



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(700) มกราคม – เมษายน 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจสัน (1)

Evaluating Determinants by Jacobi's Method and

Dodgson's Condensation Method (1)

พิสมัย กิตติภูมิ^{1,*} และ ปาริชาติ ศรีรัตน์²

^{1,2}ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 90110

Pisamai Kittipoom^{1,*} and Parichat Srirat²

^{1,2}Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Prince of Songkla University,
Songkhla 90110

Email: ¹pisamai.k@psu.ac.th ²parichat74712@gmail.com

วันที่รับบทความ : 12 มิถุนายน 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 1 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 12 ธันวาคม 2562

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการศึกษาวิธีคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์โดยใช้วิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจสัน

คำสำคัญ: ตัวกำหนด โคแฟกเตอร์

ABSTRACT

This article demonstrates two methods for computing the determinant of a matrix: Jacobi method and Dodgson's condensation.

Keywords: Determinants, Cofactors

* ผู้เขียนหลัก

1. บทนำ

ตัวกำหนด (determinant) ของเมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด $n \times n$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนเวกเตอร์ตามหลัก $a_1, a_2, \dots, a_n$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $d(a_1, a_2, \dots, a_n)$ และสอดคล้องตามสัจพจน์สามข้อคือ การเป็นหนึ่งเดียวในแต่ละแถว (homogeneity in each row) การไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การบวกระหว่างแถว (invariance under row addition) และตัวกำหนดของเมทริกซ์เอกลักษณ์มีค่าเท่ากับ 1 (the determinant of the identity matrix is one)

ในระดับมัธยมศึกษา เรามีวิธีการที่ไม่ยุ่งยากและสูตรที่ง่ายในการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 แต่เมื่อเมทริกซ์มีขนาดใหญ่ขึ้น วิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดก็เริ่มซับซ้อนมากขึ้น โดยวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดที่นิยมใช้อย่างแพร่หลายและสามารถคำนวณได้กับเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ได้แก่ การหาตัวกำหนดโดยกระบวนการเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan process) และวิธีการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว (cofactor expansion)

ในบทความนี้ เรานำเสนอวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดที่นอกเหนือจากวิธีการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว วิธีที่หนึ่งเป็นผลงานของนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน คาร์ล กุสทาบ ยาโคบ ยาโคบี (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 - 1851) และวิธีที่สองเป็นผลงานชาวอังกฤษ ชาร์ล ลัตวิดจ์ ดอดจ์สัน (Charles Lutwidge Dodgson, 1832 - 1898) ซึ่งรู้จักกันในชื่อ วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน (Dodgson's condensation method) วิธีการนี้สามารถคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่ได้โดยง่ายและรวดเร็วกว่าวิธีการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยวและวิธีของยาโคบี นอกจากความสวยงามและไม่ซับซ้อนของวิธีการนี้แล้ว ประวัติและผลงานด้านอื่น ๆ ของดอดจ์สันยังสร้างความประทับใจให้คณะผู้เรียบเรียงไม่น้อย [1, 4] โดยผลงานที่มีชื่อเสียงของดอดจ์สันนั้นหาใช่ผลงานทางคณิตศาสตร์ หากเป็นผลงานการประพันธ์วรรณกรรมเยาวชน ที่ใช้นามปากกาว่า ลิววิซ แครโรล (Lewis Carroll) โดยผลงานที่ประสบความสำเร็จมากที่สุดและมีชื่อเสียงมาจนถึงปัจจุบันนี้ คือ อลิซในดินแดนมหัศจรรย์ (Alice in Wonderland)

ถึงแม้ในยุคปัจจุบันมีโปรแกรมสำเร็จรูปที่สามารถคำนวณค่าตัวกำหนดได้ในเสี้ยววินาที แต่เมื่อย้อนเวลาไปในคริสต์ศตวรรษที่ 19 ที่ไม่มีเครื่องคำนวณเหมือนในปัจจุบัน การคิดค้นวิธีการที่สามารถลดขั้นตอนในการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่จึงนับเป็นสิ่งที่ท้าทาย ซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาทฤษฎีและวิวัฒนาการในการคำนวณค่าตัวกำหนดได้จาก [2 - 5]

2. การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว

กำหนดให้ $A = [a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ $a_{i,j}$ เป็นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ตัวประกอบร่วมเกี่ยว หรือ โคแฟกเตอร์ ของ $a_{i,j}$ ของ A สำหรับ i, j ใด ๆ คือ $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$ โดยที่ $M_{i,j}$ เป็น ไมเนอร์ (minor) ของ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-1) \times (n-1)$ ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ในกรณีที่ไมเนอร์ i และ j จะเรียกว่า ตัวประกอบร่วมเกี่ยว หรือ โคแฟกเตอร์ ของ A

2.1 การกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว หรือการกระจายโคแฟกเตอร์ (cofactor expansion)

เป็นวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดของ A ผ่านผลบวกของโคแฟกเตอร์ของ A ซึ่งสามารถกระจายได้ในแต่ละแถว i ดังนี้

$$\det A = a_{i,1}C_{i,1} + a_{i,2}C_{i,2} + a_{i,3}C_{i,3} + \cdots + a_{i,n}C_{i,n}$$

หรือกระจายได้ในแต่ละหลัก j

$$\det A = a_{1,j}C_{1,j} + a_{2,j}C_{2,j} + a_{3,j}C_{3,j} + \cdots + a_{n,j}C_{n,j}$$

2.2 การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีของยาโคบี

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ $A = [a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

- $[a_{k:k+l, k:k+l}^*]$ เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีสมาชิกเป็น ส่วนที่ซ้ำ จากการตัดแถวและหลักที่สมมาตรคือ แถวและหลักที่ k ถึงแถวและหลักที่ $k+l$ โดยที่ $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $l \in \{0, 1, \dots, n-k\}$ ของเมทริกซ์ A เราเรียก $[a_{k:k+l, k:k+l}^*]$ ว่า ไมเนอร์ประกอบ (complementary minor) ของ A
- A' คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยว $[C_{i,j}]$ ของเมทริกซ์ A เราเรียก $A' = [C_{j,i}]$ ว่า แอดจูเกต (adjugate) ของ A
- $[a'_{k:k+l, k:k+l}]$ เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีสมาชิกเป็น ส่วนที่เหลือ จากการตัดแถวและหลักที่สมมาตรคือ แถวและหลักที่ k ถึงแถวและหลักที่ $k+l$ โดยที่ $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $l \in \{0, 1, \dots, n-k\}$ ของเมทริกซ์ A' เราเรียก $[a'_{k:k+l, k:k+l}]$ ว่า ไมเนอร์สอดคล้อง (corresponding minor) ของ A'

ตัวอย่าง 2.1 สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ แอดจูเกตของของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ คือ $\mathbf{A}' = [C_{j,i}] = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

เมื่อตัดแถวและหลักที่ 2 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่า

$$\text{ไมเนอร์ประกอบ } [a_{2,2}^*] = 2 \text{ และ ไมเนอร์สอดคล้อง } [a'_{2,2}] = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทยาโคบี) [5] ให้ $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ $n \geq 3$

ถ้า $[a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*]$ เป็น ไมเนอร์ประกอบขนาด $(n-m) \times (n-m)$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ โดยที่ $2 \leq m < n-1$ และ $[a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}]$ เป็น ไมเนอร์สอดคล้องขนาด $m \times m$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}'$ แล้ว

$$\det \mathbf{A} \det [a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}] = (\det \mathbf{A})^m \det [a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*] \quad (1)$$

ถ้า $\det \mathbf{A} \neq 0$ แล้ว

$$\det [a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}] = (\det \mathbf{A})^{m-1} \det [a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*] \quad (2)$$

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

เนื่องจากเวกเตอร์หลักของ $\mathbf{A}$ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น ตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$ จึงไม่เท่ากับศูนย์ และเนื่องจากขนาดของเมทริกซ์ $n=3$ ดังนั้นได้ค่า m ที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียวเท่านั้นคือ $m=2$ นั่นคือ จะต้องตัดแถวและหลักที่สมมาตรของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ได้จำนวน 1 แถว 1 หลัก เช่น ถ้าตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 2 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ดังในตัวอย่างที่ 2.1 จะได้ ไมเนอร์ประกอบ $[a_{2,2}^*] = 2$ และ ไมเนอร์สอดคล้อง $[a'_{2,2}] = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้นโดยสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ได้ว่า

$$\det [a'_{2,2}] = (\det \mathbf{A})^{2-1} \det [a_{2,2}^*]$$

นั่นคือ $\det \mathbf{A} = -12$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง การตัดแถวและหลักที่ไม่สมมาตรจะทำให้เราได้ค่าตัวกำหนดที่ไม่ถูกต้อง เช่น เมื่อตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ไมเนอร์ประกอบ $[a_{2,3}^*] = 1$ และ ไมเนอร์สอดคล้อง

$$[a'_{2,3}] = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } \frac{\det[a'_{2,3}]}{\det[a_{2,3}^*]} = \frac{36}{1} \neq \det \mathbf{A}$$

นอกจากนี้ การเลือกตัดแถวและหลักที่ไม่เหมาะสม เช่น การตัดแถวและหลักที่ 3 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ทำให้ได้ว่า ไมเนอร์ประกอบ $[a_{3,3}^*] = 0$ ซึ่งจะทำให้ไม่สามารถคำนวณค่า $\det \mathbf{A}$ โดยใช้สูตรของยาโคบีได้ ดังนั้น โดยวิธีของยาโคบี จำเป็นต้องเลือกตัดแถวและหลักที่ทำให้ได้ไมเนอร์ประกอบที่มีค่าตัวกำหนดไม่เท่ากับศูนย์ ในส่วนของไมเนอร์สอดคล้อง ที่ได้มาจากส่วนที่เหลือจากการตัดแถวและหลักของ $\mathbf{A}'$ ในทางปฏิบัติ ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่าสมาชิกทุกตัวใน $\mathbf{A}'$ โดยจะคำนวณค่าสมาชิกส่วนที่เหลือจากการตัดเท่านั้น

ตัวอย่าง 2.3 พิจารณาการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีที่ 1 โดยวิธีของยาโคบี เลือกตัดแถวที่ 3 และ 4 และหลักที่ 3 และ 4 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่า $m = 5 - 2 = 3$ ดังนั้น ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ

$$[a_{3:4,3:4}^*] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

และ ไมเนอร์สอดคล้องของ $\mathbf{A}'$ คือ

$$[a'_{3:4,3:4}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & C_{5,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & C_{5,2} \\ C_{1,5} & C_{2,5} & C_{5,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 16 & -6 \\ 39 & 12 & -6 \\ -23 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C_{j,i}$ คือ โคแฟกเตอร์ของ $\mathbf{A}$ ดังนั้น จากสูตร (2) ของทฤษฎียาโคบี ได้ว่า

$$\det[a'_{3:4,3:4}] = (\det \mathbf{A})^{3-1} \det[a_{3:4,3:4}^*]$$

เนื่องจาก $\det[a'_{3:4,3:4}] = 288$ และ $\det[a_{3:4,3:4}^*] = 2$ จะได้ว่า $(\det \mathbf{A})^2 = 144$

เนื่องจากค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์มีเพียงหนึ่งเดียว ดังนั้น การเลือกตัดแถวและหลักที่ทำให้ค่า m เป็นจำนวนเต็มบวกคือ และใช้สูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ในการหาค่าตัวกำหนด จึงเกิดปัญหาขึ้น ดังแสดงข้างต้น ด้วยเหตุนี้จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องแก้ปัญหานี้ โดยการเลือกตัวแถวและหลักที่ทำให้ค่า m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ดังจะแสดงในวิธีที่ 2

วิธีที่ 2 เลือกตัดแถวที่ 3 ถึง 5 และหลักที่ 3 ถึง 5 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่า $m = 5 - 3 = 2$

ดังนั้น ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ $[a_{3:5,3:5}^*] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ

$$\text{ไมเนอร์สอดคล้องของ } \mathbf{A} \text{ คือ } [a'_{3:5,3:5}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 16 \\ 39 & 12 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C_{j,i}$ คือ โคแฟกเตอร์ของ $\mathbf{A}$ ดังนั้น จากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ได้ว่า

$$\det[a'_{3:5,3:5}] = (\det \mathbf{A})^{2-1} \det[a_{3:5,3:5}^*]$$

$$\text{นั่นคือ } \det \mathbf{A} = \frac{\det[a'_{3:5,3:5}]}{\det[a_{3:5,3:5}^*]} = 12$$

นอกจากปัญหาค่าตัวกำหนดสองค่าที่เกิดจากการเลือกตัดแถวและหลัก ที่ทำให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกคือ แล้ววิธีของยาโคบียังล้มเหลวถ้าการเลือกตัดแถวและหลักทำให้ $\det[a_{k:k+n-m-1,k:k+n-m-1}^*] = 0$

3. การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีควบนั่นของดอดจ์สัน

วิธีควบนั่นเป็นการลดขนาดของเมทริกซ์ลงทีละหนึ่ง โดยผ่านการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่ได้จากสมาชิกในแถวที่ติดกันและหลักที่ติดกัน สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ขนาด $n \times n$ ให้ $\mathbf{B}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ควบนั่น ขนาด $(n-k) \times (n-k)$ ที่ได้จากการควบนั่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ในครั้งที่ k โดยที่ $k = 1, 2, \dots, n-1$ เช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ทำการควบนั่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะได้ เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(3)}$ ขนาด 3×3 ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(3)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 9 \\ 7 & -7 & -3 \\ -6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

ทั้งนี้สามารถควบแน่นเมทริกซ์ต่อไปจนได้เมทริกซ์ขนาด 1×1

ในวิธีการควบแน่น ไม่ว่าเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะมีขนาดเท่าใดก็ตาม การคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะมีขั้นตอนการคำนวณผ่านตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งเป็นการลดความยุ่งยากในการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีของยาโคบี

ในขั้นตอนของวิธีควบแน่นของดอดจ์สันที่จะกล่าวถึงต่อไป จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องรู้จัก $\text{int } \mathbf{A}$ ซึ่งเป็น เมทริกซ์ภายใน (interior matrix) ขนาด $(n-2) \times (n-2)$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่มีขนาด $n \times n$ โดยสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A}$ ได้มาจากการตัดแถวที่ 1 และ n และตัดหลักที่ 1 และ n ของ $\mathbf{A}$ เช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \quad \text{มีเมทริกซ์ภายใน คือ } \text{int } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

3.1 ขั้นตอนการคำนวณค่าตัวกำหนดโดยวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน [4]

ให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และสมาชิกของ $\text{int } \mathbf{A}^{(n-k)}$ ทุกตัวไม่เท่ากับศูนย์ การควบแน่นของดอดจ์สันมีขั้นตอนดังนี้

- 1) ให้ เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{A}^{(n)}$

ให้ $\mathbf{B}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-k) \times (n-k)$ ที่ได้จากการควบแน่นของเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(n-k+1)}$ ที่มีขนาด $(n-k+1) \times (n-k+1)$

- 2) การควบแน่นครั้งแรก ($k=1$) ให้ $\mathbf{A}^{(n-1)} = \mathbf{B}^{(n-1)}$ และ

สำหรับการควบแน่นครั้งที่ k โดยที่ $k=2, 3, \dots, n-1$ ให้ $\mathbf{A}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(n-k+1)}$ โดยที่สมาชิกในแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ดังกล่าวถูกหารด้วยสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A}^{(n-k+2)}$ ในตำแหน่งเดียวกัน เรียก $\mathbf{A}^{(n-k)}$ ว่า เมทริกซ์ควบแน่นครั้งที่ k ของ $\mathbf{A}$

- 3) ทำการควบแน่น $\mathbf{A}^{(n-k)}$ จนถึงครั้งที่ $k = n-1$ ซึ่งจะได้ $\mathbf{A}^{(1)}$ ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว ซึ่งโดยวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน จะได้ว่า สมาชิกตัวดังกล่าว คือ ค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

เริ่มต้นการควบแน่นครั้งที่ 1 ($k = 1$) โดยการควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(5)}$ ทำให้ได้ $\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \\ \hline \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ต่อมาทำการควบแน่นครั้งที่ 2 ($k = 2$) โดยควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(4)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(3)}$ ซึ่งใน

ขั้นตอนนี้จะมีการหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(3)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\text{int } \mathbf{A}^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ในตำแหน่ง

เดียวกัน ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(3)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ \hline -6 & 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 5 & -4 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -1 & 30 & 7 \\ -7 & -26 & 2 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{A}^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{4}{2} & \frac{0}{1} & \frac{-4}{-2} \\ -1 & \frac{30}{2} & \frac{7}{1} \\ \hline -1 & \frac{30}{2} & \frac{7}{1} \\ -7 & \frac{-26}{2} & \frac{2}{2} \\ \hline 1 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 15 & 7 \\ -7 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

ทำการควบนแน่นครั้งที่ 3 ($k=3$) โดยควบนแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(3)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(2)}$ และสามารถ

หารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(2)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\text{int } \mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(2)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 15 & 15 & 7 \\ \hline 1 & 15 & 15 & 7 \\ -7 & -13 & -13 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 30 & -30 \\ 92 & 106 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -23 & 53 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนสุดท้าย ทำการควบนแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(2)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(1)}$ และสามารถหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(1)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\text{int } \mathbf{A}^{(3)} = 15$ ทำให้ได้เมทริกซ์ควบนแน่น $\mathbf{A}^{(1)}$ ซึ่งคือ ค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{\text{int } \mathbf{A}^{(3)}} \det \mathbf{A}^{(2)} = \frac{318-138}{15} = 12$$

3.2 ข้อจำกัดของวิธีควบนแน่นของคอจส์สัน

สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่มีสมาชิกบางตำแหน่งใน $\text{int } \mathbf{A}$ มีค่าเป็นศูนย์ จะทำให้เกิดปัญหาขึ้นในการควบนแน่นครั้งที่สอง ซึ่งในขั้นนี้ต้องมีการหารสมาชิกในเมทริกซ์ที่ได้ด้วยสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A}$

ในตำแหน่งเดียวกัน อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหานี้สามารถทำได้โดยการสลับแถวหรือสลับหลักของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จนได้เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีศูนย์ใน $\text{int } \mathbf{A}$ เช่น

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ซึ่งพบว่ามีศูนย์ในเมทริกซ์ภายใน

$\text{int } \mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และจะทำให้เกิดปัญหาในกระบวนการควบแน่น ดังนั้นในการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้จะดำเนินการโดยสลับแถวที่ 3 และ 4 ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ดังนี้

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า เมทริกซ์ภายในของเมทริกซ์ใหม่ คือ $\text{int } \tilde{\mathbf{A}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จากนั้นทำการควบแน่นเมทริกซ์

$\tilde{\mathbf{A}}^{(4)}$ ทำให้ได้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$ ขนาด 3×3 ดังนี้

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(3)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -7 & -7 & -3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

ต่อมาทำการควบแน่นเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$ และหารสมาชิกแต่ละตำแหน่งด้วย $\text{int } \tilde{\mathbf{A}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(2)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & 7 & 9 \\ -7 & -7 & -7 & -3 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 2 \\ -7 & -7 & -7 & -3 \\ 6 & 9 & 9 & 5 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

ท้ายสุด ควบนแน่นเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}$ และหารสมาชิกแต่ละตำแหน่งด้วย $\text{int } \tilde{\mathbf{A}}^{(3)} = -7$ ทำให้ได้ค่าตัวกำหนดของ $\tilde{\mathbf{A}}$ คือ

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\text{int } \tilde{\mathbf{A}}^{(3)}} \det \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} = \frac{42}{-7} = -6$$

ดังนั้น $\det \mathbf{A} = -\det \tilde{\mathbf{A}} = 6$

อย่างไรก็ตาม วิธีการสลับแถวหรือหลัก เพื่อให้ได้เมทริกซ์ภายในที่ปราศจากค่าศูนย์นั้น อาจไม่

ประสบความสำเร็จสำหรับบางเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 ซึ่งไม่ว่าจะสลับแถวหรือ

หลักแบบใด ก็ยังคงมีศูนย์อยู่ในเมทริกซ์ภายใน ในตอนท้ายของหัวข้อถัดไป จะนำเสนอแนวทางการแก้ปัญหาของตัวอย่างนี้

4. เบื้องหลังความสำเร็จของวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน

พิจารณาเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ขนาด 4×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีของยาโคบี เลือกตัดแถวที่ 2 และ 3 และตัดหลักที่ 2 และ 3 จะได้ ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_{2,2}^* & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \text{int } \mathbf{A} \text{ และไมเนอร์สอดคล้องของ } \mathbf{A}' \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_{2,2,2,3}' \\ a_{2,3,2,3}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{4,1} \\ C_{1,4} & C_{4,4} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C_{j,i}$ คือ โคแฟกเตอร์ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยวิธีของยาโคบีอีกครั้ง โดยการตัดแถวและหลักที่บรรจุสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{M}_{j,i}$ จะได้ว่า

$$C_{1,1} = |\mathbf{A}_{2:4,2:4}| = \frac{1}{a_{3,3}} \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{3,3}} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{3,3}} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}$$

$$C_{4,1} = -|\mathbf{A}_{1:3,2:4}| = \frac{-1}{a_{2,3}} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{2,3}} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix}$$

$$C_{1,4} = -|\mathbf{A}_{2:4,1:3}| = \frac{-1}{a_{3,2}} \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{3,2}} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

และ

$$C_{4,4} = |\mathbf{A}_{1:4,1:4}| = \frac{1}{a_{2,2}} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{2,2}} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

จากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี จะได้ ตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ คือ

$$\det \mathbf{A} = \frac{\det \begin{bmatrix} a'_{2:3,2:3} \\ a^*_{2:3,2:3} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{4,1} \\ C_{1,4} & C_{4,4} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} C_{4,4} & -C_{4,1} \\ -C_{1,4} & C_{1,1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ a_{2,2} & \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} \\ a_{2,3} & \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad (3)$$

ทั้งนี้สามารถแจกแจงขั้นตอนการคำนวณในสมการ (3) ได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 คำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของ $\mathbf{A}$ และจัดเรียงเป็นเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

พบว่าเมทริกซ์ดังกล่าว คือ เมทริกซ์ควบนแน่น $\mathbf{A}^{(3)}$ ซึ่งได้จากการควบนแน่นครั้งที่ 1 ในวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน

ขั้นที่ 2 หาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ทุกตัวในเมทริกซ์ที่ได้จากขั้นที่ 1 และหารสมาชิกที่ได้ด้วยสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน ซึ่งจะได้ค่าของสมาชิกทั้งหมด

ในสมการ (3)

จะพบว่า ขั้นตอนนี้ตรงกับกระบวนการควบนแน่นครั้งที่ 2 ในวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน และไมเนอร์สอดคล้อง $[a'_{2:3,2:3}]$ คือ เมทริกซ์ควบนแน่น $\mathbf{A}^{(2)}$

ขั้นที่ 3 หาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่ได้จากขั้นที่ 2 และหารด้วย $|\text{int } \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$ ซึ่งจะได้ว่า

ค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$ คือ การควบนแน่นครั้งสุดท้ายของวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน

จากการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4 ข้างต้น พบว่า วิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน ได้มาจากการแจกแจงขั้นตอนในวิธีของยาโคบินั่นเอง โดยเงื่อนไขที่ทำให้วิธีของดอดจ์สันประสบความสำเร็จ คือ ต้องไม่มีการหารด้วยศูนย์เกิดขึ้นในกระบวนการ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์วิธีควบนแน่นของดอดจ์สันสำหรับเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ใด ๆ จะแสดงรายละเอียดในบทความการคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน ตอนที่ 2 ในวารสารคณิตศาสตร์ฉบับถัดไป

ในกรณีที่มีสมาชิกบางตัวใน $\text{int } \mathbf{A}$ เป็นศูนย์ เช่น ในตัวอย่าง 3.2 เราสามารถแก้ปัญหาได้โดยการสลับแถวหรือสลับหลัก เพื่อให้ $\text{int } \mathbf{A}$ ที่ไม่มีสมาชิกภายในเป็นศูนย์ แต่ในบางกรณีพบว่าไม่สามารถแก้ปัญหาโดยการสลับแถวหรือสลับหลักได้ ดังเช่นที่จะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1 พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

พบว่า ไม่สามารถสลับแถวหรือสลับหลัก เพื่อให้สมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A}$ ทุกตัวไม่เป็นศูนย์ แต่กระบวนการควบแน่นของดอดจ์สัน ยังคงสามารถดำเนินการได้ เพียงแต่ต้องแก้ไขในบางขั้นตอน การควบแน่นครั้งที่ 1 สามารถดำเนินการได้โดยไม่มีปัญหา และได้ผลดังนี้

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

แต่ในการควบแน่นครั้งที่ 2 พบว่า

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากต้องทำการหารด้วยสมาชิกในตำแหน่งที่ (2,1) ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(2)}$ ด้วยสมาชิก $a_{3,2}$ ใน $\text{int } \mathbf{A}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ($a_{3,2} = 0$) แต่เมื่อย้อนกลับพิจารณาการหาค่ากำหนดจากในสมการ (3)

โดยวิธีของยาโคบี จะได้ว่า $\mathbf{A}^{(2)} = [a'_{2:3,2:3}]$ เนื่องจาก $[a'_{2:3,2:3}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{4,1} \\ C_{1,4} & C_{4,4} \end{bmatrix}$ ดังนั้น สมาชิก $a_{2,1}^{(2)}$ ใน $\mathbf{A}^{(2)}$ คือ

$$a_{2,1}^{(2)} = C_{1,4} = |\mathbf{A}_{2:4,1:3}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

เราสามารถแก้ปัญหาจากการควบแน่นครั้งที่ 2 ได้ โดยการหาค่ากำหนดของ $\mathbf{A}^{(2)}$ จากค่าของ $C_{1,4}$

ซึ่งสามารถทำได้โดยการสลับแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของ $\mathbf{A}_{2:4,1:3}$ จะได้ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

จากนั้นตัดแถวที่ 2 และตัดหลักที่ 2 ของ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}$ ทำให้ได้ ไมเนอร์ประกอบ คือ $[\tilde{a}_{2,2}^*] = 1$ และ

ไมเนอร์สอดคล้อง $[\tilde{a}'_{2,2}] = \begin{bmatrix} \tilde{C}'_{1,1} & \tilde{C}'_{3,1} \\ \tilde{C}'_{1,3} & \tilde{C}'_{3,3} \end{bmatrix}$ โดยที่ $\tilde{C}'_{k,l}$ คือ โคแฟกเตอร์ขนาด 2×2 ของ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}$

และจากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี จะได้ว่า

$$a_{2,1}^{(2)} = -|\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}| = -\frac{\begin{vmatrix} \tilde{C}'_{1,1} & \tilde{C}'_{3,1} \\ \tilde{C}'_{1,3} & \tilde{C}'_{3,3} \end{vmatrix}}{1} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

นั่นคือ เมทริกซ์ควบนแน่นครั้งที่ 2 คือ $\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

จากนั้นทำการควบนแน่น $\mathbf{A}^{(2)}$ และหารด้วย $\text{int } \mathbf{A}^{(3)} = 2$ จะได้

$$\det \mathbf{A} = \frac{4}{2} = 2$$

ซึ่งเป็นค่าของตัวกำหนดที่ถูกต้องของ $\mathbf{A}$

6. สรุป

ในการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่ด้วยมือ ผู้ดำเนินการหามักมีกำลังใจ เมื่อพบว่าเมทริกซ์ที่ต้องคำนวณนั้นเต็มไปด้วยศูนย์ ซึ่งสามารถเลือกใช้กระบวนการลดรูปแบบเกาส์-จอร์แดน หรือการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว ในการหาค่าตัวกำหนดได้โดยไม่ยุ่งยาก แต่ถ้าเมื่อใดต้องหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่เต็มไปด้วยจำนวนที่ไม่ใช่ศูนย์ กระบวนการควบนแน่นของดอดจ์สันก็เป็นอีกวิธีการหนึ่งที่น่าสนใจ เนื่องจากมีขั้นตอนที่เรียบง่ายและไม่ซับซ้อน แต่ในทางกลับกัน จากสองตัวอย่างสุดท้าย พบว่าวิธีควบนแน่นของดอดจ์สันมีปัญหา เมื่อต้องคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่มีศูนย์อยู่ในตำแหน่งที่สำคัญ สำหรับวิธีของยาโคบี มีการคำนวณหาค่าตัวกำหนดผ่านค่าตัวกำหนดของไมเนอร์ประกอบและไมเนอร์สอดคล้อง แต่มีความยุ่งยากในการหาไมเนอร์สอดคล้อง วิธีการนี้จึงไม่เป็นที่รู้จักในวงกว้าง แต่เมื่อดอดจ์สันได้แจกแจงขั้นตอนเกี่ยวกับสูตรที่ได้จากวิธีของยาโคบี เขาจึงได้กระบวนในวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน แต่อย่างไรก็ตามวิธีของยาโคบีสามารถช่วยแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในวิธีการควบนแน่นของดอดจ์สันในบางกรณีได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] สุทัศน์ ยกส้าน (2549). *Lewis Carroll นักประพันธ์และนักคณิตศาสตร์ (ผู้ชอบเด็ก)*. สืบค้นจาก <https://mgronline.com/science/detail/9490000149281>.
Yoksan, S. (2006, December 4). *Lewis Carroll: The Novelist and Mathematician (Lolita Lover)*. Retrieved from <https://mgronline.com/science/detail/9490000149281>
- [2] Abeles, F. F. (2008). Dodgson Condensation: The Historical and Mathematical Development of an Experimental Method. *Linear Algebra and its Applications*, 429, p. 429 - 438.
- [3] Dodgson, C. L. (1866). Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values. *Proceedings of the Royal Society of London*, 15, p. 150 - 155.
- [4] Leggett, D., Perry, J. and Torrence, E. (2011). Computing Determinants by Double-Crossing. *The College Mathematics Journal*, 42, p. 43 - 54.
- [5] Rise, A. and Torrence, E. (2007). “Shutting up like a telescope”: Lewis Carroll's “Curious” Condensation Method for Evaluating Determinants. *The College Mathematics Journal*. 38, p. 85 - 95.