



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 64(698) พฤษภาคม – สิงหาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

เซตย่อยวิกษณัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

On Interval Valued Bipolar-Valued Fuzzy Subsets of Left Almost Semigroups

สลธิทิพย์ แดงกองโค และ ไพโรจน์ เยียระยง

Salinthip Daengkongkho¹ and Pairote Yiarayong²

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000

Email: ¹dsalinthip@psru.ac.th ²pairote0027@hotmail.com

วันที่รับบทความ : 30 เมษายน 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 5 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 15 กรกฎาคม 2562

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดของกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิกษณัยค่าสองขั้วค่าช่วงและไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิกษณัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายและมีการตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของสิ่งที่กล่าวมาข้างต้น นอกจากนี้ยังได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิกษณัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

คำสำคัญ: กึ่งกรุปเกือบทางซ้าย กึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิกษณัยค่าสองขั้วค่าช่วง
ไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิกษณัยค่าสองขั้วค่าช่วง กึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้าย

ABSTRACT

In this paper, the notions of interval valued bipolar-valued fuzzy left almost subsemigroups and interval valued bipolar-valued fuzzy left (right) ideals of left almost semigroups are investigated. Moreover, we give some characterization theorems of interval valued bipolar-valued fuzzy left (right) ideals of left almost semigroups.

Keywords: Left almost semigroups, Interval valued bipolar-valued fuzzy left almost subsemigroups, Interval valued bipolar-valued fuzzy left (right) ideal, Left almost subsemigroups

1. บทนำ

ในปี ค.ศ. 1965 Zadeh [13] ได้แนะนำแนวคิดของเซตย่อยวิภันซ์ μ ของเซตไม่ว่า S กล่าวคือฟังก์ชัน $\mu: S \rightarrow [0,1]$ เมื่อ $[0,1]$ เป็นช่วงปิดใน $\mathbb{R}$ ในทศวรรษที่ผ่านมาได้มีการศึกษาค้นคว้าและพัฒนาเซตย่อยวิภันซ์กันอย่างแพร่หลาย โดยโครงสร้างเซตย่อยวิภันซ์ได้เริ่มต้นในการพัฒนาอย่างเป็นระบบในงานวิจัยของ Rosenfeld [9] ในปี ค.ศ. 1971 ต่อมาในปี ค.ศ. 1994 Zhang [15] ได้เสนอแนวคิดของเซตย่อยวิภันซ์สองขั้ว ในปี ค.ศ. 2019 Arulmozhi และคณะ [2] ได้แนะนำแนวความคิดของไอดีลวิภันซ์สองขั้ว $(\tilde{\eta}, \tilde{\delta})$ ค่าช่วง (interval valued $(\tilde{\eta}, \tilde{\delta})$ bipolar fuzzy ideal), ไบ-ไอดีล (bi-ideal), ไอดีลภายใน (interior ideal) และไอดีลวิภันซ์สองขั้ว $((\epsilon, \epsilon \vee q)$ -bipolar fuzzy ideal) ใน Γ -กึ่งกรุปอันดับ

ในปี ค.ศ. 2012 Yaqoob [10] ได้แนะนำแนวคิดของกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภันซ์ค่าสองขั้วในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย นอกจากนี้ได้ศึกษาสมบัติบางประการของไอดีล (ทางขวา, ไบ-, ภายใน) ทางซ้ายวิภันซ์ค่าสองขั้ว (bipolar-valued fuzzy left (right, bi-, interior) ideal) ของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย นอกจากนี้ Faisal และคณะ [5] ได้แนะนำแนวคิดของฟัซซีฟิเคชันค่าสองขั้วใน AG-กรุปพอยต์อันดับ ในปี ค.ศ. 2012 Aslam และคณะ [4] ได้นำเสนอแนวความคิดของเซตย่อยวิภันซ์สองขั้วในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย นอกจากนี้ได้อธิบายลักษณะเฉพาะบางประการของไอดีล (ทางขวา) ทางซ้ายวิภันซ์สองขั้วของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย ในปี ค.ศ. 2013 Khan และคณะ [7] ได้ให้แนวคิดของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายอันดับวิภันซ์ค่าช่วงและได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายอันดับปกติภายใน (intra-regular ordered LA-semigroup) ในพจน์ของไอดีล

(ทางขวา) ทางซ้ายวิภันย์ค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายอันดับ นอกจากนี้ Yaqoob และคณะ [10 - 12] ได้แนะนำแนวคิดของกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภันย์ค่าช่วง ไอเดียลทางซ้าย ไอเดียลทางขวา และไบ-ไอเดียลในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย แนวคิดของเซตวิภันย์สัจพจน์นิยมนัยค่าช่วง (interval valued intuitionistic fuzzy set) ในกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายถูกนำเสนอโดย Yaqoob ในปี ค.ศ. 2013 นอกจากนี้ได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายปรกติในพจน์ของไอเดียลทางซ้ายวิภันย์สัจพจน์นิยมนัยค่าช่วง ในปี ค.ศ. 2014 Abdullah และคณะ [1] ได้นำเสนอแนวความคิดของ ไอเดียลวิภันย์ (α, β) ค่าช่วงในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

ในบทความนี้ได้ศึกษาพัฒนาขยายแนวความคิดของเซตย่อยวิภันย์ค่าสองช่วงและเซตย่อยวิภันย์ค่าช่วงในกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายตามแนวทางของ Yaqoob [10 - 11] และตามแนวทางของ Yaqoob และคณะ [12] นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายวิภันย์ค่าสองช่วงและไอเดียลทางซ้าย (ขวา) วิภันย์ค่าสองช่วงค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย ยิ่งไปกว่านั้นยังได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของไอเดียลทางซ้าย (ขวา) วิภันย์ค่าสองช่วงค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

2. ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้เราได้ศึกษาบทนิยามและผลลัพธ์บางอย่างที่จำเป็นสำหรับวัตถุประสงค์และการศึกษาในหัวข้อต่อไปของเรา

บทนิยาม 2.1 [6] กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก S ว่า **กึ่งกรุปเกือบทางซ้าย (left almost semigroup)** ถ้ามีฟังก์ชัน $\cdot : S \times S \rightarrow S$ โดยที่ $(a, b) \mapsto ab$ สำหรับทุก $a, b \in S$ และมีสมบัติ $(ab)c = (cb)a$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$ เรียกสมบัตินี้ว่า **อินเวอร์ทีปทางซ้าย (left invertive)**

บทตั้ง 2.2 [6] กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย แล้ว $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ สำหรับทุก $a, b, c, d \in S$

กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย จะเรียก S ว่ามี**สมบัติเอกลักษณ์ทางซ้าย (left identity)** ถ้ามี $e \in S$ ซึ่งทำให้ $ea = a$ สำหรับทุก a ใน S และจะเรียก “ e ” ว่า **เอกลักษณ์ทางซ้าย (left identity)**

บทตั้ง 2.3 [8] กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายที่มีเอกลักษณ์ทางซ้าย แล้ว $a(bc) = b(ac)$ $a(bc) = b(ac)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$

บทตั้ง 2.4 [8] กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายที่มีเอกลักษณ์ทางซ้าย แล้ว $(ab)(cd) = (dc)(ba)$ สำหรับทุก $a, b, c, d \in S$

กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายและ $\emptyset \neq A \subseteq S$ จะเรียก A ว่า **กึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้าย (left almost subsemigroup)** ถ้า $ab \in A$ สำหรับทุก $a, b \in A$ และให้ $\emptyset \neq I \subseteq S$ จะเรียก I ว่า **ไอดีลทางซ้าย (left ideal)** ของ S ถ้า $SI \subseteq I$ จะเรียก I ว่า **ไอดีลทางขวา (right ideal)** ของ S ถ้า $IS \subseteq I$ และจะเรียก I ว่า **ไอดีล (ideal)** ของ S ถ้า I เป็นทั้งไอดีลทางซ้ายและทางขวา

ต่อไปเรากำหนดให้ $a \in [0, 1]$ และ $-a \in [-1, 0]$ เรานิยาม $\tilde{a} \in [a^-, a^+]$ และ $\sim a \in [-a^-, -a^+]$ เมื่อ $0 \leq a^- \leq a^+ \leq 1$ และ $-1 \leq -a^- \leq -a^+ \leq 0$ ตามลำดับ

นอกจากนี้เรายังกำหนดให้ $D[0, 1]$ และ $D[-1, 0]$ แทนเซตของช่วงย่อยปิด (closed subintervals) ทั้งหมดของ $[0, 1]$ และ $[-1, 0]$ ตามลำดับ นั่นคือ $D[0, 1] = \{\tilde{a} : a \in [0, 1]\}$ และ $D[-1, 0] = \{\sim a : -a \in [-1, 0]\}$ ต่อไปเราจะนิยามการดำเนินการ “ $\subseteq$ ”, “ $=$ ”, “ $\subset$ ”, “ $\cap$ ” และ “ $\cup$ ” บน $D[0, 1] (D[-1, 0])$ ดังนี้

1. $\tilde{a} \subseteq \tilde{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a^- \leq b^-$ และ $a^+ \leq b^+$ ($\sim a \subseteq \sim b$ ก็ต่อเมื่อ $-a^- \leq -b^-$ และ $-a^+ \leq -b^+$)
2. $\tilde{a} = \tilde{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a^- = b^-$ และ $a^+ = b^+$ ($\sim a = \sim b$ ก็ต่อเมื่อ $-a^- = -b^-$ และ $-a^+ = -b^+$)
3. $\tilde{a} \subset \tilde{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a^- < b^-$ และ $a^+ < b^+$ ($\sim a \subset \sim b$ ก็ต่อเมื่อ $-a^- < -b^-$ และ $-a^+ < -b^+$)
4. $\tilde{a} \cap \tilde{b} = [a^- \wedge b^-, a^+ \wedge b^+]$ ($\sim a \cap \sim b = [-a^- \wedge -b^-, -a^+ \wedge -b^+]$)
5. $\tilde{a} \cup \tilde{b} = [a^- \vee b^-, a^+ \vee b^+]$ ($\sim a \cup \sim b = [-a^- \vee -b^-, -a^+ \vee -b^+]$)
6. $-\tilde{a} = [-a^+, -a^-]$

สำหรับทุก $\tilde{a}, \tilde{b} \in D[0, 1] (\sim a, \sim b \in D[-1, 0])$ นอกจากนี้ความรู้พื้นฐานอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกัเซตย่อยวิภันซ์ค่าช่วงผู้ที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ [1, 3, 12]

ข้อสังเกต จากบทนิยามข้างต้นเห็นได้ชัดเจนว่าสำหรับทุก $\tilde{a}, \tilde{b} \in D[0, 1]$ จะได้ว่า $\tilde{a} \subseteq \tilde{b}$ ก็ต่อเมื่อ $-\tilde{b} \subseteq -\tilde{a}$

เซตย่อยวิภันัยค่าช่วง (interval valued fuzzy subset) $\tilde{\mu}$ ของเซต S เป็นฟังก์ชันจาก S ไป $D[0, 1]$ [14] และสำหรับทุกเซตย่อยวิภันัยค่าช่วง $\tilde{\mu}$ และ $\tilde{\nu}$ ของ S จะกล่าวว่า $\tilde{\mu} \subseteq \tilde{\nu}$ ถ้า $\tilde{\mu}(x) \subseteq \tilde{\nu}(x)$ สำหรับทุก $x \in S$ ต่อไปเราจะนิยามเซตย่อยวิภันัยค่าช่วง $\tilde{\mu} \cap \tilde{\nu}$ และ $\tilde{\mu} \cup \tilde{\nu}$ ของ S ดังนี้

$$(\tilde{\mu} \cap \tilde{\nu})(x) = \tilde{\mu}(x) \cap \tilde{\nu}(x) \text{ และ } (\tilde{\mu} \cup \tilde{\nu})(x) = \tilde{\mu}(x) \cup \tilde{\nu}(x)$$

สำหรับทุก $x \in S$ โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ถ้า $\tilde{\mu}_i$ เป็นเซตย่อยวิภันัยค่าช่วงของ S สำหรับทุก $i \in I$ แล้ว $\bigcap_{i \in I} \tilde{\mu}_i$ และ $\bigcup_{i \in I} \tilde{\mu}_i$ จะนิยามโดย

$$\left(\bigcap_{i \in I} \tilde{\mu}_i\right)(x) = \bigcap_{i \in I} \tilde{\mu}_i(x) \text{ และ } \left(\bigcup_{i \in I} \tilde{\mu}_i\right)(x) = \bigcup_{i \in I} \tilde{\mu}_i(x)$$

3. ผลการวิจัย

ในหัวข้อต่อไปนี้จะแนะนำแนวความคิดของเซตย่อยวิภันัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายวิภันัยค่าสองขั้วค่าช่วงและไอดิลทางซ้าย (ขวา) วิภันัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย โดยเริ่มต้นจากการกำหนดบทนิยามของเซตย่อยวิภันัยค่าสองขั้วค่าช่วง ดังนี้

บทนิยาม 3.1 เซตย่อยวิภันัยค่าสองขั้วค่าช่วง (interval valued bipolar-valued fuzzy subset) $\tilde{\mu}$ ของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S นิยามโดย

$$\tilde{\mu} = \{(x, \tilde{\mu}^+(x), \tilde{\mu}^-(x)) : x \in S\}$$

โดยที่ $\tilde{\mu}^+ : S \rightarrow D[0, 1]$ และ $\tilde{\mu}^- : S \rightarrow D[-1, 0]$

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.1 เห็นได้ชัดเจนว่า ถ้า $\tilde{f}^-(x) = [0, 0]$ สำหรับทุก $x \in S$ แล้ว

$$\tilde{f} = \{(x, \tilde{f}^+(x), \tilde{f}^-(x)) : x \in S\}$$

จะเป็นเซตย่อยวิภันัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S

ข้อตกลง

1. เพื่อความสะดวกในบทความนี้จะเขียนแทน $\tilde{\mu} = \{(x, \tilde{\mu}^+(x), \tilde{\mu}^-(x)) : x \in S\}$ ด้วย $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ ยิ่งไปกว่านั้น $\tilde{\mu} : S \rightarrow D[-1, 1]$ เมื่อ $D[-1, 1]$ แทนเซตของช่วงย่อยปิดทั้งหมดของ $[-1, 1]$

2. จะนิยามเซตย่อยวิภันัยค่าสองข้าง $\Theta = (\Theta^+, \Theta^-)$ ในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S คือ $\Theta^+(x)=[1, 1]$ และ $\Theta^-(x)=[-1, -1]$ สำหรับทุก $x \in S$

บทนิยาม 3.2 กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ และ $\tilde{\nu}=(\tilde{\nu}^+, \tilde{\nu}^-)$ เป็นเซตย่อยวิภันัยค่าสองข้างของ S ผลคูณ (product) ของ $\tilde{\mu}$ กับ $\tilde{\nu}$ เขียนแทนด้วย $\tilde{\mu} \odot \tilde{\nu}$ นิยามโดย

$$(\tilde{\mu}^+ \odot \tilde{\nu}^+)(x) = \begin{cases} \bigcup_{x=yz} (\tilde{\mu}^+(y) \cap \tilde{\nu}^+(z)) & ; \text{ เมื่อ } y, z \in S \text{ โดยที่ } x = yz \\ [0, 0] & ; \text{ กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

และ

$$(\tilde{\mu}^- \odot \tilde{\nu}^-)(x) = \begin{cases} \bigcap_{x=yz} (\tilde{\mu}^-(y) \cup \tilde{\nu}^-(z)) & ; \text{ เมื่อ } y, z \in S \text{ โดยที่ } x = yz \\ [0, 0] & ; \text{ กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$, $\tilde{\nu}=(\tilde{\nu}^+, \tilde{\nu}^-)$ และ $\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)$ เป็นเซตย่อยวิภันัยค่าสองข้างค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S แล้ว $(\tilde{\mu} \odot \tilde{\nu}) \odot \tilde{\omega} = (\tilde{\omega} \odot \tilde{\nu}) \odot \tilde{\mu}$

บทพิสูจน์ เริ่มต้นจะแสดงว่า $(\tilde{\mu}^+ \odot \tilde{\nu}^+) \odot \tilde{\omega}^+ \subseteq (\tilde{\omega}^+ \odot \tilde{\nu}^+) \odot \tilde{\mu}^+$

ให้ $x \in S$ โดยบทนิยามผลคูณจะได้ว่า

$$\begin{aligned} ((\tilde{\mu}^+ \odot \tilde{\nu}^+) \odot \tilde{\omega}^+)(x) &\subseteq \bigcup_{x=yz} \left(\left(\bigcup_{y=ab} (\tilde{\mu}^+(a) \cap \tilde{\nu}^+(b)) \right) \cap \tilde{\omega}^+(z) \right) \\ &= \bigcup_{x=(ab)z} \left((\tilde{\mu}^+(a) \cap \tilde{\nu}^+(b)) \cap \tilde{\omega}^+(z) \right) \\ &= \bigcup_{x=(zb)a} \left((\tilde{\omega}^+(z) \cap \tilde{\nu}^+(b)) \cap \tilde{\mu}^+(a) \right) \\ &\subseteq \bigcup_{x=(zb)a} \left(\left(\bigcup_{zb=cd} (\tilde{\omega}^+(c) \cap \tilde{\nu}^+(d)) \right) \cap \tilde{\mu}^+(a) \right) \\ &= \bigcup_{x=wa} \left((\tilde{\omega}^+ \odot \tilde{\nu}^+)(w) \cap \tilde{\mu}^+(a) \right) \\ &= ((\tilde{\omega}^+ \odot \tilde{\nu}^+) \odot \tilde{\mu}^+)(x) \end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $(\widetilde{\mu}^+ \circ \widetilde{\nu}^+) \circ \widetilde{\omega}^+ \subseteq (\widetilde{\omega}^+ \circ \widetilde{\nu}^+) \circ \widetilde{\mu}^+$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า

$$(\widetilde{\omega}^+ \circ \widetilde{\nu}^+) \circ \widetilde{\mu}^+ \subseteq (\widetilde{\mu}^+ \circ \widetilde{\nu}^+) \circ \widetilde{\omega}^+ \text{ นั่นคือ } (\widetilde{\mu}^+ \circ \widetilde{\nu}^+) \circ \widetilde{\omega}^+ = (\widetilde{\omega}^+ \circ \widetilde{\nu}^+) \circ \widetilde{\mu}^+$$

ต่อไปจะแสดงว่า $(\widetilde{\mu}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\omega}^- \supseteq (\widetilde{\omega}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\mu}^-$

กำหนดให้ $x \in S$ พิจารณา

$$\begin{aligned} ((\widetilde{\mu}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\omega}^-)(x) &\supseteq \bigcap_{x=yz} \left(\left(\bigcap_{y=ab} (\widetilde{\mu}^-(a) \cup \widetilde{\nu}^-(b)) \right) \cup \widetilde{\omega}^-(z) \right) \\ &= \bigcap_{x=(ab)z} \left((\widetilde{\mu}^-(a) \cup \widetilde{\nu}^-(b)) \cup \widetilde{\omega}^-(z) \right) \\ &= \bigcap_{x=(zb)a} \left((\widetilde{\omega}^-(z) \cup \widetilde{\nu}^-(b)) \cup \widetilde{\mu}^-(a) \right) \\ &\supseteq \bigcap_{x=(zb)a} \left(\left(\bigcap_{zb=cd} (\widetilde{\omega}^-(c) \cup \widetilde{\nu}^-(d)) \right) \cup \widetilde{\mu}^-(a) \right) \\ &= \bigcap_{x=wa} \left((\widetilde{\omega}^- \circ \widetilde{\nu}^-)(w) \cup \widetilde{\mu}^-(a) \right) \\ &= ((\widetilde{\omega}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\mu}^-)(x) \end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $(\widetilde{\mu}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\omega}^- \supseteq (\widetilde{\omega}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\mu}^-$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า

$$(\widetilde{\mu}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\omega}^- \subseteq (\widetilde{\omega}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\mu}^- \text{ จึงได้ว่า } (\widetilde{\mu}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\omega}^- = (\widetilde{\omega}^- \circ \widetilde{\nu}^-) \circ \widetilde{\mu}^-$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(\widetilde{\mu} \circ \widetilde{\nu}) \circ \widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega} \circ \widetilde{\nu}) \circ \widetilde{\mu}$ □

ข้อสังเกต กำหนดให้ $\widetilde{F}(S)$ คือ เซตของทุกเซตย่อยวิกษณัยค่าสองชั่วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า $(\widetilde{F}(S), \odot)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า $\widetilde{\mu} = (\widetilde{\mu}^+, \widetilde{\mu}^-)$, $\widetilde{\nu} = (\widetilde{\nu}^+, \widetilde{\nu}^-)$, $\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}^+, \widetilde{\omega}^-)$ และ $\widetilde{\xi} = (\widetilde{\xi}^+, \widetilde{\xi}^-)$ เป็นเซตย่อยวิกษณัยค่าสองชั่วค่าช่วงในกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายที่มีเอกลักษณ์ทางซ้าย S แล้ว

1. $\widetilde{\mu} \odot (\widetilde{\nu} \odot \widetilde{\omega}) = \widetilde{\nu} \odot (\widetilde{\mu} \odot \widetilde{\omega})$
2. $(\widetilde{\mu} \odot \widetilde{\nu}) \odot (\widetilde{\omega} \odot \widetilde{\xi}) = (\widetilde{\xi} \odot \widetilde{\omega}) \odot (\widetilde{\nu} \odot \widetilde{\mu})$

บทพิสูจน์ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.3 □

บทนิยาม 3.5 กำหนดให้ $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นเซตย่อยวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S จะเรียก $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ ว่า กึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วง (interval valued bipolar-valued fuzzy left almost subsemigroup) ของ S ถ้า

$$\tilde{\mu}^+(xy) \supseteq \tilde{\mu}^+(x) \cap \tilde{\mu}^+(y) \text{ และ } \tilde{\mu}^-(xy) \subseteq \tilde{\mu}^-(x) \cup \tilde{\mu}^-(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in S$

บทนิยาม 3.6 กำหนดให้ $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นเซตย่อยวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S จะเรียก $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ ว่า ไอเดียลทางซ้าย [ขวา] วิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วง (interval valued bipolar-valued fuzzy left [right] ideal) ของ S ถ้า

$$\tilde{\mu}^+(xy) \supseteq \tilde{\mu}^+(y) \left[\tilde{\mu}^+(xy) \supseteq \tilde{\mu}^+(x) \right] \text{ และ } \tilde{\mu}^-(xy) \subseteq \tilde{\mu}^-(y) \left[\tilde{\mu}^-(xy) \subseteq \tilde{\mu}^-(x) \right]$$

สำหรับทุก $x, y \in S$ และถ้า $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นทั้งไอเดียลทางซ้ายวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงและไอเดียลทางขวาวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S แล้วจะเรียก $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ ว่า ไอเดียลวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วง (interval valued bipolar-valued fuzzy ideal) ของ S

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.6 เห็นได้ชัดเจนว่า $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นไอเดียลวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S ถ้า $\tilde{\mu}^+(xy) \supseteq \tilde{\mu}^+(x) \cup \tilde{\mu}^+(y)$ และ $\tilde{\mu}^-(xy) \subseteq \tilde{\mu}^-(x) \cap \tilde{\mu}^-(y)$ สำหรับทุก $x, y \in S$ และทุกไอเดียลทางซ้าย (ขวา) วิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S จะเป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S เสมอ

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นเซตย่อยวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายมีเอกลักษณ์ทางซ้าย S แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

1. $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S ก็ต่อเมื่อ $\tilde{\mu}^+ \circ \tilde{\mu}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$ และ $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\mu}^- \circ \tilde{\mu}^-$
2. $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นไอเดียลทางซ้ายวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S ก็ต่อเมื่อ $\tilde{\Theta}^+ \circ \tilde{\mu}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$ และ $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\Theta}^- \circ \tilde{\mu}^-$
3. $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นไอเดียลทางขวาวิภันนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S ก็ต่อเมื่อ $\tilde{\mu}^+ \circ \tilde{\Theta}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$ และ $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\mu}^- \circ \tilde{\Theta}^-$

4. $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นไอตีลวิกษณัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S ก็ต่อเมื่อ $\tilde{\Theta}^+ \circ \tilde{\mu}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$, $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\Theta}^- \circ \tilde{\mu}^-$, $\tilde{\mu}^+ \circ \tilde{\Theta}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$ และ $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\mu}^- \circ \tilde{\Theta}^-$

บทพิสูจน์

1. สมมติให้ $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิกษณัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S

ให้ $x \in S$ พิจารณา

$$(\tilde{\mu}^- \circ \tilde{\mu}^-)(x) \supseteq \bigcap_{x=yz} (\tilde{\mu}^-(y) \cup \tilde{\mu}^-(z)) \supseteq \bigcap_{x=yz} \tilde{\mu}^-(yz) = \tilde{\mu}^-(x)$$

ดังนั้น $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\mu}^- \circ \tilde{\mu}^-$ ในการแสดงว่า $\tilde{\mu}^+ \circ \tilde{\mu}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน

สมมติให้ $\tilde{\mu}^+ \circ \tilde{\mu}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$ และ $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\mu}^- \circ \tilde{\mu}^-$ ให้ $x, y \in S$ พิจารณา

$$\tilde{\mu}^-(xy) \subseteq (\tilde{\mu}^- \circ \tilde{\mu}^-)(xy) = \bigcap_{xy=ab} (\tilde{\mu}^-(a) \cup \tilde{\mu}^-(b)) \subseteq \tilde{\mu}^-(x) \cup \tilde{\mu}^-(y)$$

ดังนั้น $\tilde{\mu}^-(xy) \subseteq \tilde{\mu}^-(x) \cup \tilde{\mu}^-(y)$

ในการแสดงว่า $\tilde{\mu}^+(xy) \supseteq \tilde{\mu}^+(x) \cap \tilde{\mu}^+(y)$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน โดยบทนิยาม 3.5

จะได้ว่า $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิกษณัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S

2. สมมติให้ $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}^+, \tilde{\mu}^-)$ เป็นไอตีลทางซ้ายวิกษณัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S

ให้ $x \in S$ ถ้า $\tilde{\mu}^-(x)=[0, 0]$ แล้ว $\tilde{\mu}^-(x) \supseteq (\tilde{\Theta}^- \circ \tilde{\mu}^-)(x)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} (\tilde{\Theta}^- \circ \tilde{\mu}^-)(x) &\supseteq \bigcap_{x=yz} (\tilde{\Theta}^-(y) \cup \tilde{\mu}^-(z)) = \bigcap_{x=yz} ([-1, -1] \cup \tilde{\mu}^-(z)) = \bigcap_{x=yz} \tilde{\mu}^-(z) \\ &\supseteq \bigcap_{x=yz} \tilde{\mu}^-(yz) = \tilde{\mu}^-(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\Theta}^- \circ \tilde{\mu}^-$ ในการแสดงว่า $\tilde{\Theta}^+ \circ \tilde{\mu}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน

สมมติให้ $\tilde{\Theta}^+ \circ \tilde{\mu}^+ \subseteq \tilde{\mu}^+$ และ $\tilde{\mu}^- \subseteq \tilde{\Theta}^- \circ \tilde{\mu}^-$ ให้ $x, y \in S$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^-(xy) &\subseteq (\tilde{\Theta}^- \circ \tilde{\mu}^-)(xy) = \bigcap_{xy=ab} (\tilde{\Theta}^-(a) \cup \tilde{\mu}^-(b)) \subseteq \tilde{\Theta}^-(x) \cup \tilde{\mu}^-(y) \\ &= [-1, -1] \cup \tilde{\mu}^-(y) = \tilde{\mu}^-(y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\tilde{\mu}^-(xy) \subseteq \tilde{\mu}^-(y)$

ในการแสดงว่า $\widetilde{\mu}^+(xy) \supseteq \widetilde{\mu}^+(y)$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน โดยบทนิยาม 3.6 จะได้ว่า $\widetilde{\mu} = (\widetilde{\mu}^+, \widetilde{\mu}^-)$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิชันนัยค่าสองช่วงของ S

3. สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2

4. เป็นผลมาจากข้อ 2 และข้อ 3 □

ทฤษฎีบท 3.8 ถ้า S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายที่มีเอกลักษณ์ทางซ้าย แล้ว $\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Theta} = \widetilde{\Theta}$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนว่า $x = ex$ สำหรับทุก $x \in S$ เมื่อ e เป็นเอกลักษณ์ทางซ้ายของ S ดังนั้น

$$(\widetilde{\Theta}^+ \circ \widetilde{\Theta}^+)(x) = \bigcup_{x=ex} (\widetilde{\Theta}^+(e) \cap \widetilde{\Theta}^+(x)) \supseteq \widetilde{\Theta}^+(e) \cap \widetilde{\Theta}^+(x) = [1, 1]$$

นั่นคือ $(\widetilde{\Theta}^+ \circ \widetilde{\Theta}^+)(x) = \widetilde{\Theta}^+(x)$ สำหรับทุก $x \in S$ พิจารณา

$$(\widetilde{\Theta}^- \circ \widetilde{\Theta}^-)(x) = \bigcap_{x=ex} (\widetilde{\Theta}^-(e) \cup \widetilde{\Theta}^-(x)) \subseteq \widetilde{\Theta}^-(e) \cup \widetilde{\Theta}^-(x) = [-1, -1]$$

สำหรับทุก $x \in S$

แสดงว่า $(\widetilde{\Theta}^- \circ \widetilde{\Theta}^-)(x) = \widetilde{\Theta}^-(x)$ สำหรับทุก $x \in S$ จึงสามารถสรุปได้ว่า $\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Theta} = \widetilde{\Theta}$ □

ทฤษฎีบท 3.9 กำหนดให้ $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in D[0, 1]$ ซึ่ง $\widetilde{\beta} \subseteq \widetilde{\alpha}$ และให้ $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A} = (\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A}^+, \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A}^-)$ เป็นเซตย่อยวิชันนัยค่าสองช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S นิยามโดย

$$\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A}^+(x) = \begin{cases} \widetilde{\alpha} & ; x \in A \\ \widetilde{\beta} & ; x \notin A \end{cases}$$

และ

$$\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A}^-(x) = \begin{cases} -\widetilde{\alpha} & ; x \in A \\ -\widetilde{\beta} & ; x \notin A \end{cases}$$

จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

1. A เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายของ S ก็ต่อเมื่อ $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A} = (\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A}^+, \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A}^-)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิชันนัยค่าสองช่วงของ S

2. A เป็นไอดีลทางซ้ายของ S ก็ต่อเมื่อ $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A} = (\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A}^+, \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A}^-)$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิชันนัยค่าสองช่วงของ S

3. A เป็นไอดิลทางขวาของ S ก็ต่อเมื่อ $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A} = (\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}, \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-})$ เป็นไอดิลทางขวาวิชันนัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S

4. A เป็นไอดิลของ S ก็ต่อเมื่อ $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A} = (\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}, \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-})$ เป็นไอดิลวิชันนัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S

พิสูจน์

1. สมมติให้ A เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายของ S

ให้ $x, y \in S$

ถ้า $x \notin A$ หรือ $y \notin A$ แล้ว $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(x) = -\tilde{\beta}$ หรือ $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(y) = -\tilde{\beta}$

ดังนั้น $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) \subseteq -\tilde{\beta} = \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(x) \cup \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(y)$

ถ้า $x \in A$ และ $y \in A$ แล้ว $xy \in A$ จึงทำให้ได้ว่า $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) = -\tilde{\alpha}$

ดังนั้น $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) = -\tilde{\alpha} = -\tilde{\alpha} \cup -\tilde{\alpha} = \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(x) \cup \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(y)$

จึงสรุปได้ว่า $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) \subseteq \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(x) \cup \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(y)$

ในการแสดงว่า $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}(xy) \supseteq \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}(x) \cap \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}(y)$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน จากที่กล่าวมา

สามารถสรุปได้ว่า $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A} = (\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}, \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-})$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิชันนัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S

สมมติให้ $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A} = (\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}, \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-})$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิชันนัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S

ให้ $x, y \in A$ พิจารณา $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) \subseteq \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(x) \cup \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(y) = -\tilde{\alpha} \cup -\tilde{\alpha} = -\tilde{\alpha}$

นั่นคือ $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) = -\tilde{\alpha}$ ดังนั้น $xy \in A$ จึงสรุปได้ว่า A เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายของ S

2. สมมติให้ A เป็นไอดิลทางซ้ายของ S

ให้ $x, y \in S$

ถ้า $x \notin A$ แล้ว $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(x) = -\tilde{\beta}$ ดังนั้น $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) \subseteq -\tilde{\beta} = \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(y)$

ถ้า $x \in A$ แล้ว $xy \in A$ ทำให้ได้ว่า $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) = -\tilde{\alpha}$ ดังนั้น $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) = -\tilde{\alpha} \subseteq \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(y)$

จึงทำให้สามารถสรุปได้ว่า $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(xy) \subseteq \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-}(y)$

ในการแสดงว่า $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}(xy) \supseteq \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}(y)$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน จากที่กล่าวมาสามารถสรุป

ได้ว่า $\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A} = (\widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^+}, \widetilde{\frac{\alpha}{\beta}\mu_A^-})$ เป็นไอดิลทางซ้ายวิชันนัยค่าสองชั่วค่าช่วงของ S

สมมติให้ $\widetilde{\alpha\beta\mu_A} = (\widetilde{\alpha\beta\mu_A^+}, \widetilde{\alpha\beta\mu_A^-})$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิกษณัยค่าสองช่วงของ S

ให้ $x \in A, s \in S$ เนื่องจาก $\widetilde{\alpha\beta\mu_A^-}(sx) \subseteq \widetilde{\alpha\beta\mu_A^-}(x) = -\widetilde{\alpha}$ นั่นคือ $\widetilde{\alpha\beta\mu_A^-}(sx) = -\widetilde{\alpha}$ ดังนั้น $sx \in A$

จึงสรุปได้ว่า A เป็นไอดีลทางซ้ายของ S

3. สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2

4. เป็นผลมาจากข้อ 2 และข้อ 3 □

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 3.9 เห็นได้ชัดเจนว่า $\widetilde{\frac{1}{0}\mu_S} = \widetilde{\Theta}$

เอกสารอ้างอิง

- [1] Abdullah, S., Aslam, S. and Amin, N. (2014). LA-Semigroup Characterized by The Properties of Interval Valued (α, β) -Fuzzy Ideal. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 32 (3 - 4), p. 405 - 426.
- [2] Arulmozhi, K., Chinnadurai, V. and Swaminathan, A. (2019). Interval Valued Bipolar Fuzzy Ideals in Ordered Γ -Semigroups. *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 9, p. 1 - 17.
- [3] Aslam, M., Abdullah, S. and Aslam, S. (2014). Characterization of Regular LA-Semigroups by Interval-Valued $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -Fuzzy Ideals. *Afrika. Matematika.*, 25, p. 501 - 518.
- [4] Aslam, M., Abdullah, S. and Masoo, M. (2012). Bipolar Fuzzy Ideals in LA-Semigroups. *World Applied Sciences Journal*, 17 (12), p. 1769 - 1782.
- [5] Faisal, Y., Yaqoob, N. and Saeid, A. B. (2012). Some Results in Bipolar-Valued Fuzzy Ordered AG-Groupoids. *Discussiones Mathematica General Algebra and Applications*, 32, p. 55 - 76.
- [6] Kazim, M. A. and Naseerudin, M. (1972). On Almost-Semigroup. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, 2, p. 1 - 7.
- [7] Khan, A., Faisal, Khan, W. and Yaqoob, N. (2013). Ordered LA-Semigroups in Terms of Interval Valued Fuzzy Ideals. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, 5(1), p. 100 - 117.

- [8] Mushtaq, Q. and Yusuf, S.M. (1979). On Locally Associative LA-Semigroups. *Journal of Natural Sciences and Mathematics*, 19, p. 57 - 62.
- [9] Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, p. 512 - 517.
- [10] Yaqoob, N. (2012). Bipolar-Valued Fuzzy Ideals in LA-Semigroups, *Journal of Advanced Studies in Topology*, 3(1), p. 60 - 71.
- [11] Yaqoob, N. (2013). Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Ideals of Regular LA-Semigroups. *Thai Journal of Mathematics*, 11 (3), p. 683 - 695.
- [12] Yaqoob, N., Chinram, R. and Ghareeb, A. (2013). Left Almost Semigroups Characterized by Their Interval Valued Fuzzy Ideals. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, 24, p. 231 - 245.
- [13] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, p. 338 - 353.
- [14] Zadeh, L.A. (1975). The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning. *Information Sciences*, 8, p. 199 - 249.
- [15] Zhang, W. R. (1994). Bipolar Fuzzy Sets. *Proceedings of FUZZ-IEEE*, p. 835 - 840.