



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 64(698) พฤษภาคม – สิงหาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินถึงได้แบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2, 4, 6, 8\}$

Formula for Squares Reachable by a Knight with $(2, b)$ -Knight's

Move for $b \in \{2, 4, 6, 8\}$

รตินันท์ บุญเคลือบ อิมบุญ เนียมน้อย และ ราตรี เทพรอด

Ratinan Boonklurb¹, Aimboon Niamnoy² and Ratree Theprod³

^{1,2}Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

³Romklao Kanchanaburi School (in Royal Initiative Project), Kanchanaburi 71180

Email: ¹ratinan.b@chula.ac.th ²aimboon13@gmail.com ³ratree150@gmail.com

วันที่รับบทความ : 1 พฤษภาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 25 มิถุนายน 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 24 กรกฎาคม 2562

บทคัดย่อ

กระดานหมากรุก ขนาด $m \times n$ คือ กระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วยแถวของช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจัดเรียงเป็น m แถวและแต่ละแถวมีอยู่ n หลัก ในกรณีที่ $m \rightarrow \infty$ และ $n \rightarrow \infty$ จะเรียกกระดานหมากรุกดังกล่าวว่า กระดานหมากรุกขนาดอนันต์ การเดินม้าหมากรุกแบบ (a, b) เป็นการเดินบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์จากช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสช่องหนึ่งไปอีกช่องหนึ่ง โดยเดินม้าหมากรุกไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเฉียงทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง ในบทความนี้พิจารณาการเดินของม้าหมากรุกเดินแบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ และนำเสนอสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ ไปถึงได้บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ และจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงด้วยการเดินเพียง k ครั้ง

คำสำคัญ: การเดินม้าหมากรุกแบบ (a, b) สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินไปถึงได้

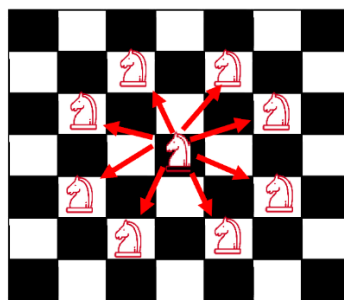
ABSTRACT

The $m \times n$ chessboard is an array with squares arranged in m rows and n columns. If $m \rightarrow \infty$ and $n \rightarrow \infty$, then it is called an *infinite chessboard*. An (a, b) -knight's move is a move from square to square by moving a knight passing a squares vertically or a squares horizontally and then passing b squares at 90 degrees angle. In this article, we consider the $(2, b)$ -knight's move where $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ and obtain formula for the number of squares reachable by a knight with the $(2, b)$ -knight's move where $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ on an infinite chessboard and the cumulative number of squares that the knight can reach in k moves.

Keywords: (a, b) -knight's move, Number of squares reachable by a knight

1. บทนำ

ในเกมหมากรุก ตัวหมากตัวหนึ่ง คือ ม้า ม้าจะมีวิธีการเดินแตกต่างจากตัวหมากตัวอื่น ๆ อย่างมาก กล่าวคือ จะเดินตามแนวตั้งหรือแนวนอนไปหนึ่งช่องแล้วเดินเฉียงทำมุม 90 องศา กับแนวเดิมไปอีกสองช่อง เรียกการเดินแบบนี้ว่า การเดินแบบปกติของม้า



รูปที่ 1.1 ช่องที่ม้าเดินแบบปกติไปถึงได้จากตำแหน่งของม้าที่กำหนดให้

กระดานหมากรุกขนาดมาตรฐาน คือ กระดานหมากรุกขนาด 8×8 ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดแถวและแปดหลัก โดยแต่ละช่องทาด้วยสีดำหรือสีขาว ต่อมา มีการขยายกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานให้เป็นกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ซึ่ง กระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน m แถว และ n หลัก ทาสีแต่ละช่องด้วยสีดำและสีขาวสลับกันไป ในปี ค.ศ. 2013 Miller และ Farnsworth [2] ได้พิจารณากระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่ m และ n คู่เข้าสู่อันันต์ หรือที่เรียกว่า กระดานหมากรุกขนาดอนันต์ ซึ่งมีช่องรูปสี่เหลี่ยม

จัดเรียงตามแนวนอนและช่องรูปสี่เหลี่ยมจัดเรียงตามแนวตั้งเป็นจำนวนอนันต์ แล้วหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เท่ากับ 1, 8, 32, 68, 96 และ $28k - 20$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4$ และ $k \geq 5$ ตามลำดับ และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงได้ในการเดิน k ครั้ง เท่ากับ 1, 9, 41, 109 และ $14k^2 - 6k + 5$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ $k \geq 4$ ตามลำดับ

ทั้งนี้การนับจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติไปถึงได้จากจุดเริ่มต้นที่กำหนดให้ นั้นจะพิจารณาการเดิน k ครั้งทีน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่ม้าจะไปถึงช่องดังกล่าว ในบทความฉบับนี้จึงใช้วลีที่ว่า “จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง” และหากช่องใดม้าเคยเดินไปถึงแล้วภายในการเดินเพียง k ครั้ง จะไม่นับช่องดังกล่าวซ้ำอีกในการเดินครั้งต่อไปที่มากกว่า k

ในปี ค.ศ. 2003 Chia และ Ong [1] ได้ปรับเปลี่ยนการเดินแบบปกติของม้าไปเป็น *การเดินแบบ (a, b) ของม้า* นั่นคือ การเดินม้าไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศาไปอีก b ช่อง นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณาได้โดยง่ายว่าการเดินแบบ (a, b) ของม้า จะเหมือนกับการเดินแบบ (b, a) ของม้า ดังนั้นในโครงการฉบับนี้จึงพิจารณาการเดินแบบ (a, b) ของม้า เมื่อกำหนดให้ $a \leq b$ นอกจากนี้ยังได้ด้วยการเดินแบบปกติของม้า คือ การเดินแบบ $(1, 2)$ ของม้า สังเกตว่าถ้าให้ (i, j) เป็นช่องบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เป็นจุดเริ่มต้น แล้วม้าจะสามารถเดินแบบ (a, b) ไปได้จำนวนอย่างมาก 8 ช่อง กล่าวคือ $(i \pm a, j \pm b)$ และ $(i \pm b, j \pm a)$ (หรืออย่างมาก 4 ช่อง ในกรณีที่ $a = b$) นอกจากนี้ยังสังเกตได้อีกว่า ถ้า $a + b$ เป็นจำนวนคี่ ม้าจะสามารถเดินไปได้ทุกช่องบนกระดานขนาดอนันต์ แต่ถ้า $a + b$ เป็นจำนวนคู่ ม้าจะสามารถเดินจากช่องสีดำไปช่องสีดำ หรือจากช่องสีขาวไปช่องสีขาวเท่านั้น

ในปี ค.ศ. 2018 Theprod [3] ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] ไปพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง ตลอดจนจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $b \in \{3, 4, 5, 7\}$

บทความฉบับนี้ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] และ Theprod [3] มาเป็นการหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง และ

สูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2, 4, 6, 8\}$

2. สูตรของจำนวนช่องสำหรับการเดินม้าแบบ $(2, 2)$

พิจารณาการเดินของม้าแบบ $(2, 2)$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้น ที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดเริ่มต้น K ดังรูปที่ 2.1 สังเกตว่าการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ 1 และ k ช่อง เมื่อ $k = 0$ และ $k \geq 1$ ตามลำดับ

บทพิสูจน์

กรณี 1 $k = 0$ ช่องที่กำกับด้วยเลข 0 (คือ ช่องที่กำกับด้วย K) ปรากฏ 1 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน 1 ช่อง

กรณี 2 $k \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

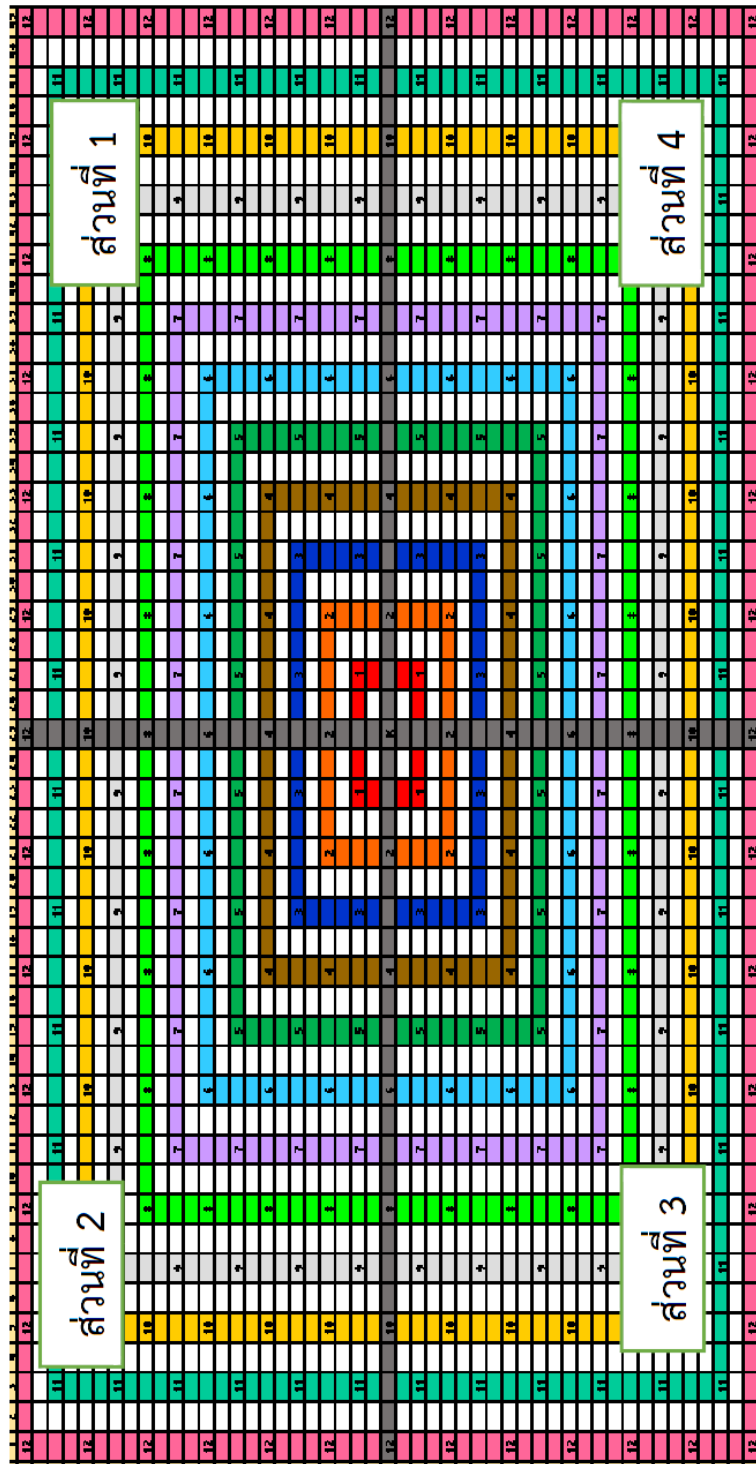
ช่องที่กำกับด้วยเลข 1 ปรากฏ 1 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน 1 ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 3 ปรากฏ 2 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 2 = 3$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 3 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 3 = 5$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 4 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 1 + 4 = 7$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k+1}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}_{\frac{k-1}{2} \text{ ตัว}} + \frac{k+1}{2} = k$ ช่อง



รูปที่ 2.1 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดดอนันต์ที่สามารถเดินแบบ (2,2) ออกเป็น 4 ส่วน

กรณี 3 $k \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 2 ปรากฏ 1 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน 2 ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 4 ปรากฏ 2 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 3 = 4$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 3 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 4 = 6$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 4 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 1 + 5 = 8$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\frac{k-2}{2} \text{ ตัว}} + \frac{k+2}{2} = k$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนนับ

สมมติว่าถ้า k เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k+1}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\frac{k-1}{2} \text{ ตัว}} + \frac{k+1}{2}$ ช่อง และถ้า k เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k

ปรากฏ $\frac{k}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\frac{k-2}{2} \text{ ตัว}} + \frac{k+2}{2}$ ช่อง

กรณี k เป็นจำนวนเต็มคี่ ในหลักที่ 1 ถึง หลักที่ $\frac{k-1}{2}$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\frac{k-1}{2} \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $\frac{k+1}{2}$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวล่าสุด เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\frac{k+3}{2}$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ มีทั้งหมด $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\frac{k-1}{2} \text{ ตัว}} + \frac{k+3}{2} = k + 1$ ช่อง

กรณี k เป็นจำนวนเต็มคู่ ในหลักที่ 1 ถึง หลักที่ $\frac{k-2}{2}$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นม้าในหลักที่ 1 เดินไปทางซ้ายได้ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\frac{k}{2} \text{ ตัว}}$ ช่อง ในหลักที่ $\frac{k}{2}$ ม้าจะเดินไปทางขวา โดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง

จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\frac{k+2}{2}$ ช่อง ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด

$$\underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\frac{k}{2} \text{ ตัว}} + \frac{k+2}{2} = k + 1 \text{ ช่อง}$$

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง □

ทฤษฎีบท 2.1

(i) จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ 1 และ $4k$ ช่อง เมื่อ $k = 0$ และ $k \geq 1$ ตามลำดับ

(ii) จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 2)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ คือ $2k^2 + 2k + 1$ ช่อง เมื่อ $k \geq 0$

บทพิสูจน์

(i) ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 2.1 และการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน

(ii) ถ้า $k = 0$ จะได้โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 ว่าจำนวนช่องสะสมดังกล่าว คือ 1 ช่อง

ถ้า $k \geq 1$ จะได้โดยทฤษฎีบท 2.1 (i) ว่า จำนวนช่องสะสมดังกล่าวสามารถคำนวณโดยตรงได้จาก $1 + \sum_{i=1}^k 4i$ □

3. สูตรของจำนวนช่องสำหรับการเดินม้าแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$

พิจารณาการเดินของม้าแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดเริ่มต้น K ดังรูปที่ 3.1 และ รูปที่ 3.2 จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ 1, 8, 32, 68 และ 96 ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 ตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 5$ จะเห็นว่าการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 3.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $7k - 5$ ช่อง เมื่อ $k \geq 5$

บทพิสูจน์

กรณี 1 $k \geq 5$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $k = 2t + 1$ เมื่อ $t \geq 2$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 10 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3) + 5 + 4 + 4 + 3 = 30$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 14 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3) + 6 + 5 + 5 + 4 = 44$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 18 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 7 + 6 + 6 + 5 = 58$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 22 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 8 + 7 + 7 + 6 = 72$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \geq 2$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2 + 2 + 2 + \dots + 2)}_{2t \text{ ตัว}} + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{2t-2 \text{ ตัว}} + (t + 3) +$

$(t + 2) + (t + 2) + (t + 1) = 14t + 2 = 7k - 5$ ช่อง

กรณี 2 $k \geq 6$ เป็นจำนวนเต็มคู่

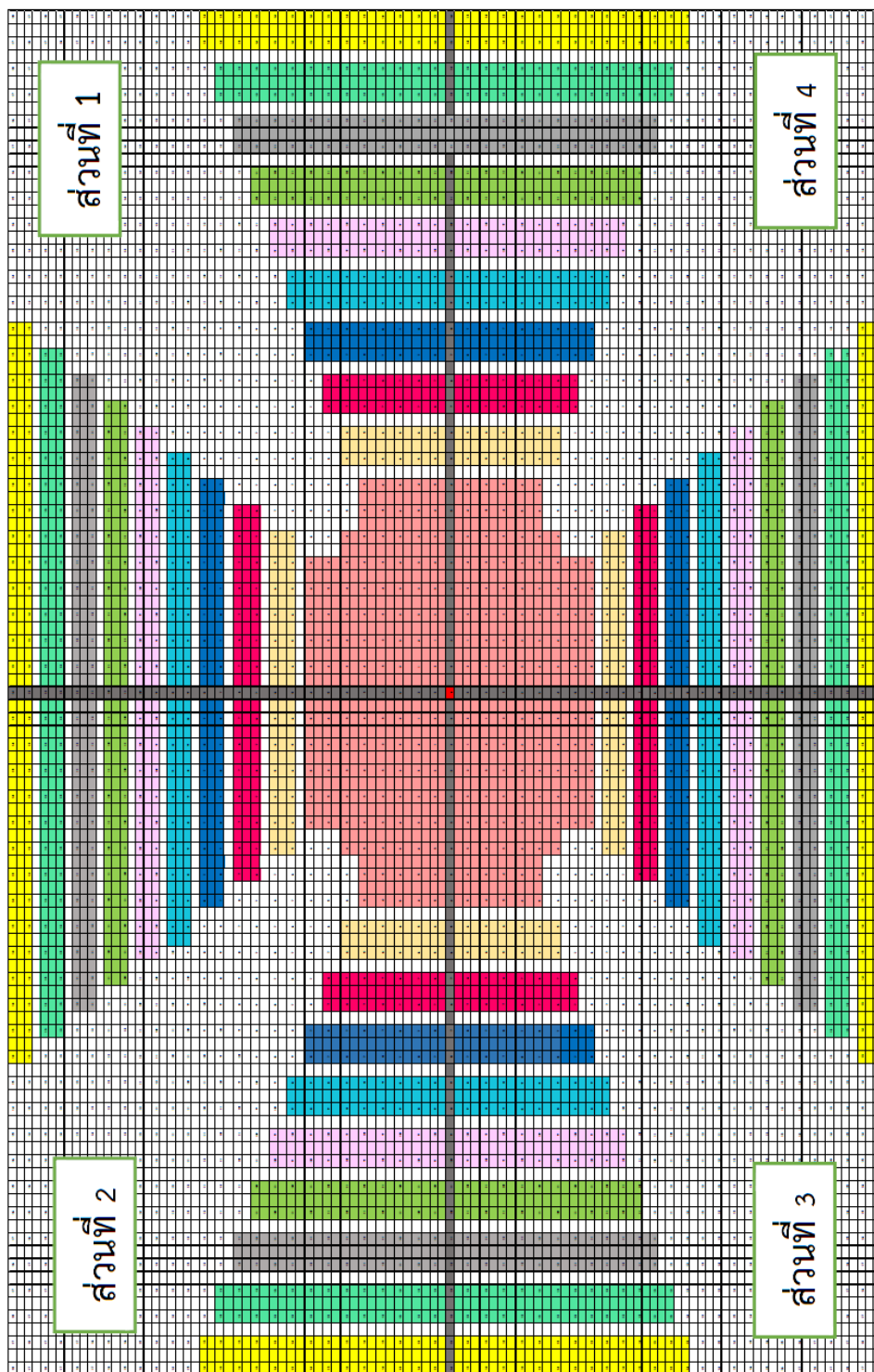
ให้ $k = 2t$ เมื่อ $t \geq 3$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 12 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3) + 5 + 5 + 4 + 4 = 37$ ช่อง

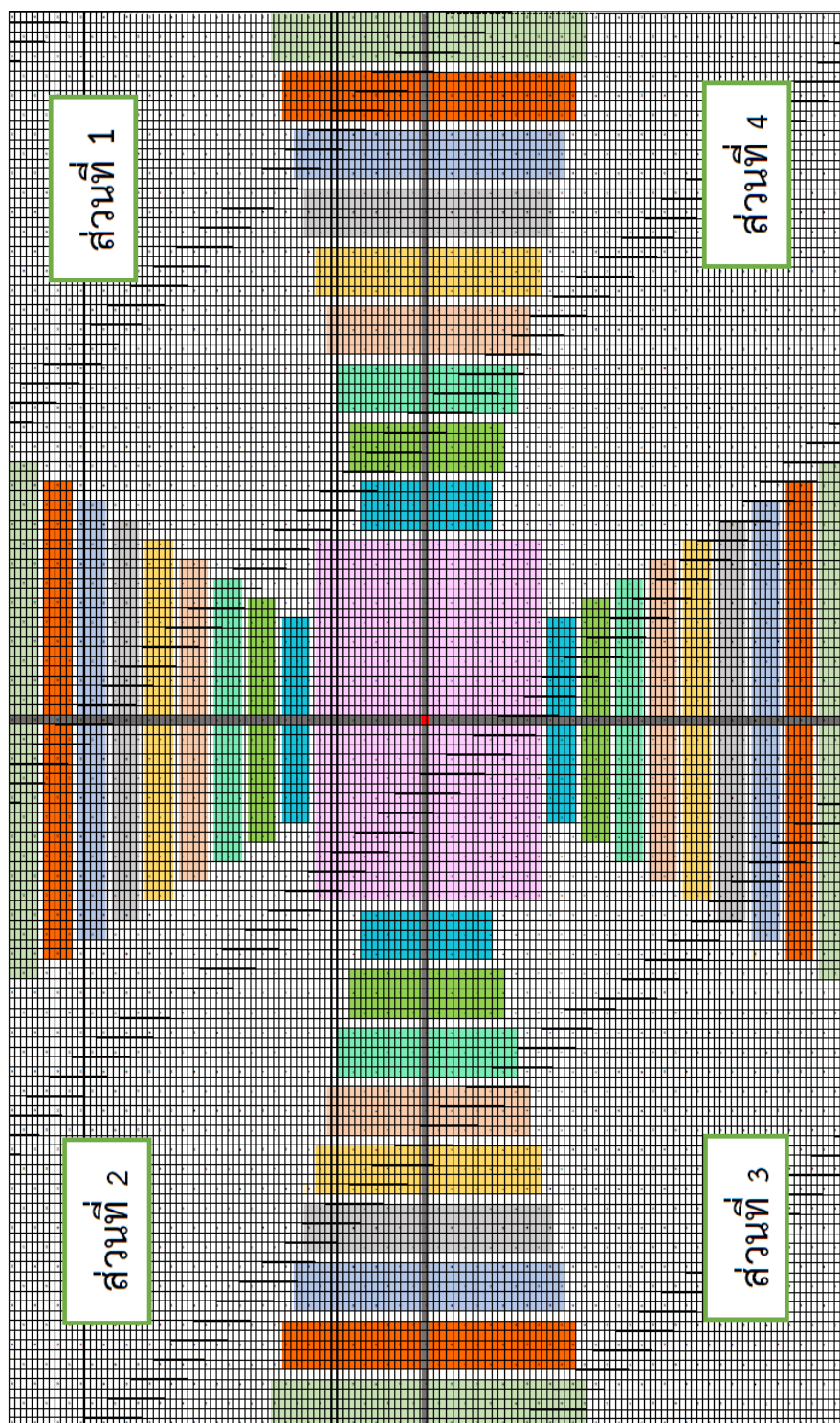
ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 16 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 6 + 6 + 5 + 5 = 51$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 20 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 7 + 7 + 6 + 6 = 65$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 24 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 8 + 8 + 7 + 7 = 79$ ช่อง



รูปที่ 3.1 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่สามารถเดินแบบ $(2, 4)$ ออกเป็น 4 ส่วน



รูปที่ 3.2 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่สามารถเดินแบบ (2,6) ออกเป็น 4 ส่วน

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t$ ที่ $t \geq 3$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2 + 2 + 2 + \dots + 2)}_{2t-1 \text{ ตัว}} + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{2t-3 \text{ ตัว}} + (t + 2) + (t + 2) + (t + 1) + (t + 1) = 14t - 5 = 7k - 5$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 5$ สมมติว่าถ้า $k = 2t + 1$ และ $t \geq 2$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $4t + 2$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2 + 2 + 2 + \dots + 2)}_{2t \text{ ตัว}} + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{2t-2 \text{ ตัว}} + (t + 3) + (t + 2) + (t + 2) + (t + 1)$ ช่อง และถ้า $k = 2t$ และ $t \geq 3$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $4t$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2 + 2 + 2 + \dots + 2)}_{2t-1 \text{ ตัว}} + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{2t-3 \text{ ตัว}} + (t + 2) + (t + 2) + (t + 1) + (t + 1)$ ช่อง

กรณี $k = 2t + 1$ และ $t \geq 2$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง จึงเดินไปได้ทั้งหมด 2 ช่อง

ในหลักที่ 2 ถึงหลักที่ $2t$ ในแต่ละหลัก จะเดินม้าไปทางซ้ายสลับขวาไปเรื่อย ๆ โดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักสุดท้าย เดินไปทั้งทางซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(2 + 2 + 2 + \dots + 2)}_{2t \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $2t + 1$ ถึงหลักที่ $4t - 2$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{2t-2 \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4t - 1$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 3 ช่องบนที่เดินไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 3 ช่อง

ในหลักที่ $4t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง

ในหลักที่ $4t + 1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง

ในหลักที่ $4t + 2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และม้าในหลักนี้ยังเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้

ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $2t + 4$ ช่อง

ดังนั้น ผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ มีทั้งหมด $2 + \underbrace{(2 + 2 + 2 + \cdots + 2)}_{2t \text{ ตัว}} + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \cdots + 3)}_{2t-2 \text{ ตัว}} + 3 + (t + 3) + (t + 3) + (2t + 4) = 14t + 9 = 7(k + 1) - 5 = 7k + 2$ ช่อง

กรณี $k = 2t$ และ $t \geq 3$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $2t - 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นม้าในหลักที่ 2 ที่เดินไปได้ทั้งทางซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(2 + 2 + 2 + \cdots + 2)}_{2t \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $2t$ ถึงหลักที่ $4t - 4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \cdots + 3)}_{2t-3 \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4t - 3$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 3 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 3 ช่อง

ในหลักที่ $4t - 2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง

ในหลักที่ $4t - 1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง

ในหลักที่ $4t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 1$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $2t + 3$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(2 + 2 + 2 + \cdots + 2)}_{2t \text{ ตัว}} + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \cdots + 3)}_{2t-3 \text{ ตัว}} + 3 + (t + 3) + (t + 2) + (2t + 3) = 14t + 2 = 7(k + 1) - 5 = 7k + 2$ ช่อง

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง □

สูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินได้แบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2, 4, 6, 8\}$

	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14	15	14	15
	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14
	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	15
	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14
	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13
	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	14
	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13
	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	12	11	12
	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	12	13
	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	11	12
	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	11	12	13
	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	10	11	12
	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9	10	11	12	13
	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	9	10	11	12
	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	3	2	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	9	10	11	12
	2	3	2	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1	4	3	2	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	9	10	11	12
	2	1	2	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k	3	2	3	2	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	9	10	11	12

รูปที่ 3.3 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3 จำนวนช่องที่มีม้าสามารถเดินแบบ $(2, 6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $7k - 5$ ช่อง เมื่อ $k \geq 5$

บทพิสูจน์

กรณี 1 $k \geq 5$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $k = 2t + 1$ เมื่อ $t \geq 2$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 8 หลัก มีอยู่ $(3 + 3) + (4 + 4 + 4) + 5 + 4 + 3 = 30$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 11 หลัก มีอยู่ $(3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 6 + 5 + 4 = 44$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 14 หลัก มีอยู่ $(3 + 3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 7 + 6 + 5 = 58$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 17 หลัก มีอยู่ $(3 + 3 + 3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 8 + 7 + 6 = 72$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \geq 2$

ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{t \text{ ตัว}} + \underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-1 \text{ ตัว}} + (t + 3) +$

$(t + 2) + (t + 1) = 14t + 2 = 7k - 5$ ช่อง

กรณี 2 $k \geq 6$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ $k = 2t$ เมื่อ $t \geq 3$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 9 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4) + 6 + 5 + 4 = 37$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 12 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 7 + 6 + 5 = 51$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 15 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3 + 3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 8 + 7 + 6 = 65$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 18 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3 + 3 + 3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + 9 + 8 + 7 = 79$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t$ ที่ $t \geq 3$ ในหลัก
 เหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{t-1 \text{ ตัว}} + \underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-2 \text{ ตัว}} + (t + 3) + (t + 2) +$
 $(t + 1) = 14t - 5 = 7k - 5$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 5$

สมมติว่าถ้า $k = 2t + 1$ และ $t \geq 2$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $3t + 2$ หลัก ในหลัก
 เหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{t \text{ ตัว}} + \underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-1 \text{ ตัว}} + (t + 3) + (t + 2) +$
 $(t + 1)$ ช่อง และถ้า $k = 2t$ และ $t \geq 3$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $3t$ หลัก ในหลัก
 เหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{t-1 \text{ ตัว}} + \underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-2 \text{ ตัว}} + (t + 3) + (t + 2) +$
 $(t + 1)$ ช่อง

กรณี $k = 2t + 1$ และ $t \geq 2$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีก
 หลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ t ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดิน
 ต่อไปได้ $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{t \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $t + 1$ ถึงหลักที่ $3t - 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่อง
 ที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-1 \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $3t$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดิน
 ต่อไปได้เพียง 4 ช่อง

ในหลักที่ $3t + 1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้น 2 ตัวรองสุดท้ายที่เดิน
 ไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 4$ ช่อง

ในหลักที่ $3t + 2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้น 2 ตัวก่อนตัวกลางสุดท้ายที่
 เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่
 ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และ
 ได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $2t + 5$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{t \text{ ตัว}} +$

$\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-1 \text{ ตัว}} + 4 + (t + 4) + (2t + 5) = 14t + 9 = 7(k + 1) - 5 = 7k + 2$ ช่อง

กรณี $k = 2t$ และ $t \geq 3$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินทางจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $t - 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักที่ 1 เดินไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{t \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ t ถึงหลักที่ $3t - 3$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-2 \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $3t - 2$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 4 ช่อง

ในหลักที่ $3t - 1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 จากล่างสุดที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง

ในหลักที่ $3t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 จากล่างสุดที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 1$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $2t + 3$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(3 + 3 + 3 + \dots + 3)}_{t \text{ ตัว}} +$

$$\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-2 \text{ ตัว}} + 4 + (t + 3) + (2t + 3) = 14t + 2 = 7(k + 1) - 5 = 7k + 2 \text{ ช่อง}$$

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง $\square$

ทฤษฎีบท 3.1

(i) จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 8, 32, 68, 96$ และ $28k - 20$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4$ และ $k \geq 5$ ตามลำดับ

(ii) จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้ง หรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 9, 41, 109, 205$ และ $14k^2 - 6k + 5$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4$ และ $k \geq 5$ ตามลำดับ

บทพิสูจน์

(i) ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 3.1, 3.2 และ 3.3 และการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน

(ii) ถ้า $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 จะได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 3.1 ว่าจำนวนช่องสะสมดังกล่าวคือ 1, 9, 41, 109 และ 205 ช่อง ตามลำดับ ถ้า $k \geq 5$ จะได้โดยทฤษฎีบท 3.1 (i) ว่าจะได้จำนวนช่องสะสมดังกล่าวสามารถคำนวณโดยตรงได้จาก $205 + \sum_{i=5}^k (28i - 20)$ $\square$

4. สูตรของจำนวนช่องสำหรับการเดินม้าแบบ (2, 8)

พิจารณาการเดินของม้าแบบ (2, 8) บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดดังรูปที่ 4.1 จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, 8) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรงเมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 4.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, 8) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ 1, 8, 32, 88, 204, 324, 448, 548 และ 620 ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 ตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 9$ จะเห็นว่าการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 4.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2, 8) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $23k - 33$ ช่อง เมื่อ $k \geq 9$

บทพิสูจน์

กรณี 1 $k \geq 9$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $k = 2t + 1$ เมื่อ $t \geq 4$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 32 หลัก มีอยู่ $(4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + 13 + (4 + 4) + 11 + 4 + 8 + 10 + 4 + 8 + 7 + 7 + 5 = 174$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 40 หลัก มีอยู่ $(4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + 14 + (4 + 4) + 12 + 4 + 9 + 11 + 4 + 9 + 8 + 8 + 6 = 220$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 13 ปรากฏ 48 หลัก มีอยู่ $(4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + 15 + (4 + 4) + 13 + 4 + 10 + 12 + 4 + 10 + 9 + 9 + 7 = 266$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \geq 4$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t \text{ ตัว}} + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + \underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \dots + (7 + 4 + 4))}_{2t-6 \text{ ตัว}} + (t + 9) + (4 + 4) + (t + 7) + 4 + (t + 4) + (t + 6) + 4 + (t + 4) + (t + 3) + (t + 3) + (t + 1) = 46t - 10 = 23k - 33$ ช่อง

กรณี $2 \leq k \leq 10$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ $k = 2t$ เมื่อ $t \geq 5$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

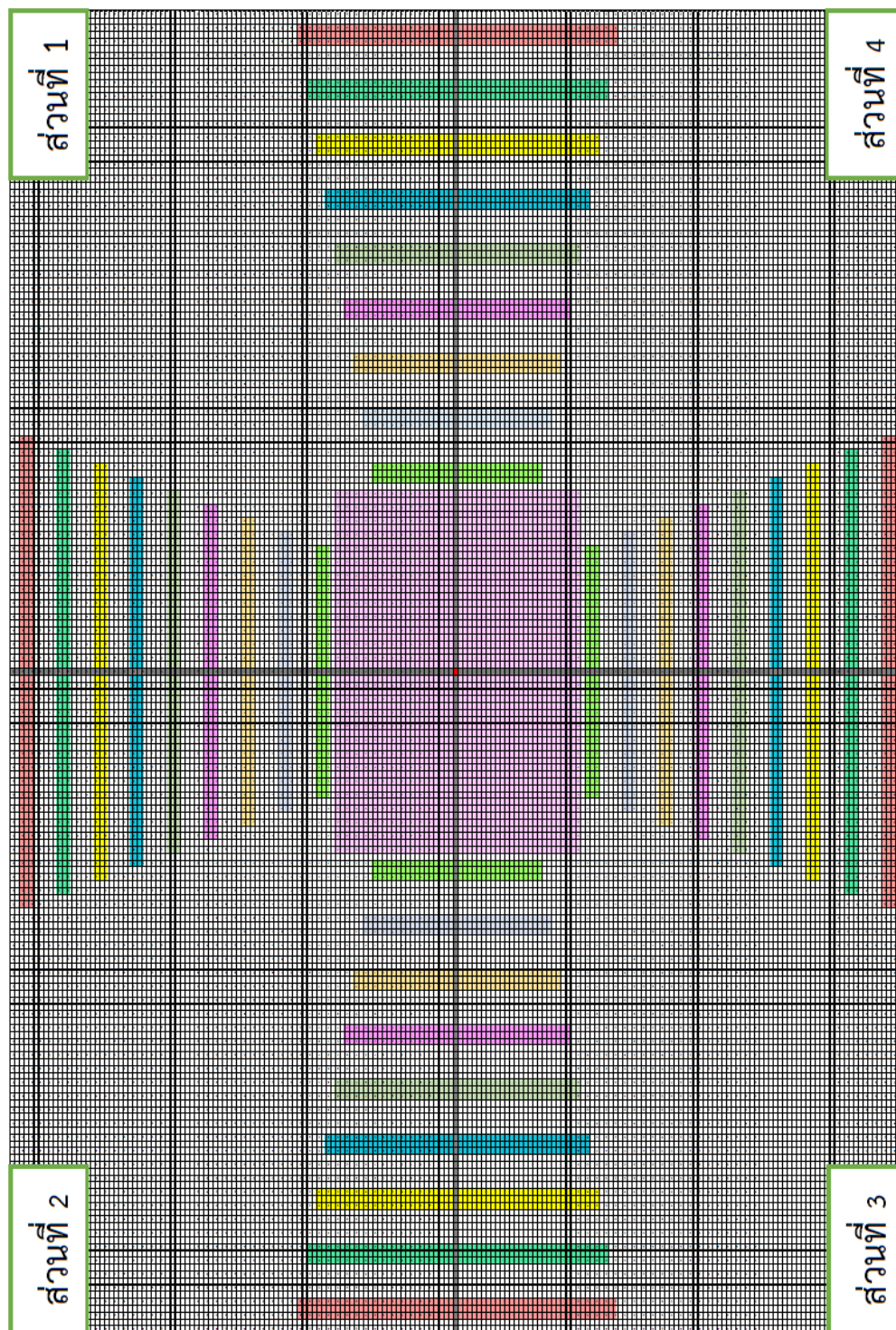
ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 36 หลัก มีอยู่ $(4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + 13 + (4 + 4) + 12 + 4 + 9 + 10 + 4 + 9 + 7 + 7 + 6 = 197$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 44 หลัก มีอยู่ $(4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + 14 + (4 + 4) + 13 + 4 + 10 + 11 + 4 + 10 + 8 + 8 + 7 = 243$ ช่อง

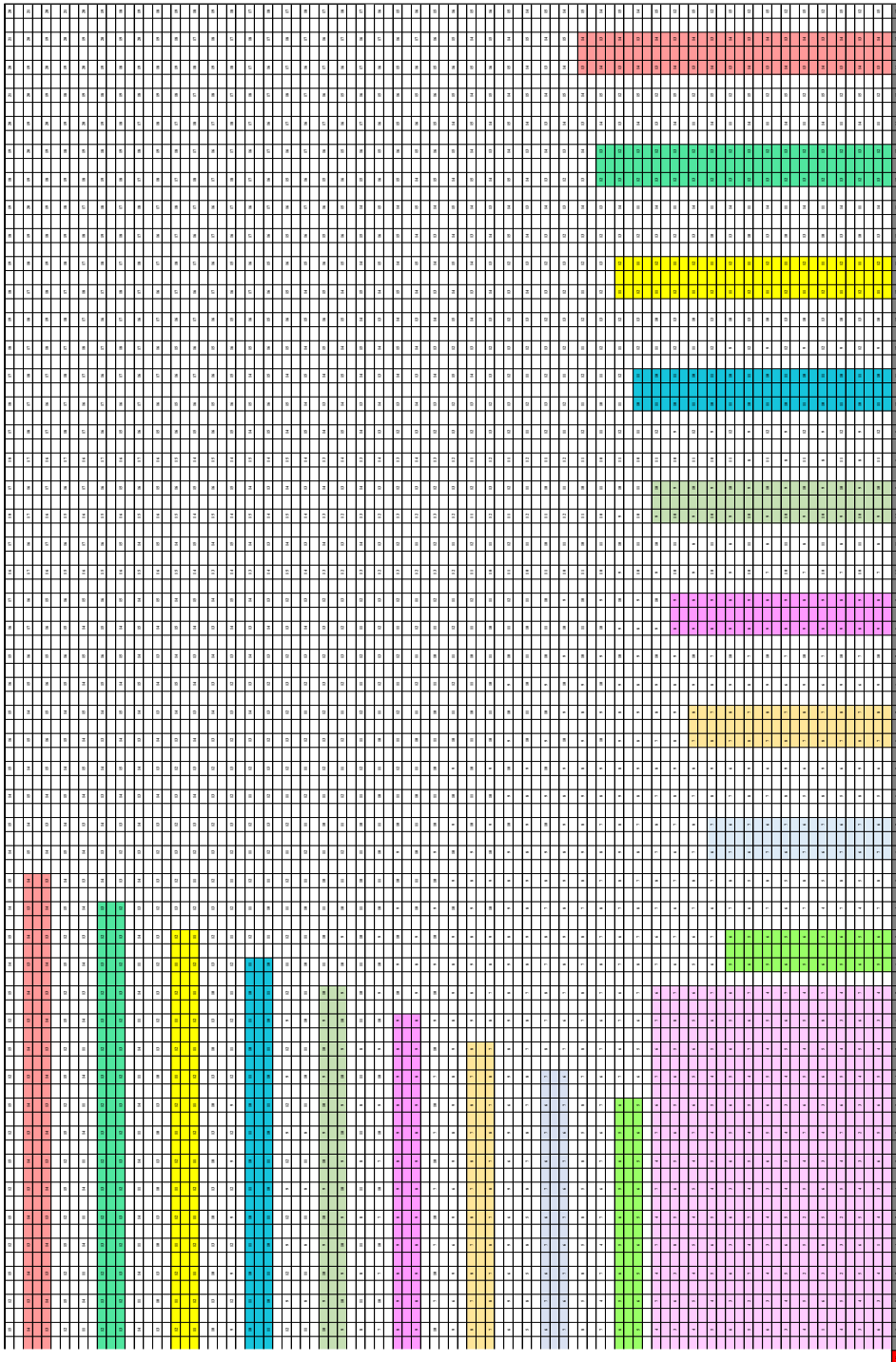
ช่องที่กำกับด้วยเลข 14 ปรากฏ 52 หลัก มีอยู่ $(4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + 15 + (4 + 4) + 14 + 4 + 11 + 12 + 4 + 11 + 9 + 9 + 8 = 289$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t$ ที่ $t \geq 5$

ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t-1 \text{ ตัว}} + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) +$



รูปที่ 4.1 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่สามารถเดินแบบ (2,8) ออกเป็น 4 ส่วน



รูปที่ 4.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

$$\underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \cdots + (7 + 4 + 4))}_{2t-7 \text{ ตัว}} + (t + 8) + (4 + 4) + (t + 7) + 4 + (t + 4) + (t + 5) + 4 + (t + 4) + (t + 2) + (t + 2) + (t + 1) = 46t - 33 = 23k - 33 \text{ ช่อง}$$

เพื่อพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 9$

สมมติว่าถ้า $k = 2t + 1$ และ $t \geq 4$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $8t$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(4 + 4 + 4 + \cdots + 4) + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) +$

$$\underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \cdots + (7 + 4 + 4))}_{2t-6 \text{ ตัว}} + (t + 9) + (4 + 4) +$$

$$(t + 7) + 4 + (t + 4) + (t + 6) + 4 + (t + 4) + (t + 3) + (t + 3) + (t + 1) \text{ ช่อง และ}$$

ถ้า $k = 2t$ และ $t \geq 5$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $8t - 4$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน

$$(4 + 4 + 4 + \cdots + 4) + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) +$$

$$\underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \cdots + (7 + 4 + 4))}_{2t-7 \text{ ตัว}} + (t + 8) + (4 + 4) +$$

$$(t + 7) + 4 + (t + 4) + (t + 5) + 4 + (t + 4) + (t + 2) + (t + 2) + (t + 1) \text{ ช่อง}$$

กรณี $k = 2t + 1$ และ $t \geq 4$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินทางจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $2t$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักที่ 2 จะเดินไปได้ทั้งซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $(4 + 4 + 4 + \cdots + 4)$ ช่อง

ในหลักที่ $2t + 1$ ถึงหลักที่ $2t + 6$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $(5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4)$ ช่อง

ในหลักที่ $2t + 7$ ถึงหลักที่ $8t - 12$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \cdots + (7 + 4 + 4))$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 11$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 7 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 7 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 10$ ถึงหลักที่ $8t - 9$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $4 + 4$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 8$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 9$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 7$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 6$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 8$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 3$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 6$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 2$ ม้าจะเดินต่อไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 5$ ช่อง และจะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง ทำให้ผลรวมของช่องที่เดินต่อไปได้ทั้งหมดเป็น $t + 9$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 5$ ช่อง

ในหลักที่ $8t$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง และม้าจะเดินต่อไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง นอกจากนี้ม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $3t + 8$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t+1 \text{ ตัว}} + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + \underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \dots + (7 + 4 + 4))}_{2t-6 \text{ ตัว}} + 7 + (4 + 4) + (t + 9) + 4 + 4 + (t + 8) + 4 + (t + 6) + (t + 9) + (t + 5) + (3t + 8) = 46t + 13 = 23(k + 1) - 33 = 23k - 10$ ช่อง

กรณี $k = 2t$ และ $t \geq 5$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $2t - 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักที่ 2 จะเดินไปได้ทั้งซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $2t$ ถึงหลักที่ $2t + 5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $(5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4)$ ช่อง

ในหลักที่ $2t + 6$ ถึงหลักที่ $8t - 16$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \dots + (7 + 4 + 4))}_{2t-7 \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 15$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 7 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 7 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 14$ ถึงหลักที่ $8t - 13$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $4 + 4$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 12$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากกลางสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 9$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 11$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 10$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 9$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากกลางสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 7$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 8$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 7$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากกลางสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 6$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 6$ ม้าจะเดินต่อไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากกลางสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 4$ ช่อง และจะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง ทำให้ผลรวมของช่องที่เดินต่อไปได้ทั้งหมดเป็น $t + 8$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 4$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง และม้าจะเดินต่อไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะเดินไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง นอกจากนี้ม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 1$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $3t + 7$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \dots + 4)}_{2t \text{ ตัว}} + (5 + 4 + 4) + (6 + 4 + 4) + \underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \dots + (7 + 4 + 4))}_{2t-7 \text{ ตัว}} + 7 + (4 + 4) + (t + 9) + 4 + 4 + (t + 7) + 4 + (t + 6) + (t + 8) + (t + 4) + (3t + 7) = 46t - 10 = 23(k + 1) - 33 = 23k - 10$ ช่อง

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง □

ทฤษฎีบท 4.1

(i) จำนวนช่องที่มีม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 8, 32, 88, 204, 324, 448, 548, 620$ และ $92k - 132$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ และ $k \geq 9$ ตามลำดับ

(ii) จำนวนช่องสะสมที่มีม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 9, 41, 129, 333, 657, 1105, 1653, 2273$ และ $46k^2 - 86k + 17$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ และ $k \geq 9$ ตามลำดับ

บทพิสูจน์

(i) ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 4.1 และ 4.2 และการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน

(ii) ถ้า $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 จะได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 4.1 ว่าจำนวนช่องสะสมดังกล่าว คือ $1, 9, 41, 129, 333, 657, 1105, 1653$ และ 2273 ช่อง ตามลำดับ

ถ้า $k \geq 9$ จะได้โดยทฤษฎีบท 4.1 (i) ว่าจะได้จำนวนช่องสะสมดังกล่าวสามารถคำนวณโดยตรงได้จาก $2273 + \sum_{i=9}^k (92i - 132)$ □

5. ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

บทความฉบับนี้พิจารณาการเดินของม้าหมากรุกแบบ $(2, b)$ สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ โดยได้ผลการศึกษาดังต่อไปนี้

b	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ ภายในการเดินเพียง k ครั้ง
2	$k = 0$ เดินได้ 1 ช่อง และ $k \geq 1$ เดินได้ $4k$ ช่อง
4 และ 6	$k = 0, 1, 2, 3, 4$ เดินได้ 1, 8, 32, 68, 96 ช่อง ตามลำดับ และ $k \geq 5$ เดินได้ $28k - 20$ ช่อง
8	$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ เดินได้ 1, 8, 32, 88, 192, 324, 448, 548, 620 ช่อง ตามลำดับ และ $k \geq 9$ เดินได้ $92k - 132$ ช่อง

จากผลการศึกษาที่ได้ ผู้ที่สนใจอาจพบข้อสังเกตบางประการหรืออาจตั้งคำถามเพิ่มเติม เพื่อขยายผลไปสู่โครงงานคณิตศาสตร์ชิ้นใหม่ได้เช่น

1. มีจำนวนเต็มคู่ b คู่ใดอีกหรือไม่ที่สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้งเป็นสูตรเดียวกันเหมือน $(2, 4)$ และ $(2, 6)$
2. สูตรทั่วไปของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็มคู่ b ทั้งหมดมีหรือไม่ ถ้ามีสูตรดังกล่าวมีรูปแบบเป็นอย่างไร
3. สูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็มคี่ b มีหรือไม่ ถ้ามีสูตรดังกล่าวมีรูปแบบเป็นอย่างไร แต่ในกรณีนี้ม้าจะเดินไปได้ทั้งช่องขาวและดำ ซึ่งทำให้การนับจำนวนช่องมีความยุ่งยากมากขึ้น
4. สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ (a, b) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง โดยที่ a เป็นจำนวนเต็มที่ $a \geq 3$ มีหรือไม่ ถ้ามีสูตรดังกล่าวมีรูปแบบเป็นอย่างไร แต่ในกรณีดังกล่าว การเดินหนึ่งครั้งของม้าจะออกไปไกลจากจุดเริ่มต้นที่กำหนดมาก ทำให้ต้องสร้างกระดานหมากรุกขนาดใหญ่ และสูตรทั่วไปของจำนวนช่องที่ได้จะเริ่มหาได้เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามาก ๆ

เอกสารอ้างอิง

- [1] Chai, G. L. and Ong, S.-H. (2005). Generalized Knight's Tours on Rectangular Chessboard. *Discrete Applied Math*, 150, p. 80 - 89.
- [2] Miller, A. M. and Farnsworth, D. L. (2013). Counting The Number of Squares Reachable in k Knight's Move. *Open J. of Discrete Math*, 3, p. 151 - 154.
- [3] Theprod, R. (2018). *Formula for Number of Squares Reachable by A Knight*. (Master's Thesis, Ramkhamhaeng University).