยกเศษส่วนย่อย} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right) \end{aligned}$$

จากนั้นใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\beta x)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \right) x^n \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ตามต้องการ}$$

#

3. สรุป

วิธีการหาสูตรของบิเนตของลำดับฟีโบนัชชีโดยวิธีที่ 1, 2 และ 3 นั้นใช้แนวคิดเดียวกัน เพียงแต่ใช้ภาษาคนละแบบ กล่าวคือ วิธีที่ 1 นั้นเป็นภาษาที่อยู่ในระดับมัธยมศึกษา ในขณะที่วิธีที่ 2 และ 3 เป็นภาษาที่อยู่ในระดับมหาวิทยาลัยซึ่งเกี่ยวกับเนื้อหาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น นอกจากนี้แนวคิดในวิธีที่ 3 สามารถประยุกต์ใช้กับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นได้ด้วย

สำหรับวิธีที่ 4 ที่ใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ในระดับมัศึกษานั้น จริงๆ แล้วเป็นวิธีการที่เรียกว่า การทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonalization) ซึ่งเป็น





หัวข้อที่สำคัญที่สุดหัวข้อหนึ่งในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นในระดับมหาวิทยาลัย ส่วนวิธีที่ 5 นั้นใช้เนื้อหาในวิชา วิทยาการคณิต (Discrete Mathematics) ซึ่งวิธีที่ 5 นี้ นักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถทำความเข้าใจได้โดยไม่ยากนัก

จริงๆ แล้วการหาสูตรของลำดับฟีโบนัชชีนั้นเป็นการแก้สมการเวียนเกิดอันดับที่สอง ซึ่งแนวคิดในแต่ละวิธีข้างต้นในบทความนี้สามารถขยายไปสู่การแก้สมการเวียนเกิดอันดับใดๆ ได้ด้วย

4. แบบฝึกหัดท้ายบทความ

เหมือนกับที่ผ่านมา กำหนดให้ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ และ $(F_n)_{n=1}^\infty$ แทนลำดับฟีโบนัชชีในระบบจำนวนจริง (ยกเว้นข้อ 4)

1. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $x^2 = x + 1$
 - i) จงพิสูจน์ว่า $x^n = F_n x + F_{n-1}$ ทุก $x = 2, 3, \dots$
 - ii) จงแสดงว่า $\alpha^n = F_n \alpha + F_{n-1}$ และ $\beta^n = F_n \beta + F_{n-1}$
 - iii) จงใช้ ข้อ ii) พิสูจน์ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(วิธีการหาสูตรของบีเนตซ์ของแบบฝึกหัดข้อที่ 1 คิดค้นโดย Erwin Just ซึ่งถูกตีพิมพ์ใน Mathematics Magazine, vol. 44 (1971), p. 199)

2. พิจารณาวิธีการหาสูตรของบีเนตซ์วิธีที่ 4 ข้างต้น
 - i) จงหาสูตรของ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ ในรูปของเมทริกซ์ที่สมาชิกอยู่ในรูปของลำดับฟีโบนัชชี
 - ii) โดยการใส่ดีเทอร์มิแนนต์ในสูตรที่ได้จากข้อ i ทั้งสองข้าง จงแสดงว่า $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

3. บทประยุกต์ของลำดับฟีโบนัชชีในวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง

กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

- i) จงแสดงว่า $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ ทุก $n \geq 1$
- ii) จงพิสูจน์ว่า $(a_n)_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$





(หมายเหตุ: ในวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง การที่จะแสดงว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้านั้น จะทำโดยการพิสูจน์ว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซีโดยใช้อสมการ $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$ สำหรับ $n \geq 2$)

4. (ระดับมหาวิทยาลัย) กำหนดให้ K เป็นสนาม (Field) ใดๆ ซึ่งบรรจุรากทั้งหมดของพหุนาม $x^2 - x - 1$

นิยามลำดับฟีโบนัชชี $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ใน K โดยให้ $F_1 = F_2 = 1 \in K$ และ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

จงหาสูตรบีเนต์ของลำดับ F_n

(ข้อเสนอแนะ: ในกรณีที่ค่าลักษณะเฉพาะ (Characteristic) ของ K เป็น 5 สูตรของบีเนต์จะแตกต่างจากกรณีอื่นๆ)

5. (โจทย์ท้าทาย) นิยามลำดับของจำนวนจริง $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ แบบเวียนเกิดดังนี้ $a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = 2$ และ $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ จงแสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $n|a_n$

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความที่ตรวจทานความถูกต้องและให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ทำให้บทความนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] E. Barbeau, "Fallacies, Flaws, and Flimflam," *The College Mathematics Journal*, vol. 24, no. 1, January, pp. 63-66, 1993.
- [2] E. Just, "A Note on the Nth Term of the Fibonacci Sequence," *Mathematics Magazine*, vol. 44, pp. 199, 1971.
- [3] S. R. Ghorpade and B. V., Limaye, "A Course in Calculus and Real Analysis," Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.
- [4] W. Watkins, "Generating Functions," *The College Mathematics Journal*, vol. 18, no. 3, January, pp. 195-211, 1993.

