



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 63(696) กันยายน – ธันวาคม 2561

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

Necessary and Sufficient Conditions for Fitting Regular Pentagon in The Right Triangle

วัชรพงษ์ อนรรทมเมธี และ วาสนา เสือด้วง

Watcharapong Anakkamatee¹ and Wadsana Sueduang²

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Science, Naresuan University

Email: ¹watcharaponga@nu.ac.th, ²wadsanas57@nu.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความนี้จะนำเสนอเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาวด้าน a หน่วย ลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย ABC ที่มี $\angle ABC$ เป็นมุมฉาก และมีด้านประกอบมุมฉากที่สั้นกว่าคือ $\overline{BC}$ ซึ่งยาว c หน่วย โดยได้ผลการศึกษาดังนี้

- 1) ถ้า $\angle ACB = \alpha \leq 54^\circ$ แล้วจะสามารถใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย ABC ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}$
- 2) ถ้า $\angle ACB = \alpha > 54^\circ$ แล้วจะสามารถใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย ABC ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ}$

คำสำคัญ: รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า การบรรจุ

ABSTRACT

In this paper, we present necessary and sufficient conditions for fitting a regular pentagon which each side has the length a into the target right triangle ABC with the right angle $\widehat{ABC}$ and the shorter leg, $\overline{BC}$, has the length c . We get the result as follows

1) If $\widehat{ACB} = \alpha \leq 54^\circ$ then the regular pentagon can be fitted in the target

triangle ABC if and only if $\leq \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}$.

2) if $\widehat{ACB} = \alpha > 54^\circ$ then the regular pentagon can be fitted in the target

triangle ABC if and only if $a \leq \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ}$.

Keywords: Right triangle, Regular pentagon, Fitting

1. บทนำ

การบรรจุรูปเรขาคณิตลงในรูปเรขาคณิตอีกรูปหนึ่งได้ศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่านด้วยเหตุผลที่มีประโยชน์ในเชิงการประยุกต์ที่สามารถใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันมากมาย ไม่ว่าจะเป็นปัญหาการบรรจุสิ่งของ หรือปัญหาการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด ปัญหาทั่วไปของการศึกษาดังกล่าวได้มีการแนะนำโดย Wetzel [2] สำหรับปัญหาการบรรจุรูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยมได้มีการนำมาพิจารณารั้งแรกโดย Sullivan [4] ซึ่งพูดถึงรูปทั่วไปของการบรรจุรูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยม

ในปี ค.ศ.2007 Jepsen และ Vulpe [3] ได้เริ่มศึกษากรณีเฉพาะของปัญหาของ Wetzel และ Sullivan โดยสนใจเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกรูปหนึ่ง ซึ่งผลการศึกษานี้สามารถสรุปได้เป็นทฤษฎีบท ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 [3] รูปสามเหลี่ยมมุมฉากเริ่มต้นที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว a และ b ($a \leq b$) จะสามารถบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมายที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว c และ d ($c \leq d$) ได้ ก็ต่อเมื่อ

(ก) $a \leq c$ และ $b \leq d$ หรือ

(ข) $a > c$ และ $b \leq \frac{ac(d - \sqrt{a^2 - c^2})}{c^2 + d\sqrt{a^2 - c^2}}$ หรือ

(ค) $b > d$ และ $a \leq \frac{bd(c - \sqrt{b^2 - d^2})}{d^2 + c\sqrt{b^2 - d^2}}$

จากความน่าสนใจของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่สามารถนำความรู้ทางตรีโกณมิติเบื้องต้นมาใช้ในการแก้ปัญหาการใส่รูปเรขาคณิตอีกรูปหนึ่งลงไปได้ โดยในปี ค.ศ. 2017 เมทา [1] ได้ศึกษาเงื่อนไขที่

จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย โดยมีผลการศึกษาดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2 [1] ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\widehat{ABC}$ เป็นมุมฉาก และ

$c = |\overline{BC}| \leq |\overline{AB}| = d$ ถ้า $\widehat{ACB} = \alpha$ แล้ว รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ a จะถูกบรรจุลงใน $\triangle ABC$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{c \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$

ทฤษฎีบท 1.3 [1] ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\widehat{ABC}$ เป็นมุมฉาก และ

$c = |\overline{BC}| \leq |\overline{AB}| = d$ ถ้า $\widehat{ACB} = \alpha \leq 60^\circ$ แล้วรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ยาวด้านละ a จะถูกบรรจุลงใน $\triangle ABC$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{2c \sin \alpha}{\sqrt{3}}$

ทฤษฎีบท 1.4 [1] ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\widehat{ABC}$ เป็นมุมฉาก และ

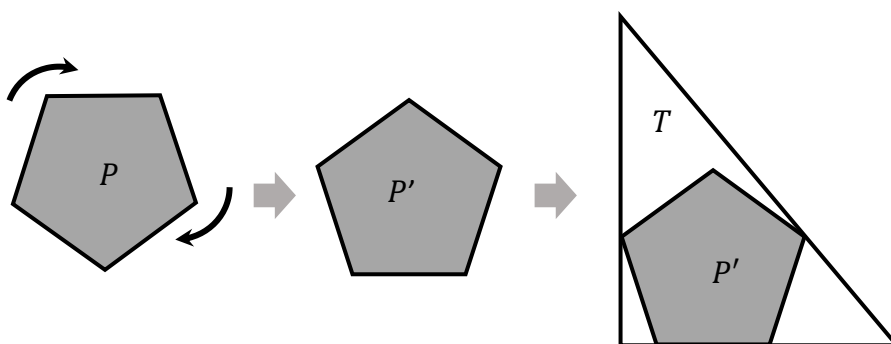
$c = |\overline{BC}| \leq |\overline{AB}| = d$ ถ้า $\widehat{ACB} = \alpha > 60^\circ$ แล้วรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ยาวด้านละ a จะถูกบรรจุลงใน $\triangle ABC$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{2c}{\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}$

ในบทความนี้ผู้เขียนจะนำเสนอคำตอบบางส่วนของปัญหาของ Wetzel และ Sullivan ที่ถามไว้ใน [4] โดยในหัวข้อที่ 2 จะแสดงสมบัติสำคัญที่จำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์ และในหัวข้อที่ 3 จะได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย เนื่องด้วยเนื้อหาส่วนใหญ่ของบทความนี้เป็นการประยุกต์ใช้ความรู้เบื้องต้นทางเรขาคณิตและฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐานในการอธิบาย ผู้เขียนจึงขอยกสมบัติดังกล่าวขึ้นมาใช้เลยโดยไม่แสดงการพิสูจน์

2. ความรู้พื้นฐาน

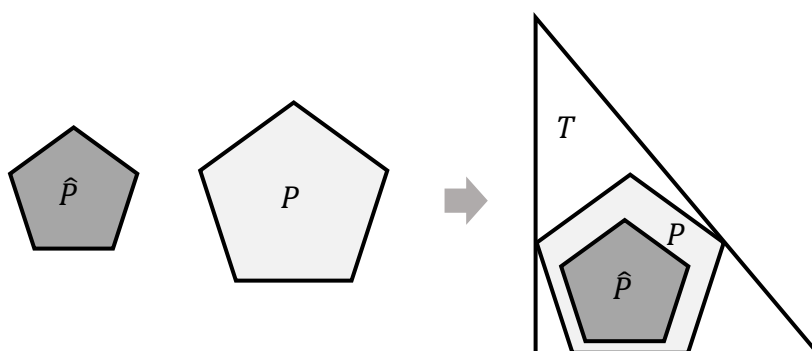
ในหัวข้อนี้ได้รวบรวมบทนิยาม และสมบัติต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักในหัวข้อ 3 ดังนี้

บทนิยาม 2.1 ให้ P และ T เป็นรูปเรขาคณิตใด ๆ เรากล่าวว่า P สามารถ บรรจุ ลงใน T ได้ ถ้าเราสามารถหมุนหรือเลื่อนขนาน P จนได้รูป P' และทำให้ $P' \subset T$ นั่นคือไม่มีส่วนของ P' ที่อยู่นอก T



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างการหมุนและเลื่อนขนานรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้บรรจุลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามบทนิยามที่ 2.1

ข้อสังเกต ถ้า P สามารถบรรจุลงใน T ได้ แล้วรูปที่คล้ายและเล็กกว่ารูป P จะต้องสามารถบรรจุลงใน T ได้เช่นกัน โดยวางไว้ภายในรูป P ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่คล้ายและเล็กกว่ารูป P ลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก T

เพื่อความสะดวกและลดความสับสนในบทความนี้ จะใช้สัญลักษณ์ $|\overline{AB}|$ แทน ความยาวของส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และโดยไม่เสียนัยทั่วไป เมื่อกล่าวถึงรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย ABC จะหมายถึงรูปสามเหลี่ยมที่มี $\hat{A}BC$ เป็นมุมฉาก $c = |\overline{BC}| \leq |\overline{AB}| = d$ และ $\hat{A}CB = \alpha$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นสมบัติพื้นฐานที่สามารถพิสูจน์โดยใช้ความรู้ทางตรีโกณมิติและพีชคณิตได้ ไม่ยากและใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 2.2 เส้นทแยงมุมของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาวด้าน a หน่วย จะมีความยาวเท่ากับ $2a \cos 36^\circ$ หน่วย

ทฤษฎีบท 2.3 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ และ $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

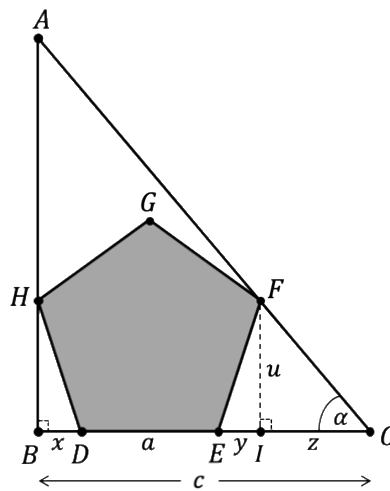
บทนิยาม 2.4 เราจะเรียก การหมุน หรือการเลื่อนขนาน หรือการประกอบกันของการหมุนและการเลื่อนขนานว่า *การเคลื่อนที่คงรูป (rigid motion)*

ทฤษฎีบท 2.5 [4] ให้ T เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ารูปหลายเหลี่ยมมุม P สามารถบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม T ได้ แล้วเราจะสามารถทำการเคลื่อนที่คงรูปกับรูป P จนทำให้มีด้านใดด้านหนึ่งของรูป P ทับกับด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม T ได้ โดยที่รูป P อยู่ในรูปสามเหลี่ยม T ตลอดการเคลื่อนที่คงรูปดังกล่าว

3. ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย จะได้ว่า รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า $DEFGH$ ที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถวางประชิดด้าน BC และบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ จะมีความยาวด้าน เท่ากับ $\frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \tan \alpha + \cos 18^\circ}$ หน่วย

บทพิสูจน์ จากรูปที่ 3.1 ลากเส้น FI มาตั้งฉากกับ BC ที่จุด I และให้ x, y, z และ u แทน $|BD|$, $|EI|$, $|IC|$ และ $|FI|$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.1

เนื่องจาก $\widehat{IEF} = \widehat{BDH} = 72^\circ$ และ $\widehat{HBD} = \widehat{FIE} = 90^\circ$ ดังนั้น $\widehat{IFE} = \widehat{BHD} = 18^\circ$

ทำให้ได้ว่า $x = y = a \sin 18^\circ$ และ $u = a \cos 18^\circ$

พิจารณา $\triangle CFI$ จะได้ว่า $\tan \alpha = \frac{u}{z}$

$$\text{ดังนั้น } z = \frac{a \cos 18^\circ}{\tan \alpha}$$

จากทฤษฎีบทที่ 2.3 จะได้ว่า $2 \cos 36^\circ = 2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) + 1 = 2 \sin 18^\circ + 1$

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่า

$$c = x + a + y + z = a \left(2 \sin 18^\circ + 1 + \frac{\cos 18^\circ}{\tan \alpha} \right) = a \left(\frac{2 \cos 36^\circ \tan \alpha + \cos 18^\circ}{\tan \alpha} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } a = \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \tan \alpha + \cos 18^\circ}$$

□

สำหรับการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยการวางประชิดด้าน $\overline{AB}$ หรือ $\overline{BC}$ นั้น เนื่องจากในกรณีที่ $\alpha \leq 54^\circ$ และ $\alpha > 54^\circ$ รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่พิจารณามีจุดที่ประชิดด้านที่เหลือเป็นคนละจุดกัน ดังนั้นการพิจารณาบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยการวางประชิดด้านดังกล่าวลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย จึงต้องพิจารณาแยกกรณี ดังแสดงในทฤษฎีบทที่ 3.2 และ 3.3

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย และ $DEFGH$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใหญ่ที่สุดซึ่งมีความยาวด้าน a หน่วย และบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้โดยวางประชิดด้าน $\overline{AB}$ จะได้ว่า

$$1) \text{ ถ้า } \alpha \leq 54^\circ \text{ แล้ว } a = \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + 2 \cos 36^\circ}$$

$$2) \text{ ถ้า } \alpha > 54^\circ \text{ แล้ว } a = \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ}$$

บทพิสูจน์

1) ให้ $\alpha \leq 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ จะต้องวางในลักษณะดังรูปที่ 3.2

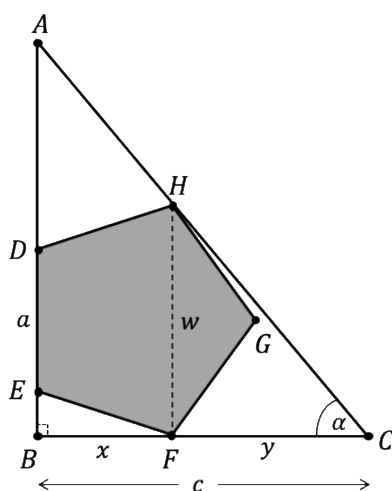
ให้ x, y และ w แทน $|\overline{BF}|, |\overline{FC}|$ และ $|\overline{HF}|$ ตามลำดับ

โดยทฤษฎีบทที่ 2.2 จะได้ว่า $w = 2a \cos 36^\circ$

จากรูปที่ 3.2 เห็นได้ชัดว่า $\overline{AB} \parallel \overline{HF}$ ดังนั้น $\triangle HFC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

พิจารณา $\triangle EBF$ และ $\triangle HFC$ จะได้ว่า $x = a \cos 18^\circ$ และ $\tan \alpha = \frac{w}{y}$ ตามลำดับ

$$\text{ดังนั้น } y = \frac{2a \cos 36^\circ}{\tan \alpha}$$

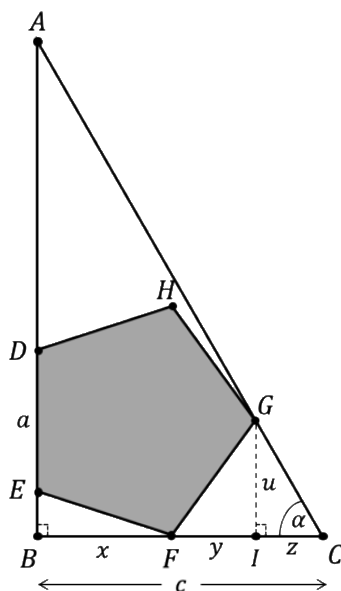


รูปที่ 3.2 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.2 1)

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่า $c = x + y = a \left(\frac{\cos 18^\circ \tan \alpha + 2 \cos 36^\circ}{\tan \alpha} \right)$

ดังนั้น $a = \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + 2 \cos 36^\circ}$ ตามต้องการ

2) ให้ $\alpha > 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ จะต้องวางในลักษณะดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.2 2)

จากรูปที่ 3.3 ลากเส้น $\overline{GI}$ มาตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด I และให้ x, y, z และ u แทน $|\overline{BF}|, |\overline{FI}|, |\overline{IC}|$ และ $|\overline{GI}|$ ตามลำดับ

พิจารณา $\triangle BFE$ จะได้ว่า $x = a \cos 18^\circ$

พิจารณา $\triangle FIG$ จะได้ว่า $\angle IFG = 180^\circ - \angle BFE - \angle GFE = 180^\circ - 18^\circ - 108^\circ = 54^\circ$

ดังนั้น $u = a \cos 36^\circ, y = a \sin 36^\circ$

พิจารณา $\triangle CIG$ จะได้ว่า $\tan \alpha = \frac{u}{z}$ ดังนั้น $z = \frac{a \cos 36^\circ}{\tan \alpha}$

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นว่า $c = x + y + z = a \left(\frac{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ}{\tan \alpha} \right)$

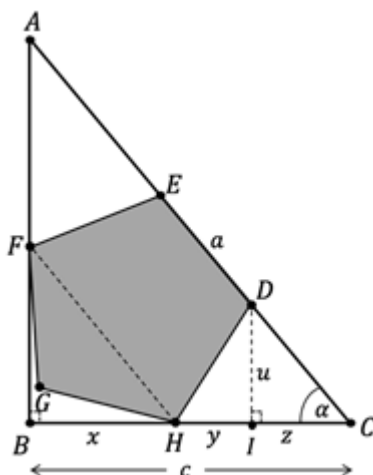
ดังนั้น $a = \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ}$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย และ $DEFGH$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใหญ่ที่สุดซึ่งมีความยาวด้าน a หน่วย และบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้โดยวางประชิดด้าน $\overline{AC}$ จะได้ว่า

- 1) ถ้า $\alpha \leq 54^\circ$ แล้ว $a = \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}$
- 2) ถ้า $\alpha > 54^\circ$ แล้ว $a = \frac{c \tan \alpha}{\cos(\alpha - 36^\circ) \tan \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}$

บทพิสูจน์

1) ให้ $\alpha \leq 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ จะต้องวางในลักษณะดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.3 1)

จากรูปที่ 3.4 ลากเส้น $\overline{DI}$ มาตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด I และให้ x, y, z และ u แทน $|\overline{BH}|$, $|\overline{HI}|$, $|\overline{IC}|$ และ $|\overline{DI}|$ ตามลำดับ

โดยทฤษฎีบทที่ 2.2 จะได้ว่า $|\overline{HF}| = 2a \cos 36^\circ$ และเห็นได้ชัดว่า $\overline{FH} \parallel \overline{AC}$ ดังนั้น $\widehat{BHF} = \alpha$

เพราะฉะนั้น $x = 2a \cos 36^\circ \cos \alpha$

จาก $\widehat{CHD} = 180^\circ - \widehat{HCD} - \widehat{CDH} = 180^\circ - \alpha - 72^\circ = 108^\circ - \alpha$

จะได้ว่า $y = a \cos(108^\circ - \alpha)$, $u = a \sin(108^\circ - \alpha)$ และ $\tan \alpha = \frac{u}{z}$

ดังนั้น $z = \frac{a \sin(108^\circ - \alpha)}{\tan \alpha}$

โดยสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า

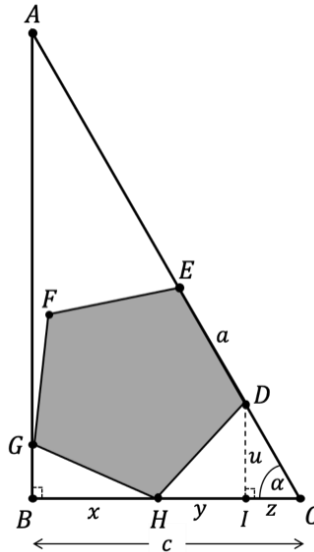
$$\begin{aligned} & \cos(108^\circ - \alpha) \tan \alpha + \sin(108^\circ - \alpha) \\ &= (\cos 108^\circ \cos \alpha + \sin 108^\circ \sin \alpha) \tan \alpha + \sin 108^\circ \cos \alpha - \cos 108^\circ \sin \alpha \\ &= \cos 108^\circ \sin \alpha + \sin 108^\circ \sin^2 \alpha \sec \alpha + \sin 108^\circ \cos \alpha - \cos 108^\circ \sin \alpha \\ &= \sin 108^\circ \sec \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \cos 18^\circ \sec \alpha \end{aligned}$$

จากรูปที่ 3.4 จะเห็นว่า $c = x + y + z = a \left(\frac{2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}{\tan \alpha} \right)$

เพราะฉะนั้น $a = \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}$ ตามต้องการ

2) ให้ $\alpha > 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ จะต้องวางในลักษณะ

ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.3 2)

จากรูปที่ 3.5 ลากเส้น $\overline{DI}$ มาตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด I และให้ x, y, z และ u แทน $|\overline{BH}|, |\overline{HI}|, |\overline{IC}|$ และ $|\overline{DI}|$ ตามลำดับ

$$\text{จาก } \widehat{CHD} = 180^\circ - \widehat{HCD} - \widehat{CDH} = 180^\circ - \alpha - 72^\circ = 108^\circ - \alpha$$

$$\text{จะได้ว่า } \widehat{BHG} = 180^\circ - 108^\circ - (108^\circ - \alpha) = \alpha - 36^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } x = a \cos(\alpha - 36^\circ), y = a \cos(108^\circ - \alpha) \text{ และ } z = \frac{a \sin(108^\circ - \alpha)}{\tan \alpha}$$

$$\text{เมื่อพิจารณาในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ข้อ 1) จะได้ว่า } y + z = \frac{a \cos 18^\circ \sec \alpha}{\tan \alpha}$$

$$\text{จากรูปที่ 3.5 จะเห็นว่า } c = x + y + z = a \left(\frac{\cos(\alpha - 36^\circ) \tan \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}{\tan \alpha} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } a = \frac{c \tan \alpha}{\cos(\alpha - 36^\circ) \tan \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha} \text{ ตามต้องการ} \quad \square$$

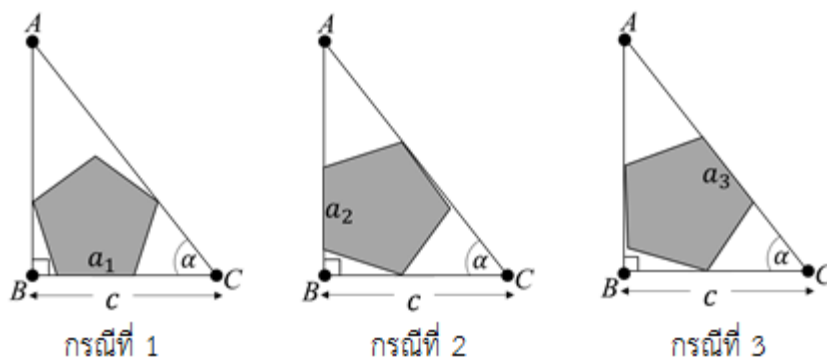
ทฤษฎีบท 3.4 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมายที่มี $\alpha \leq 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาวด้าน a หน่วย จะบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$a \leq \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}$$

บทพิสูจน์ โดยบทนิยามที่ 2.1 และทฤษฎีบทที่ 2.5 เราสามารถพิจารณาการวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมเฉพาะ 3 กรณีต่อไปนี้

- 1) วางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าประชิดด้าน BC หรือ
- 2) วางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าประชิดด้าน AB หรือ
- 3) วางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าประชิดด้าน AC

ให้ a_1, a_2 และ a_3 แทนความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถบรรจุลงใน $\triangle ABC$ ได้ในกรณีที่ 1) 2) และ 3) ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้บรรจุใน $\triangle ABC$ ได้ ในกรณีที่ $\alpha \leq 54^\circ$

จะเห็นว่า a_1, a_2 และ a_3 ถูกกำหนดโดยทฤษฎีบทที่ 3.1, 3.2 และ 3.3 ตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่า $a_1 < a_3$ และ $a_2 \leq a_3$

เนื่องจาก $\sqrt{10} + \sqrt{2} > 4\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ จะได้ว่า

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{2\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\cos 18^\circ}{2 \cos 36^\circ} = \frac{\cos 18^\circ (1 - \cos \alpha)}{2 \cos 36^\circ (1 - \cos \alpha)}$$

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมายที่ว่า $c = |BC| \leq |AB| = d$ ทำให้ได้ว่า $\alpha \geq 45^\circ$

และจาก sine เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ว่า

$$\sin \alpha \geq \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\cos 18^\circ (1 - \cos \alpha)}{2 \cos 36^\circ (1 - \cos \alpha)}$$

ดังนั้น

$$2 \cos 36^\circ \sin \alpha - 2 \cos 36^\circ \cos \alpha \sin \alpha > \cos 18^\circ - \cos 18^\circ \cos \alpha$$

$$2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \cos \alpha > 2 \cos 36^\circ \cos \alpha \sin \alpha + \cos 18^\circ$$

เพราะฉะนั้น

$$a_1 = \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \tan \alpha + \cos 18^\circ} < \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \sec \alpha + 2 \cos 36^\circ \sin \alpha} = a_3$$

โดยสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$2 \cos 36^\circ \cos 54^\circ = 2 \cos 36^\circ \sin 36^\circ = \sin 72^\circ = \cos 18^\circ$$

จากการที่ cosine เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ว่า

$$2 \cos 36^\circ \cos \alpha - \cos 18^\circ \geq 0$$

เนื่องจาก $\sin \alpha < 1$ จะได้ว่า $\sin \alpha (2 \cos 36^\circ \cos \alpha - \cos 18^\circ) \leq 2 \cos 36^\circ \cos \alpha - \cos 18^\circ$

ดังนั้น $2 \cos 36^\circ \sin \alpha \cos \alpha + \cos 18^\circ \leq \cos 18^\circ \sin \alpha + 2 \cos 36^\circ \cos \alpha$

$$2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha \leq \cos 18^\circ \tan \alpha + 2 \cos 36^\circ$$

เพราะฉะนั้น

$$a_3 = \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha} \geq \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + 2 \cos 36^\circ} = a_2$$

ในทางกลับกัน ให้ $a \leq \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \sin \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha}$ จะได้ว่า รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาว

ด้านเท่ากับ a จะสามารถบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้พอดี โดยบรรจุแบบกรณีที่ 3 $\square$

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมายที่มี $\alpha > 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาวด้าน a หน่วย จะบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$a \leq \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ}$$

บทพิสูจน์ ให้ a_1, a_2 และ a_3 แทน ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่บรรจุลงใน $\triangle ABC$ ได้ ในกรณีที่วางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าประชิดด้าน BC, AB และ AC ตามลำดับ และด้วยเหตุผลทำนองเดียวกันการพิสูจน์ในทฤษฎีบทที่ 3.4 การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้จะเหลือสิ่งที่ต้องแสดงเพียง $a_1 < a_2$ และ $a_3 \leq a_2$

เนื่องจาก $\cos 36^\circ - \cos 18^\circ < 0$ แต่ $2 \cos 36^\circ \tan \alpha (1 - \cos 18^\circ) \geq 0$

ดังนั้น $2 \cos 36^\circ \tan \alpha (1 - \cos 18^\circ) > \cos 36^\circ - \cos 18^\circ$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2 \cos 36^\circ \tan \alpha + \cos 18^\circ &> 2 \cos 36^\circ \cos 18^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ \\ &= (1 + 2 \sin 18^\circ) \cos 18^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ \\ &= \cos 18^\circ \tan \alpha + 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ \\ &= \cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$a_1 = \frac{c \tan \alpha}{2 \cos 36^\circ \tan \alpha + \cos 18^\circ} < \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ} = a_2$$

จาก $\alpha - 36^\circ > 18^\circ$ และ cosine เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ว่า $\cos(\alpha - 36^\circ) \leq \cos 18^\circ$ เนื่องจาก $\sin \alpha - 1 < 0$ จะได้ว่า

$$(\sin \alpha - 1) \cos(\alpha - 36^\circ) \geq (\sin \alpha - 1) \cos 18^\circ$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - 36^\circ) \sin \alpha + \cos 18^\circ &\geq \cos 18^\circ \sin \alpha + \cos(\alpha - 36^\circ) \\ &= \cos 18^\circ \sin \alpha + \sin 36^\circ \sin \alpha + \cos 36^\circ \cos \alpha \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos(\alpha - 36^\circ) \tan \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha \geq \cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ$$

ดังนั้น

$$a_3 = \frac{c \tan \alpha}{\cos(\alpha - 36^\circ) \tan \alpha + \cos 18^\circ \sec \alpha} \leq \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ} = a_2$$

ในทางกลับกัน ให้ $a \leq \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^\circ \tan \alpha + \sin 36^\circ \tan \alpha + \cos 36^\circ}$ จะได้ว่า รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีความยาวด้านเท่ากับ a จะสามารถบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้พอดี โดยบรรจุแบบกรณีที่วางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าประชิดด้าน AB □

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิที่พิจารณาบทความนี้ ซึ่งข้อเสนอแนะดังกล่าวเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้บทความฉบับนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] ชนกานันต์ เมทา. (2560). เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก. (วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรบัณฑิต, มหาวิทยาลัยนเรศวร).
Chanakantha Meta. (2017). *Necessary and sufficient conditions for fitting regular pentagon in the right triangle*. (Master's thesis, Naresuan University).
- [2] Wetzel, J. E. (2003). Fits and Covers. *Mathematics Magazine*, 76(5), p. 349 - 369.
- [3] Jepsen, C. H. and Vulpe, V. (2007). Fitting One Right Triangle in Another. *Mathematics Magazine*, 80(3), p. 203- 207.
- [4] Sullivan, J. M. (1996) *Polygon in Triangle: Generalizing a Theorem of Post*.
Retrieved from <http://torus.math.uiuc.edu/jms/papers/post.pdf>.