วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 64(699) กันยายน – ธันวาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n},\mathbf{1})$

Closed Knight's Tour on Ring Board $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n},\mathbf{1})$

รตินันท์ บุญเคลือบ ปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์ และ วสุพล ศรีโชติ

Ratinan Boonklurb[1], Punyaporn Sapworarit[2] and Wasupol Srichote[3]

[1, 2, 3]Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: [1]ratinan.b@chula.ac.th [2]pearpz1@gmail.com [3]wasupon4.4@hotmail.com

วันที่รับบทความ : 18 กรกฎาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 26 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 15 สิงหาคม 2562

บทคัดย่อ

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $m, n \geq 3$ กระดานวงแหวน $(m,n,1)$ เป็นกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีส่วนตรงกลางขนาด 1×1 ขาดหายไป บทความฉบับนี้ศึกษาเงื่อนไขที่รับประกันการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n,n,1)$ และกระดานวงแหวน $(m,m+4k,1)$ เมื่อ m เป็นจำนวนคี่ที่ $m \geq 11$ และ $k \geq 1$ และหากมีการเดินแบบปิดของม้าแล้วจะนำเสนอขั้นตอนวิธีในการเดินด้วย

คำสำคัญ: การเดินแบบปิดของม้า กระดานวงแหวน

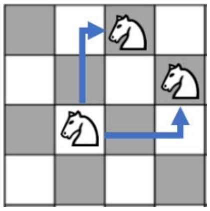
ABSTRACT

Let m, n be odd integers such that $m, n \geq 3$, the ring board $(m,n,1)$ is an $m \times n$ chessboard with the middle part of size 1×1 is missing. This article studies the conditions to guarantee the existence of a closed knight's tour on the ring board $(n,n,1)$ and the ring board $(m,m+4k,1)$ for odd integers m such that $m \geq 11$ and $k \geq 1$ and if it exists, then an algorithm for finding a closed knight's tour on that board is given.

Keywords: Closed knight's tour, Ring board

1. บทนำ

การเดินของม้าบนกระดานหมากรุกเป็นเรื่องที่น่าสนใจในทางคณิตศาสตร์ โดยม้าจะเดินไปในแนวนอนหรือแนวตั้งจำนวนสองช่องแล้วหมุนในระนาบเดียวกัน 90 องศากับแนวเดิมและเดินต่อไปอีกหนึ่งช่อง ดังรูป



รูปที่ 1.1 การเดินของม้าจากจุดที่กำหนดบนกระดานหมากรุกขนาด 4×4

โดยทั่วไปกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานจะเป็นกระดานหมากรุกขนาด 8×8 ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเรียงต่อกัน 8 แถว แถวละ 8 รูป ต่อมานักคณิตศาสตร์ได้ขยายการเดินของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด 8×8 ไปสู่การเดินของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเรียงต่อกัน m แถว แถวละ n รูป และทาแต่ละช่องด้วยสีขาวและสีดำสลับกันไป

สำหรับกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ถ้ากำหนดให้แต่ละช่องมีตำแหน่งเป็น (i,j) ในลักษณะเดียวกับการกำหนดตำแหน่งสมาชิกของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้วจะได้ว่าม้าที่อยู่ในตำแหน่ง (i,j) จะสามารถเลือกเดินไปได้ 1 ช่องจากอย่างมาก 8 ช่อง โดยอาจไปอยู่ในตำแหน่ง $(i \pm 1, j \pm 2)$ หรือ $(i \pm 2, j \pm 1)$ สังเกตว่าการเดินของม้าในแต่ละครั้ง จะเดินจากช่องสีขาวไปยังช่องสีดำ หรือช่องสีดำไปยังช่องสีขาวเท่านั้น

การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ คือ การเดินของม้าโดยที่ม้าเดินไปทุกช่องของกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ เพียงหนึ่งครั้ง แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้น ดังนั้นจากข้อสังเกต

เกี่ยวกับการเดินของม้าทำให้ได้ว่า ถ้าจำนวนช่องสีขาวและช่องสีดำบนกระดานหมากรุกที่พิจารณามีจำนวนไม่เท่ากัน แล้วจะไม่สามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกดังกล่าวได้

ในปี ค.ศ. 1991 Schwenk [2] ได้เผยแพร่เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 [2] บนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ โดยที่ $m \leq n$ จะมีการเดินแบบปิดของม้าได้ ยกเว้นถ้าเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

a) m และ n เป็นจำนวนคี่ทั้งคู่ หรือ

b) $m = 1$ หรือ 2 หรือ 4 หรือ

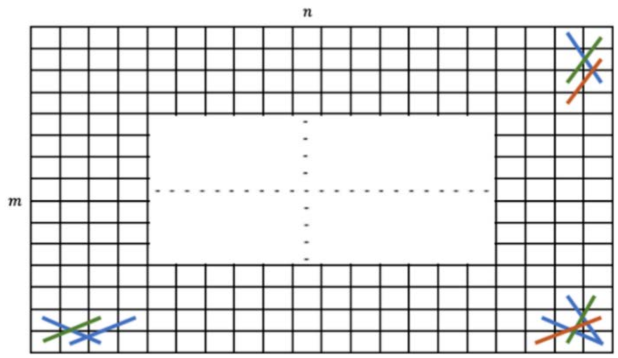
c) $m = 3$ และ $n = 4$ หรือ 6 หรือ 8

นอกจากนี้ Schwenk [2] ยังพิสูจน์ว่า ถ้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ มีการเดินแบบปิดของม้าแล้วจะได้ว่าสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าที่ผ่านระหว่างตำแหน่งสองตำแหน่งบนกระดานดังกล่าวทั้งหมด 10 คู่ ที่เราสามารถระบุตำแหน่งคู่เหล่านั้นได้เสมอ

ทฤษฎีบท 1.2 [2] สำหรับกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีการเดินแบบปิดของม้า เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าที่ผ่านช่องบนกระดานหมากรุกนั้น 10 คู่ คือ

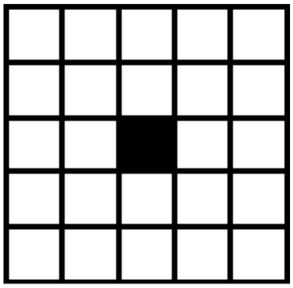
$$(1, n-1) \text{ - } (3, n),\ (m-2, n-1) \text{ - } (m, n),\ (m-1, 1) \text{ - } (m, 3),\ (m-1, n-2) \text{ - } (m, n),$$
$$(4, n-1) \text{ - } (2, n),\ (1, n) \text{ - } (3, n-1),\ (m-2, n) \text{ - } (m, n-1),\ (m, 1) \text{ - } (m-1, 3),$$
$$(m, n-2) \text{ - } (m-1, n) \text{ และ } (m, 2) \text{ - } (m-1, 4)$$

ได้เสมอ



รูปที่ 1.2 ตำแหน่งสองตำแหน่งทั้งหมด 10 คู่ ตามทฤษฎีบท 1.2 บนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีการเดินแบบปิดของม้า

ต่อมานักวิจัยบางท่านได้หันไปให้ความสนใจกับการเดินของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่รูตรงกลางขนาด $r \times r$ โดยที่ $m,\ n,\ r$ เป็นจำนวนเต็มที่ $r \geq 1$ และ $m,\ n > 2r$ ซึ่งเรียกกระดานแบบนี้ว่า *กระดานวงแหวน* (m, n, r)



รูปที่ 1.3 ตัวอย่างกระดานวงแหวน (5,5,1)

สำหรับกรณีเฉพาะที่ $m = n$ จะเห็นว่าเหนือรูขนาด $r \times r$ จะมีช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่จำนวน $\frac{n-r}{2}$ แถว ซึ่งเราเรียกว่าความหนาของกระดานวงแหวน (n, n, r) เช่น ในรูป 1.3 จะเห็นว่ากระดานวงแหวน $(5, 5, 1)$ มีความหนาเป็น 2

ในปี ค.ศ. 1996 Wiitala [3] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (n, n, r) ที่มีความหนาเป็น 2 ซึ่งได้ผลการศึกษาดังนี้

ทฤษฎีบท 1.3 [3] ไม่มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (n, n, r) ที่มีความหนาเป็น 2 เมื่อ $n \geq 5$

บทความฉบับนี้จะศึกษาเงื่อนไขเกี่ยวกับการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่บางจำนวน โดยการแบ่งกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ออกเป็นส่วน ๆ แล้วพิจารณาการเดินของม้าในส่วนเหล่านั้นและพยายามหาทางเชื่อมต่อกันจนเป็นการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ที่สมบูรณ์

2. การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

กรณี 1 เมื่อ $n = 3$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(3, 3, 1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.1 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

1	6	3
4		8
7	2	5

รูปที่ 2.1 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(3, 3, 1)$

กรณี 2 เมื่อ $n = 5$ จากรูป 1.3 กระดานวงแหวน $(5, 5, 1)$ มีความหนาเป็น 2 ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.3 จะได้ว่าไม่มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

กรณี 3 เมื่อ $n = 7$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(7, 7, 1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.2 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

10	7	2	5	20	13	22
1	4	9	12	23	16	19
8	11	6	3	18	21	14
41	48	39		15	24	17
38	45	42	27	30	35	32
43	40	47	36	33	28	25
46	37	44	29	26	31	34

รูปที่ 2.2 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(7, 7, 1)$

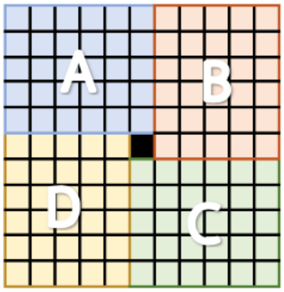
กรณี 4 เมื่อ $n = 9$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(9, 9, 1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.3 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

กรณี 5 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่บวกที่ $n \geq 11$ เราแบ่งกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ออกเป็นกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ เท่า ๆ กันจำนวน 2 กระดาน และกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ เท่า ๆ กันจำนวน 2 กระดาน ตามแนวเส้นขอบของรูขนาด 1×1 ของกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$

5	10	17	12	27	34	23	38	25
18	13	4	9	22	39	26	33	30
3	6	11	16	35	28	31	24	37
14	19	8	1	40	21	36	29	32
7	2	15	20		60	55	42	47
72	69	76	61	80	41	48	59	54
77	64	71	68	75	56	51	46	43
70	73	66	79	62	49	44	53	58
65	78	63	74	67	52	57	50	45

รูปที่ 2.3 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(9,9,1)$

ดังตัวอย่างการแบ่งกระดานวงแหวน $(11,11,1)$ ออกเป็น 4 กระดานในรูป 2.4 โดยจะเรียกกระดานหมากรุกย่อยตำแหน่งซ้ายบนว่ากระดาน A และเรียกกระดานย่อยกระดานอื่น ๆ ตามทิศทางตามเข็มนาฬิกาว่ากระดาน B, C และ D ตามลำดับ



รูปที่ 2.4 แนวการแบ่งกระดานวงแหวน $(11,11,1)$ ออกเป็น 4 กระดาน

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 11$ ดังนั้น $\frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ติดกัน ทำให้ $\frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ไม่ได้ นั่นคือ กระดานหมากรุกขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข a) ของทฤษฎีบท 1.1 ยิ่งไปกว่านั้นเรายังได้ว่า $\frac{n-1}{2} \geq 5$ นั่นคือ กระดานหมากรุกขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข b) และ c) ของทฤษฎีบท 1.1

จึงสรุปได้ว่า กระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ และกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ เหล่านี้ มีการเดินแบบปิดของม้าเสมอ

ต่อไป เพื่อให้ง่ายต่อการขยายแนวคิดในภายหลัง สำหรับกรณีนี้ เราจะใช้สัญลักษณ์ n แทนจำนวนแถวของกระดานวงแหวน $(n,n,1)$ และ $\bar{n}$ แทนจำนวนหลักของกระดานวงแหวน $(n,n,1)$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.2 จะได้ว่า มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ ดังนี้

$$\left(1,\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_A - \left(3,\frac{\bar{n}+1}{2}\right)_A \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2},2\right)_A - \left(\frac{n-3}{2},4\right)_A$$

มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ ดังนี้

$$(2,1)_B - (4,2)_B \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2},\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_B - \left(\frac{n+1}{2},\frac{\bar{n}-5}{2}\right)_B$$

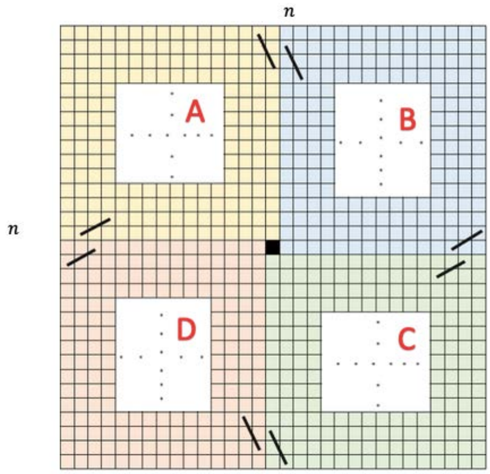
มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ ดังนี้

$$\left(1,\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_C - \left(2,\frac{\bar{n}-5}{2}\right)_C \text{ และ } \left(\frac{n-5}{2},1\right)_C - \left(\frac{n-1}{2},2\right)_C$$

และมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ ดังนี้

$$(1,3)_D - (2,1)_D \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2},\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_D - \left(\frac{n-5}{2},\frac{\bar{n}-3}{2}\right)_D$$

ทั้งนี้ในความเป็นจริงแล้วหากหมุนกระดาน B และกระดาน D ไป 90 องศาในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะได้ว่าตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดานทั้งสอง คือ ตำแหน่งเดียวกันกับตำแหน่งทั้ง 2 คู่บนกระดาน A และกระดาน C ตามลำดับ ดังรูป 2.5



รูปที่ 2.5 การเดินของม้าที่ผ่านตำแหน่ง 2 คู่ ของกระดาน A, B, C และ D

จะเห็นว่าม้าสามารถเดินข้ามกระดานย่อยทั้งสี่ที่แบ่งออกมาได้โดย

เดินข้ามระหว่างกระดาน A ไปกระดาน B ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(1,\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_A \text{ - } (2,1)_B \text{ และ } (4,2)_B \text{ - } \left(3,\frac{\bar{n}+1}{2}\right)_A$$

เดินม้าข้ามระหว่างกระดาน B ไปกระดาน C ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(\frac{n-1}{2},\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_B \text{ - } \left(1,\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_C \text{ และ } \left(2,\frac{\bar{n}-5}{2}\right)_C \text{ - } \left(\frac{n+1}{2},\frac{\bar{n}-5}{2}\right)_B$$

และเดินม้าข้ามระหว่างกระดาน C ไปกระดาน D ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

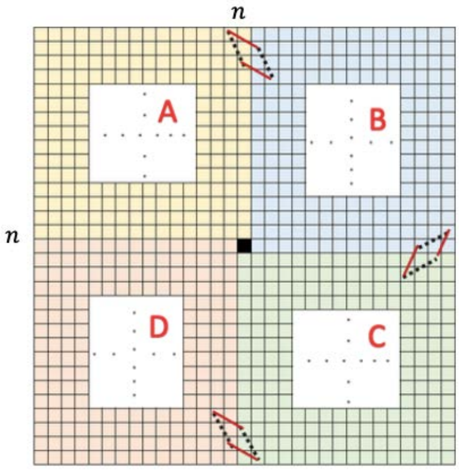
$$\left(\frac{n-1}{2},2\right)_C \text{ - } \left(\frac{n-1}{2},\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_D \text{ และ } \left(\frac{n-5}{2},\frac{\bar{n}-3}{2}\right)_D \text{ - } \left(\frac{n-5}{2},1\right)_C$$

ดังนั้นจะได้ว่าการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n,n,1)$ ทำได้โดย ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ดังกล่าว บนกระดาน B และ กระดาน C และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $\left(1,\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_A$ - $\left(3,\frac{\bar{n}+1}{2}\right)_A$ บนกระดาน A และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $\left(\frac{n-1}{2},\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_D$ - $\left(\frac{n-5}{2},\frac{\bar{n}-3}{2}\right)_D$ บนกระดาน D

ต่อมาเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(1,\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2,1)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n+1}{2},\frac{\bar{n}-5}{2}\right)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(2,\frac{\bar{n}-5}{2}\right)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2},2\right)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2},\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2},\frac{\bar{n}-3}{2}\right)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2},1\right)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(1,\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2},\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4,2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $\left(3,\frac{\bar{n}+1}{2}\right)_A$ สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น

รูป 2.6 ด้านล่างนี้แสดงการยกเลิกการเดินบนกระดานต่าง ๆ ตามการอธิบายข้างต้นด้วยเส้นประและแสดงเส้นทางการเดินเชื่อมระหว่างกระดานย่อย ๆ ทั้งสี่ด้วยเส้นทึบ



รูปที่ 2.6 การเดินของม้าที่ยกเลิกไปและการเดินของม้าเชื่อมระหว่างกระดาน

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณากระดานวงแหวน $(11, 11, 1)$ เริ่มจากการแบ่งกระดานวงแหวน $(11, 11, 1)$ ออกเป็นกระดานย่อย ๆ ขนาด 5×6 และ 6×5 อย่างละ 2 กระดาน ซึ่งจะสามารถหาเส้นทางเดินแบบปิดของม้าในแต่ละกระดานย่อย 4 กระดานได้ดังรูป 2.7 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานย่อยต่าง ๆ

1_A	10_A	5_A	20_A	25_A	16_A	29_B	22_B	11_B	4_B	1_B
4_A	21_A	2_A	17_A	6_A	19_A	12_B	3_B	30_B	21_B	10_B
11_A	30_A	9_A	24_A	15_A	26_A	23_B	28_B	9_B	2_B	5_B
22_A	3_A	28_A	13_A	18_A	7_A	8_B	13_B	24_B	17_B	20_B
29_A	12_A	23_A	8_A	27_A	14_A	27_B	18_B	15_B	6_B	25_B
16_D	19_D	26_D	7_D	14_D		14_B	7_B	26_B	19_B	16_B
25_D	6_D	15_D	18_D	27_D	14_C	27_C	8_C	23_C	12_C	29_C
20_D	17_D	24_D	13_D	8_D	7_C	18_C	13_C	28_C	3_C	22_C
5_D	2_D	9_D	28_D	23_D	26_C	15_C	24_C	9_C	30_C	11_C
10_D	21_D	30_D	3_D	12_D	19_C	6_C	17_C	2_C	21_C	4_C
1_D	4_D	11_D	22_D	29_D	16_C	25_C	20_C	5_C	10_C	1_C

รูปที่ 2.7 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานย่อยทั้งสี่

ต่อมายกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ คือ $(2, 1)_B$ - $(4, 2)_B$, $(5, 5)_B$ - $(6, 3)_B$, $(1, 5)_C$ - $(2, 3)_C$ และ $(3, 1)_C$ - $(5, 2)_C$ บนกระดาน B และ กระดาน C ตามลำดับ และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $(1, 5)_A$ - $(3, 6)_A$ บนกระดาน A และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $(5, 5)_D$ – $(3, 4)_D$ บนกระดาน D

แล้วเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $(1,5)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2,1)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(6,3)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(2,3)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(5,2)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $(5,5)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $(3,4)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $(3,1)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(1,5)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $(5,5)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4,2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $(3,6)_A$

สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป 2.8

1_A	10_A	5_A	20_A	25_A	16_A	29_B	22_B	11_B	4_B	1_B
4_A	21_A	2_A	17_A	6_A	19_A	12_B	3_B	30_B	21_B	10_B
11_A	30_A	9_A	24_A	15_A	26_A	23_B	28_B	9_B	2_B	5_B
22_A	3_A	28_A	13_A	18_A	7_A	8_B	13_B	24_B	17_B	20_B
29_A	12_A	23_A	8_A	27_A	14_A	27_B	18_B	15_B	6_B	25_B
16_D	19_D	26_D	7_D	14_D		14_B	7_B	26_B	19_B	16_B
25_D	6_D	15_D	18_D	27_D	14_C	27_C	8_C	23_C	12_C	29_C
20_D	17_D	24_D	13_D	8_D	7_C	18_C	13_C	28_C	3_C	22_C
5_D	2_D	9_D	28_D	23_D	26_C	15_C	24_C	9_C	30_C	11_C
10_D	21_D	30_D	3_D	12_D	19_C	6_C	17_C	2_C	21_C	4_C
1_D	4_D	11_D	22_D	29_D	16_C	25_C	20_C	5_C	10_C	1_C

รูปที่ 2.8 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดานย่อย

เมื่อเรานำมาเรียงเขียนแนวการเดินทั้งกระดานใหม่จะได้ดังรูป 2.9 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวน $(11,11,1)$

นอกจากนี้ เมื่อเรายกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดาน B และกระดาน C และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ บนกระดาน A และกระดาน D ตามที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว เราอาจหาเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าอีกเส้นทางหนึ่ง โดยเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(1,\frac{\bar{n}-1}{2}\right)_A$ แล้ว

1	10	5	20	25	16	39	106	27	34	37
4	21	2	17	6	19	26	35	38	107	28
11	120	9	24	15	116	105	40	29	36	33
22	3	118	13	18	7	30	115	104	111	108
119	12	23	8	117	14	41	110	113	32	103
82	79	72	61	84		114	31	42	109	112
73	62	83	80	71	44	87	98	53	102	89
78	81	74	85	60	97	48	43	88	93	52
63	66	59	70	75	86	45	54	99	90	101
58	77	68	65	56	49	96	47	92	51	94
67	64	57	76	69	46	55	50	95	100	91

รูปที่ 2.9 การเดินของม้าบนกระดานวงแหวน $(11, 11, 1)$

เดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2, 1)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{\bar{n}-1}{2}\right)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(1, \frac{\bar{n}-1}{2}\right)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{\bar{n}-1}{2}\right)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2}, \frac{\bar{n}-3}{2}\right)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2}, 1\right)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(2, \frac{\bar{n}-5}{2}\right)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{\bar{n}-5}{2}\right)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4, 2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $\left(3, \frac{\bar{n}+1}{2}\right)_A$ สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงเส้นทางเดินแบบปิดของม้าอีกเส้นทางหนึ่งที่ได้นำเสนอ

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณากระดานวงแหวน $(13, 13, 1)$ ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่า เส้นประที่แสดงในรูป คือ เส้นทางที่ม้าจะเดินข้ามระหว่างกระดานย่อยทั้งสี่ และตัวเลขที่กำกับ หมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานย่อยต่าง ๆ

1_A	12_A	27_A	30_A	19_A	14_A	17_A	38_B	41_B	36_B	11_B	28_B	1_B
28_A	25_A	2_A	13_A	16_A	31_A	20_A	35_B	10_B	39_B	42_B	25_B	12_B
11_A	42_A	29_A	26_A	3_A	18_A	15_A	40_B	37_B	24_B	29_B	2_B	27_B
36_A	39_A	24_A	5_A	8_A	21_A	32_A	9_B	34_B	5_B	26_B	13_B	30_B
41_A	10_A	37_A	34_A	23_A	4_A	7_A	6_B	23_B	8_B	3_B	16_B	19_B
38_A	35_A	40_A	9_A	6_A	33_A	22_A	33_B	4_B	21_B	18_B	31_B	14_B
17_D	20_D	15_D	32_D	7_D	22_D		22_B	7_B	32_B	15_B	20_B	17_B
14_D	31_D	18_D	21_D	4_D	33_D	22_C	33_C	6_C	9_C	40_C	35_C	38_C
19_D	16_D	3_D	8_D	23_D	6_D	7_C	4_C	23_C	34_C	37_C	10_C	41_C
30_D	13_D	26_D	5_D	34_D	9_D	32_C	21_C	8_C	5_C	24_C	39_C	36_C
27_D	2_D	29_D	24_D	37_D	40_D	15_C	18_C	3_C	26_C	29_C	42_C	11_C
12_D	25_D	42_D	39_D	10_D	35_D	20_C	31_C	16_C	13_C	2_C	25_C	28_C
1_D	28_D	11_D	36_D	41_D	38_D	17_C	14_C	19_C	30_C	27_C	12_C	1_C

รูปที่ 2.10 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดานย่อย

ซึ่งจะนำมาเรียงเขียนแนวการเดินทั้งกระดานได้ดังรูป 2.11 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวน $(13, 13, 1)$

1	12	153	156	145	14	143	18	21	16	33	134	23
154	151	2	13	142	157	146	15	32	19	22	131	34
11	168	155	152	3	144	141	20	17	130	135	24	133
162	165	150	5	8	147	158	31	140	27	132	35	136
167	10	163	160	149	4	7	28	129	30	25	122	125
164	161	166	9	6	159	148	139	26	127	124	137	36
83	86	81	98	73	88		128	29	138	121	126	123
80	97	84	87	70	99	108	119	50	53	42	37	40
85	82	69	74	89	72	51	48	109	120	39	54	43
96	79	92	71	100	75	118	107	52	49	110	41	38
93	68	95	90	61	64	101	104	47	112	115	44	55
78	91	66	63	76	59	106	117	102	57	46	111	114
67	94	77	60	65	62	103	58	105	116	113	56	45

รูปที่ 2.11 การเดินของม้าบนกระดานวงแหวน $(13, 13, 1)$

3. สรุปและอภิปรายผล

ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่ากระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ มี $n^2 - 1$ ช่อง ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ทำให้ช่องสีขาวและช่องสีดำมีจำนวนไม่เท่ากัน จากข้อสังเกตในหัวข้อที่ 1 ทำให้ได้ว่าไม่มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจากการวิเคราะห์ในหัวข้อ 2 ทำให้สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับจำนวนนับ n ที่ $n \geq 2$ จะมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \neq 5$

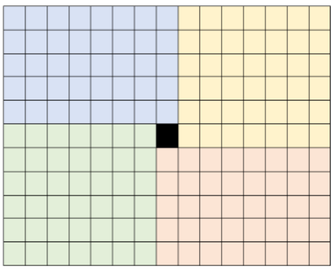
จากหัวข้อที่ 2 แม้ว่าจะมีตำแหน่งที่แน่นอนในการแบ่งกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ และตำแหน่งที่แน่นอนในการเดินข้ามระหว่างกระดานย่อยที่แบ่งแล้ว แต่สิ่งที่ยังคงยุ่งยาก คือ การหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานย่อย ๆ เหล่านั้น อย่างไรก็ดีหากสังเกตจากตัวอย่าง 2.1 และ 2.2 จะเห็นว่าหากได้ทางเดินแบบปิดของม้าบนกระดานย่อยกระดานหนึ่งแล้ว สามารถนำมาหมุนหรือพลิกเพื่อสร้างเป็นทางเดินแบบปิดของม้าบนกระดานย่อยที่เหลือได้

ยิ่งไปกว่านั้นหากขยายแนวคิดไปสู่กระดานวงแหวน $(m, m+4k, 1)$ เมื่อ $m \geq 11$ และ $k \geq 0$ จะสามารถแบ่งกระดานวงแหวน $(m, m+4k, 1)$ ออกเป็นสี่ส่วน แล้วเปลี่ยนตัวแปร n และ $\bar{n}$ ในกรณี 5 ของหัวข้อที่ 2 เป็น m และ $m+4k$ ตามลำดับ ก็จะได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้ ซึ่งถือเป็นภาคขยายส่วนหนึ่งของทฤษฎีบท 3.1

ทฤษฎีบท 3.2 สำหรับจำนวนเต็มคี่ m ที่ $m \geq 11$ และจำนวนเต็ม k ที่ $k \geq 0$ จะมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, m+4k, 1)$

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณากระดานวงแหวน $(11, 15, 1)$ นั่นคือ $m = 11$ และ $k = 1$

เริ่มต้นแบ่งกระดานวงแหวน $(11, 15, 1)$ เป็นกระดานย่อยขนาด 5×8 จำนวน 2 กระดาน และกระดานย่อยขนาด 6×7 จำนวน 2 กระดาน ดังรูป 3.1



รูปที่ 3.1 แนวการแบ่งกระดานวงแหวน $(11, 15, 1)$

จะสามารถหาเส้นทางเดินม้าแบบปิดในแต่ละกระดานย่อย 4 กระดาน ได้ดังรูป 3.2 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานย่อยต่าง ๆ

1_A	36_A	5_A	10_A	29_A	24_A	17_A	12_A	1_B	8_B	19_B	34_B	3_B	10_B	17_B
4_A	9_A	2_A	37_A	16_A	11_A	30_A	25_A	20_B	35_B	2_B	9_B	18_B	33_B	4_B
35_A	40_A	21_A	6_A	23_A	28_A	13_A	18_A	7_B	42_B	27_B	36_B	5_B	16_B	11_B
8_A	3_A	38_A	33_A	20_A	15_A	26_A	31_A	28_B	21_B	6_B	15_B	26_B	37_B	32_B
39_A	34_A	7_A	22_A	27_A	32_A	19_A	14_A	41_B	14_B	23_B	30_B	39_B	12_B	25_B
38_D	31_D	24_D	13_D	40_D	29_D	22_D		22_B	29_B	40_B	13_B	24_B	31_B	38_B
25_D	12_D	39_D	30_D	23_D	14_D	41_D	14_C	19_C	32_C	27_C	22_C	7_C	34_C	39_C
32_D	37_D	26_D	15_D	6_D	21_D	28_D	31_C	26_C	15_C	20_C	33_C	38_C	3_C	8_C
11_D	16_D	5_D	36_D	27_D	42_D	7_D	18_C	13_C	28_C	23_C	6_C	21_C	40_C	35_C
4_D	33_D	18_D	9_D	2_D	35_D	20_D	25_C	30_C	11_C	16_C	37_C	2_C	9_C	4_C
17_D	10_D	3_D	34_D	19_D	8_D	1_D	12_C	17_C	24_C	29_C	10_C	5_C	36_C	1_C

รูปที่ 3.2 ลำดับการเดินของม้าบนกระดานย่อยต่าง ๆ

ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ คือ $(2,1)_B$ - $(4,2)_B$, $(5,7)_B$ - $(6,5)_B$, $(1,7)_C$ - $(2,5)_C$ และ $(3,1)_C$ - $(5,2)_C$ บนกระดาน B และ กระดาน C ตามลำดับ และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $(1,7)_A$ - $(3,8)_A$ บนกระดาน A และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $(3,6)_D$ - $(5,7)_D$ บนกระดาน D

ต่อมาเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $(1,7)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2,1)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(5,7)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(1,7)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(5,2)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $(5,7)_D$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $(3,6)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $(3,1)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(2,5)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $(6,5)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4,2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $(3,8)_A$ สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป 3.3

1_A	36_A	5_A	10_A	29_A	24_A	17_A	12_A	1_B	8_B	19_B	34_B	3_B	10_B	17_B
4_A	9_A	2_A	37_A	16_A	11_A	30_A	25_A	20_B	35_B	2_B	9_B	18_B	33_B	4_B
35_A	40_A	21_A	6_A	23_A	28_A	13_A	18_A	7_B	42_B	27_B	36_B	5_B	16_B	11_B
8_A	3_A	38_A	33_A	20_A	15_A	26_A	31_A	28_B	21_B	6_B	15_B	26_B	37_B	32_B
39_A	34_A	7_A	22_A	27_A	32_A	19_A	14_A	41_B	14_B	23_B	30_B	39_B	12_B	25_B
38_D	31_D	24_D	13_D	40_D	29_D	22_D		22_B	29_B	40_B	13_B	24_B	31_B	38_B
25_D	12_D	39_D	30_D	23_D	14_D	41_D	14_C	19_C	32_C	27_C	22_C	7_C	34_C	39_C
32_D	37_D	26_D	15_D	6_D	21_D	28_D	31_C	26_C	15_C	20_C	33_C	38_C	3_C	8_C
11_D	16_D	5_D	36_D	27_D	42_D	7_D	18_C	13_C	28_C	23_C	6_C	21_C	40_C	35_C
4_D	33_D	18_D	9_D	2_D	35_D	20_D	25_C	30_C	11_C	16_C	37_C	2_C	9_C	4_C
17_D	10_D	3_D	34_D	19_D	8_D	1_D	12_C	17_C	24_C	29_C	10_C	5_C	36_C	1_C

รูปที่ 3.3 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดาน

เมื่อเรานำมาเรียงเขียนแนวการเดินทั้งกระดานใหม่จะได้ดังรูป 3.4

1	160	5	10	153	148	17	12	37	30	19	46	35	28	21
4	9	2	161	16	11	154	149	18	45	36	29	20	47	34
159	164	145	6	147	152	13	142	31	38	53	44	33	22	27
8	3	162	157	144	15	150	155	52	141	32	23	54	43	48
163	158	7	146	151	156	143	14	39	24	139	50	41	26	55
104	111	118	87	102	113	120		140	51	40	25	138	49	42
117	88	103	112	119	86	101	76	123	136	131	126	69	56	61
110	105	116	85	94	121	114	135	130	77	124	137	60	65	70
89	84	95	106	115	100	93	122	75	132	127	68	125	62	57
96	109	82	91	98	107	80	129	134	73	78	59	64	71	66
83	90	97	108	81	92	99	74	79	128	133	72	67	58	63

รูปที่ 3.4 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(11, 15, 1)$

สำหรับผู้ที่สนใจศึกษาเพิ่มเติม อาจพิจารณาขยายปัญหาไปในแนวทางต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. พิจารณาว่ามีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เมื่อ $m < 11$ และ $n < 11$ หรือไม่
2. พิจารณาว่ามีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (m, n, r) ที่ $r \geq 2$ หรือไม่

3. นอกจากการเดินม้าแบบปกติที่นำเสนอในบทความนี้แล้ว Chia และ Ong [1] ยังได้นำเสนอการเดินม้าแบบ (a, b) เมื่อ $a \leq b$ ซึ่งคือการเดินม้าที่ม้าจะเดินไปในแนวนอนหรือแนวตั้งจำนวน a ช่องแล้วหมุนในระนาบเดียวกัน 90 องศากับแนวเดิมและเดินต่อไปอีก b ช่อง ดังนั้นผู้สนใจอาจพิจารณาว่าสำหรับการเดินม้าแบบ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ จะมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (m, n, r) ที่ $r \geq 2$ หรือไม่

เอกสารอ้างอิง

[1] Chia, G.L. and Ong, S.-H. (2005). Generalized Knight's Tours on Rectangular Chessboards, *Discrete Applied Mathematics*, 150, p. 80 - 98.

[2] Schwenk, A.L. (1991). Rectangular Chessboards have a Knight's Tour, *Math. Magazine*, 64, p. 325 - 332.

[3] Wiitala, H.R. (1996). The Knight's Tour Problem on Boards with Holes, *Research Experiences for Undergraduates Proceedings*, p.132-151.