



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

## จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล

## The Numbers on a Pascal-Like Triangle

วรเชษฐ สมมะณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ เชียงใหม่ 50300

Worachead Sommanee

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Chiang Mai Rajabhat University, Chiang Mai 50300

Email: worachead\_som@cmru.ac.th

วันที่รับบทความ : 3 ตุลาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 18 ธันวาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 5 มีนาคม 2563

### บทคัดย่อ

ในปี ค.ศ.2014 Chen ได้สร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลเพื่อใช้ในการหาสูตรของผลบวกกำลัง  
ในรูป  $\sum_{i=1}^n i^k$  ในบทความวิจัยนี้เราศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวน  
บนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen ยิ่งไปกว่านั้นเราได้หาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยม  
คล้ายปาสกาลดังกล่าว

**คำสำคัญ:** รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง

### ABSTRACT

In 2014, Chen constructed a Pascal-like triangle for finding the formula of power sums of the form  $\sum_{i=1}^n i^k$ . In this paper, we investigate a relationship between the Stirling

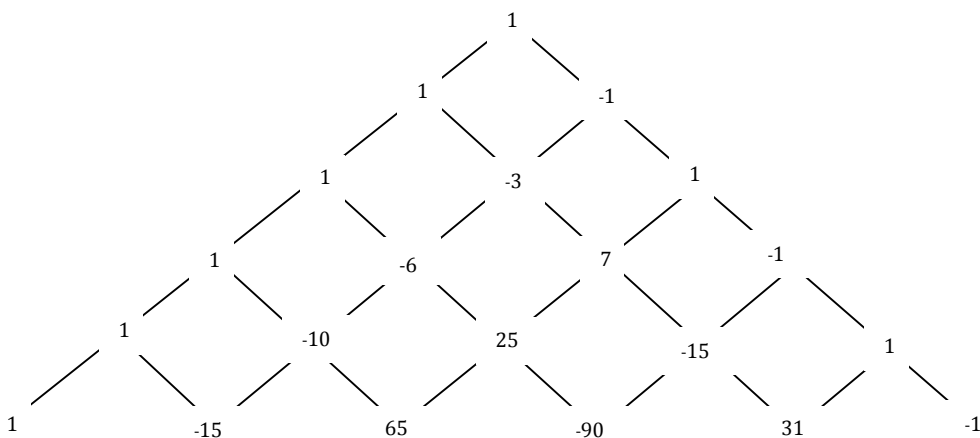
numbers of the second kind and the numbers on the Chen's Pascal-like triangle. Moreover, we find the formula of the numbers on such the Pascal-like triangle.

**Keywords:** Pascal-like triangle, Stirling number of the second kind

## 1. บทนำ

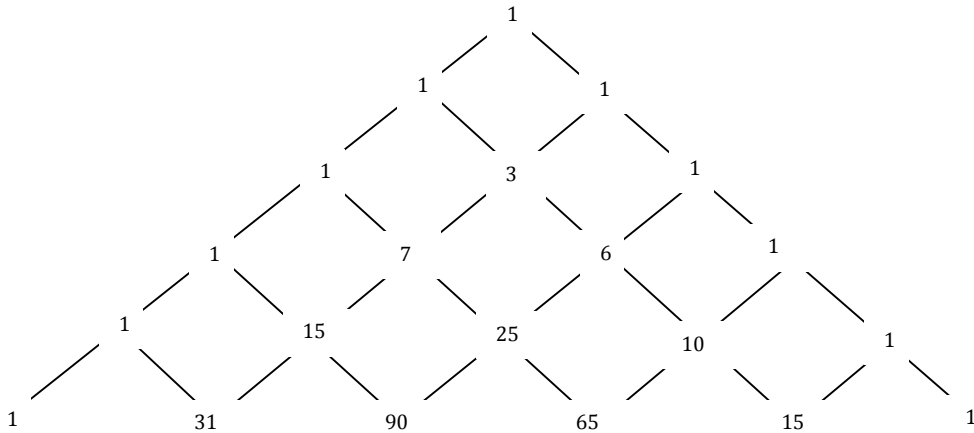
รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล (Pascal-like triangle) ถูกสร้างขึ้นมาโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ซึ่งรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลเหล่านั้นมีรูปแบบและลักษณะการนิยามที่แตกต่างกัน (ผู้อ่านสามารถดูตัวอย่างได้จาก [1], [2], [4] และ [5])

ในปี ค.ศ. 2014 Chen [2] ได้ศึกษาสูตรของผลบวกกำลังในรูป  $\sum_{i=1}^n i^k$  โดยเขาได้สร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลซึ่งสามารถนำมาช่วยในการคำนวณหาผลบวกกำลังได้ง่ายขึ้น



รูปที่ 1.1 รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen (แสดง 6 แถวแรก)

ผู้อ่านสามารถดูวิธีการสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen ได้ใน [2] นอกจากนี้ผู้เขียนยังได้ให้หมายเหตุที่สำคัญไว้ว่าหากเรานำเครื่องหมายลบทั้งหมดในรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าวออก จะปรากฏจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Stirling number of the second kind) ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 รูปสามเหลี่ยมสำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (แสดง 6 แถวแรก)

ทั้งนี้ผู้อ่านสามารถศึกษาการสร้างรูปสามเหลี่ยมสำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองได้จาก [3, หน้า 112]

ในบทความวิจัยนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen พร้อมทั้งหาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าว

## 2. ความรู้เบื้องต้นและสัญลักษณ์

กำหนดให้  $n$  และ  $k$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง  $1 \leq k \leq n$  และให้จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล ตัวที่  $k$  ของแถวที่  $n$  เขียนแทนด้วย  $a_{n,k}$  โดยการสร้างจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลในรูปที่ 1.1 จะได้ว่า

$$a_{n,1} = 1, \quad a_{n,n} = (-1)^{n+1} \quad \text{สำหรับทุก } n \quad (2.1)$$

และ

$$a_{n,k} = (-n+k-1)a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} \quad \text{สำหรับ } 1 < k < n \quad (2.2)$$

ในบทความวิจัย [2] ผู้เขียนได้แสดงว่า  $\sum_{i=1}^n i^m = \sum_{j=1}^m a_{m,j} \frac{n(n+1) \cdots (n+m-j+1)}{m-j+2}$

**บทนิยาม 2.1** จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Stirling number of the second kind) คือ จำนวนผลแบ่งกัน (partition) ที่แตกต่างกันทั้งหมดของเซตที่มีสมาชิก  $n$  ตัว โดยแบ่งเป็น  $k$  ส่วน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $S(n, k)$  เมื่อ  $n$  และ  $k$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง  $1 \leq k \leq n$

ผู้อ่านสามารถศึกษาตัวอย่างและสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง ได้จาก [3] และ [6]

**ทฤษฎีบท 2.1** [3, Theorem 37]

1.  $S(n, n) = S(n, 1) = 1$  สำหรับ  $n \geq 1$
2.  $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$  สำหรับ  $n \geq 2$
3.  $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$  สำหรับ  $n \geq 2$

**ทฤษฎีบท 2.2** [3, Theorem 38]  $S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$  สำหรับ  $1 \leq k \leq n$

**ทฤษฎีบท 2.3** [6, หน้า 118]  $S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n$  สำหรับ  $1 \leq k \leq n$

สูตรในทฤษฎีบท 2.3 เรียกว่าสูตรออยเลอร์สำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Euler's formula for Stirling numbers of the second kind)

**ข้อสังเกต** จากทฤษฎีบท 2.3 เราจะเห็นว่า

$$S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n \text{ สำหรับ } 1 \leq k \leq n \quad (2.3)$$

### 3. จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen พร้อมทั้งหาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าว

**บทตั้ง 3.1**  $S(n, 2) = (-1)^n a_{n, n-1}$  สำหรับ  $n \geq 2$

**บทพิสูจน์** จะพิสูจน์โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

สังเกตได้ว่า  $S(2, 2) = 1 = (-1)^2 (1) = (-1)^2 a_{2, 1} = (-1)^2 a_{2, 2-1}$

ให้  $r \geq 2$  และสมมติให้  $S(r, 2) = (-1)^r a_{r, r-1}$  (\*)

เราจะแสดงว่า  $S(r+1,2) = (-1)^{r+1}a_{r+1,r}$

โดยทฤษฎีบท 2.2 สมการ (\*) และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 1 ได้ว่า

$$S(r+1,2) = 2S(r,2) + S(r,1) = 2(-1)^r a_{r,r-1} + 1$$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ (2.2) และ (2.1) ได้ว่า } (-1)^{r+1}a_{r+1,r} &= (-1)^{r+1}((-r-1+r-1)a_{r,r-1} + a_{r,r}) \\ &= (-1)^{r+1}((-2)a_{r,r-1} + (-1)^{r+1}) \\ &= 2(-1)^r a_{r,r-1} + 1 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า  $S(r+1,2) = (-1)^{r+1}a_{r+1,r}$

เพราะฉะนั้น  $S(n,2) = (-1)^n a_{n,n-1}$  สำหรับ  $n \geq 2$  □

**ทฤษฎีบท 3.2**  $S(n,k) = (-1)^{n+k} a_{n,n-k+1}$  สำหรับ  $1 \leq k \leq n$  ทุก  $n \geq 1$

**บทพิสูจน์** ให้  $n \geq 1$  ถ้า  $k=1$  จะได้ว่า

$$S(n,1) = 1 = (-1)^{2(n+1)} = (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}a_{n,n} = (-1)^{n+1}a_{n,n-1+1}$$

และถ้า  $k=n$  แล้วจะได้  $S(n,n) = 1 = (1)(1) = (-1)^{2n}a_{n,1} = (-1)^{n+n}a_{n,n-n+1}$

ดังนั้น  $S(n,k) = (-1)^{n+k} a_{n,n-k+1}$  เมื่อ  $k=1$  หรือ  $k=n$

ต่อไปกำหนดให้  $1 < k < n$  ซึ่งเป็นผลให้  $n \geq 3$

จะพิสูจน์โดยการใช้องรูปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า

$$S(n,k) = (-1)^{n+k} a_{n,n-k+1} \text{ สำหรับ } 1 < k < n \text{ ทุก } n \geq 3$$

พิจารณากรณี  $n=3$  จะเห็นว่า ถ้า  $1 < k < n=3$  แล้ว  $k=2$

$$\text{จะได้ว่า } S(3,2) = 3 = (-1)(-3) = (-1)^5 a_{3,2} = (-1)^{3+2} a_{3,3-2+1}$$

ให้  $r \geq 3$  และสมมติให้  $S(r,k) = (-1)^{r+k} a_{r,r-k+1}$  สำหรับ  $1 < k < r$  (\*\*)

เราจะแสดงว่า  $S(r+1,k) = (-1)^{r+k+1} a_{r+1,r-k+2}$  สำหรับ  $1 < k < r+1$

สำหรับกรณี  $k=2$  โดยบทตั้ง 3.1 จะได้  $S(r+1,2) = (-1)^{r+1} a_{r+1,r+1-1} = (-1)^{r+2+1} a_{r+1,r-2+2}$

สำหรับกรณี  $k=r$  โดยทฤษฎีบท 2.2 ทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 1 และสมการ (\*\*) ได้ว่า

$$S(r+1,r) = rS(r,r) + S(r,r-1) = r(1) + (-1)^{r+(r-1)} a_{r,r-(r-1)+1} = r - a_{r,2}$$

โดยสมการ (2.2) และ (2.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (-1)^{r+r+1}a_{r+1,r-r+2} &= (-1)^{2r+1}a_{r+1,2} = (-1)((-r-1+2-1)a_{r+1-1,2-1} + a_{r+1-1,2}) \\ &= -(-ra_{r,1} + a_{r,2}) = r - a_{r,2} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า  $S(r+1, r) = (-1)^{r+r+1} a_{r+1, r-r+2}$

สำหรับกรณี  $2 < k < r$  สังเกตได้ว่า  $1 < k-1 < r-1$

โดยทฤษฎีบท 2.2 และสมการ (\*\*) ได้ว่า

$$S(r+1, k) = kS(r, k) + S(r, k-1) = k(-1)^{r+k} a_{r, r-k+1} + (-1)^{r+k-1} a_{r, r-k+2}$$

โดยสมการ (2.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (-1)^{r+k+1} a_{r+1, r-k+2} &= (-1)^{r+k+1} ((-r-1+r-k+2-1) a_{r, r-k+1} + a_{r, r-k+2}) \\ &= k(-1)^{r+k} a_{r, r-k+1} + (-1)^{r+k+1} a_{r, r-k+2} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า  $S(r+1, k) = (-1)^{r+k+1} a_{r+1, r-k+2}$  สำหรับ  $2 < k < r$

ดังนั้น  $S(n, k) = (-1)^{n+k} a_{n, n-k+1}$  สำหรับ  $1 < k < n$  □

**บทแทรก 3.3**  $a_{n, k} = (-1)^{k+1} S(n, n-k+1)$  สำหรับ  $1 \leq k \leq n$  ทุก  $n \geq 1$

**บทพิสูจน์** ให้  $n \geq 1$  และ  $1 \leq k \leq n$  สังเกตว่า  $1 \leq n-k+1 \leq n$

โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า  $S(n, n-k+1) = (-1)^{n+n-k+1} a_{n, n-(n-k+1)+1} = (-1)^{-(k+1)} a_{n, k}$

ดังนั้น  $a_{n, k} = (-1)^{k+1} S(n, n-k+1)$  □

**บทแทรก 3.4**  $a_{n, k} = \frac{(-1)^n}{(n-k+1)!} \sum_{j=1}^{n-k+1} (-1)^j \binom{n-k+1}{j} j^n$  สำหรับ  $1 \leq k \leq n$  ทุก  $n \geq 1$

**บทพิสูจน์** ให้  $n \geq 1$  และ  $1 \leq k \leq n$  โดยบทแทรก 3.3 และสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_{n, k} &= (-1)^{k+1} S(n, n-k+1) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} \sum_{j=1}^{n-k+1} (-1)^j \binom{n-k+1}{j} j^n \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-k+1)!} \sum_{j=1}^{n-k+1} (-1)^j \binom{n-k+1}{j} j^n \end{aligned}$$

□

**ตัวอย่าง 3.1** ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการหาค่าของ  $a_{6,3}$  โดยใช้สูตรในบทแทรก 3.4

$$a_{6,3} = \frac{(-1)^6}{(6-3+1)!} \sum_{j=1}^{6-3+1} (-1)^j \binom{6-3+1}{j} j^6 = 65$$

จากรูปที่ 1.1 จะเห็นว่า  $a_{6,3}$  มีค่าเป็น 65 ตรงกับค่าที่คำนวณได้จากสูตรในบทแทรก 3.4

**บทแทรก 3.5**  $a_{n,2} = -\binom{n}{2}$  สำหรับ  $n \geq 2$

บทพิสูจน์ ให้  $n \geq 2$  โดยบทแทรก 3.3 และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$a_{n,2} = (-1)^{2+1} S(n, n-2+1) = -S(n, n-1) = -\binom{n}{2} \quad \square$$

บทแทรก 3.6  $a_{n,n-1} = (-1)^n (2^{n-1} - 1)$  สำหรับ  $n \geq 2$

บทพิสูจน์ ให้  $n \geq 2$  โดยบทแทรก 3.3 และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$a_{n,n-1} = (-1)^{n-1+1} S(n, n-(n-1)+1) = (-1)^n S(n, 2) = (-1)^n (2^{n-1} - 1) \quad \square$$

ข้อสังเกต ผู้เขียนขอนิยาม  $C(n)$  เป็นผลบวกของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen

ในแถวที่  $n$  นั่นคือ  $C(n) = \sum_{k=1}^n a_{n,k}$  เช่น  $C(1)=1$ ,  $C(2)=1+(-1)=0$ ,  $C(3)=1+(-3)+1=-1$ ,

$C(4)=1$ ,  $C(5)=2$  และ  $C(6)=-9$  จากตัวอย่างจะเห็นว่าลำดับของ  $C(n)$  มีลักษณะคล้ายกับ

จำนวนเบลเต็มเต็ม (complementary Bell number)  $B_n$  โดยนิยาม  $B_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k S(n, k)$  และ

มีลำดับเป็น  $-1, 0, 1, 1, -2, -9, -9, \dots$  (สำหรับ  $n \geq 1$ ) ผู้อ่านสามารถดูลำดับของ  $B_n$  เพิ่มเติมได้ใน

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS A000587) [7] จากตัวอย่างผู้เขียน

คาดว่า  $C(n) = (-1)^n B_n$  ดังนั้นผู้ที่สนใจสามารถทำการศึกษาข้อสมมติฐานดังกล่าวได้

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Bayat, M., Teimoori, H., and Khatami, Z. (2014). Pascal-like Triangle and Pascal-like Functional Matrix. *Journal of Mathematical Extension*, 7, p. 67 - 82.
- [2] Chen, Z. (2014). A Pascal-like Triangle From Finding Power Sums. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(6), p. 932 - 938.
- [3] Cohen, D. I. (1978). *Basic Techniques of Combinatorial Theory* (No. 04; QA164, C6.). Michigan: John Wiley and Sons Ltd.
- [4] Matsui, H., Minematsu, D., Yamauchi, T., and Adera, R. M. (2010). Pascal-like Triangles and Fibonacci-like Sequences. *The Mathematical Gazette*, 94(529), p. 27 - 41.
- [5] Neal, D. (1994). The Series and a Pascal-like Triangle. *The College Mathematics Journal*, 25(2), p. 99 - 101.

- [6] Quaintance, J., and Gould, H. W. (2015). *Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of H.W. Gould*. World Scientific.
- [7] Sloane, N. J. A. (2020). *Rao Uppuluri-Carpenter (or Complementary Bell number)*. Retrieved January 24, 2020, from <http://oeis.org/A000587>.