



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(702) กันยายน – ธันวาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ผลลัพธ์บางอย่างใน $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป

Some Results in $\mathcal{LA}^{**}$ -semigroups

ชฎารัตน์ ถาปิ่น¹ และ ไพโรจน์ เยียระยง^{2,*}

^{1,2}หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม พิษณุโลก 65000

Chadarat Tapan¹ and Pairote Yiarayong^{2,*}

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000

Email: ¹n_nstat@hotmail.com ²pairote0027@hotmail.com

วันที่รับบทความ : 9 ธันวาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 17 มกราคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 7 เมษายน 2563

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดของสมาชิกตัวแปรในกึ่งกรุปเกือบซ้ายและมีการตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของสิ่งที่กล่าวมาข้างต้น นอกจากนี้ได้พิสูจน์ว่า ถ้า $(S, *)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปปกติ และ $a \in S$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้จะสมมูลกัน

1. $a \in \mathcal{R}(S)$

2. $(S * a) * b = S * b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$

คำสำคัญ: กึ่งกรุปเกือบซ้าย $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป สมาชิกตัวแปร อินเวอร์ทียฟซ้าย กึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ

* ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

In this paper, the notions of variant elements in left almost semigroups are investigated. Moreover, we prove that if $(S, *)$ is an $\mathcal{LA}^{**}$ -regular semigroup and $a \in S$, then the following conditions are equivalent.

1. $a \in \mathcal{R}(S)$,
2. $(S * a) * b = S * b$ for any element b of S .

Keywords: Left almost semigroup, $\mathcal{LA}^{**}$ -semigroup, Variant element, Left invertive, Regular left almost semigroup

1. บทนำ

ในบทความนี้เป็นการศึกษาถึงกรุปเกือบซ้ายที่มีลักษณะพิเศษบางประการ เช่น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป และถึงกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย เป็นต้น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปถูกพัฒนามาจากทฤษฎีบทของถึงกรุปเกือบซ้ายและถึงกรุปสลับที่ โครงสร้างพีชคณิต “ $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป” ได้รับการนิยามครั้งแรกโดย Protić and Boinovic [13] ในปี ค.ศ.1995 ซึ่งได้อธิบายว่าถึงกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ จะเรียกว่า $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S ซึ่ง $x * (y * z) = y * (x * z)$ นอกจากนี้ยังได้อธิบายถึงกรุปเกือบซ้ายที่มีลักษณะพิเศษบางอย่างที่กล่าวมาข้างต้น ยิ่งไปกว่านั้นยังมีนักคณิตศาสตร์อีกมากมายที่ได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของถึงกรุปเกือบซ้ายอย่างแพร่หลายซึ่งได้อธิบายถึงทฤษฎีบท สมบัติ และตัวอย่างต่าง ๆ ของ $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปและถึงกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์

ในปี ค.ศ.2008 Boinovic และคณะ [3] ได้กำหนดบทนิยามของถึงกรุปย่อยเกือบซ้ายวิกษณัยค่าสองขั้วในถึงกรุปเกือบซ้ายระบบเคอร์เนลปกติของ $\mathcal{LA}^{**}$ -ถึงกรุปผกผัน (kernel normal system of inverse $\mathcal{LA}^{**}$ -semigroup) ในปี ค.ศ.2012 Yaqoob [14] สร้างบทนิยามของถึงกรุปย่อยเกือบซ้ายวิกษณัยค่าสองขั้วในถึงกรุปเกือบซ้าย นอกจากนี้ได้ศึกษาสมบัติบางประการของไอดีล (ขวา, ไบ-, ภายใน) ซ้ายวิกษณัยค่าสองขั้ว (bipolar-valued fuzzy left (right, bi-, interior) ideal) ของถึงกรุปเกือบซ้าย ยิ่งไปกว่านั้น Faisal และคณะ [6] ได้แนะนำแนวคิดของฟัซซีฟิเคชันค่าสองขั้วในถึงกรุปเกือบซ้าย ในปีเดียวกัน Aslam และคณะ [2] ได้นำเสนอแนวความคิดของเซตย่อยวิกษณัยสองขั้วในถึงกรุปเกือบซ้ายและได้อธิบายลักษณะเฉพาะบางประการของไอดีล (ขวา) ซ้ายวิกษณัยสองขั้วของถึง

กรุปเกือบซ้าย ต่อมาในปี ค.ศ.2013 Dudek และ Gigon [5] ได้ให้ความหมายของ $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปผกผันสมบูรณ์ (completely inverse $\mathcal{LA}^{**}$ -semigroup) ว่าเป็นกรุปพอยต์ที่มีสมบัติ

$$(x * y) * z = (z * y) * x, x * (y * z) = y * (x * z)$$

และ $x * x^{-1} = x^{-1} * x$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S โดยที่ x^{-1} เป็นตัวผกผันเพียงตัวเดียวของ x นอกจากนี้ Khan และคณะ [8] ได้ให้บทนิยามของของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับวิภันย์ค่าช่วงและได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปรกติภายใน (intra-regular ordered $\mathcal{LA}$ -semigroup) ในพจน์ของไอดีล (ขวา) ซ้ายวิภันย์ค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับยิ่งไปกว่านั้น Yaqoob และคณะ [14 - 16] ได้ให้ความหมายของกึ่งกรุปย่อยเกือบซ้ายวิภันย์ค่าช่วงไอดีลซ้าย ไอดีลขวาและไบ-ไอดีลในกึ่งกรุปเกือบซ้าย แนวคิดของเซตวิภันย์สหัชญาณนิยมนค่าช่วง (interval valued intuitionistic fuzzy set) ในกึ่งกรุปเกือบซ้ายถูกนำเสนอโดย Yaqoob ในปี ค.ศ.2013 และได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติในพจน์ของไอดีลซ้ายวิภันย์สหัชญาณนิยมนค่าช่วง ในปี ค.ศ.2014 Khan, Shum และ Iqbal [9] ได้ศึกษาและอธิบายสมบัติบางประการของไอดีลเล็กสุด (minimal ideal) ของ $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป ($\mathcal{LA}^{**}$ -semigroup) นอกจากนี้ Abdullah และคณะ [1] ได้กำหนดบทนิยามของไอดีลวิภันย์ (α, β) ค่าช่วงในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ในปี ค.ศ.2016 Khan, Yousafzai และ Khan [11] ได้ศึกษาความหมายของ (m, n) -ไอดีล $((m, n)$ -ideal) ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ($\mathcal{LA}$ -semigroup) และได้หาลักษณะเฉพาะของ (m, n) -ไอดีลในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ยิ่งไปกว่านั้นได้พิสูจน์ว่าเซตย่อย A ของกึ่งกรุปเกือบซ้ายจะเป็น $(0, 2)$ -ไอดีลก็ต่อเมื่อ A เป็นไอดีลซ้ายของบางไอดีลซ้ายในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ในปี ค.ศ.2018 Khan, Yousafzai และ Hila [10] ได้แนะนำแนวคิดของ $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปผกผันซ้ายสมบูรณ์ (completely left inverse $\mathcal{LA}^{**}$ -semigroup) และได้ศึกษาสมบัติพื้นฐานของสมภาค (congruence) ใน $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปผกผันซ้ายสมบูรณ์

ในบทความนี้ได้ศึกษาและแนะนำแนวความคิดของสมาชิกตัวแปร (variant element) ใน $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปตามแนวทางของ Chinram และ Yonthanthum [4] นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของ $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป ยิ่งไปกว่านั้นได้พิสูจน์ว่า ถ้า $(S, *)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปปรกติและ $a \in S$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $a \in \mathcal{R}(S)$
2. $(S * a) * b = S * b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$

2. ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้เราได้ศึกษาบทนิยามและผลลัพธ์บางอย่างที่จำเป็นสำหรับวัตถุประสงค์และการศึกษาในหัวข้อต่อไปของเรา

บทนิยาม 2.1 [7] กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก $(S, *)$ ว่า **กึ่งกรุปเกือบซ้าย** (left almost semigroup) ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน $*: S \times S \rightarrow S$ โดยที่ $(x, y) \mapsto x * y$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใด ๆ ใน S ที่มีสมบัติ $(x * y) * z = (z * y) * x$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใด ๆ ใน S และเรียกสมบัตินี้ว่า **อินเวอร์ทีฟซ้าย** (left invertive)

บทตั้ง 2.2 [7] ถ้า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายแล้ว $(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$ สำหรับทุกสมาชิก a, b, c และ d ใด ๆ ใน S

กำหนดให้ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย จะเรียก $(S, *)$ ว่า มีสมบัติ**เอกลักษณ์ซ้าย** (left identity) ถ้ามีสมาชิก e ใน S ซึ่งทำให้ $e * x = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใด ๆ ใน S และจะเรียก “ e ” ว่า **เอกลักษณ์ซ้าย** (left identity)

บทตั้ง 2.3 [12] ถ้า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้ายแล้ว $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใด ๆ ใน S

บทตั้ง 2.4 [12] ถ้า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย แล้ว $(a * b) * (c * d) = (d * c) * (b * a)$ สำหรับทุกสมาชิก a, b, c และ d ใด ๆ ใน S

บทนิยาม 2.5 [13] กึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ จะเรียกว่า $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S ซึ่ง $x * (y * z) = y * (x * z)$

กำหนดให้ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย จะเรียก $(S, *)$ ว่า **กึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ** (regular left almost semigroup) ถ้าสำหรับแต่ละสมาชิก x ใด ๆ ใน S แล้วจะมีสมาชิก a ใน S ซึ่ง $x = (x * a) * x$

ข้อสังเกต เห็นได้ชัดเจนว่า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติก็ต่อเมื่อ $x \in (x * S) * x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใด ๆ ใน S

3. ผลการวิจัย

ในหัวข้อต่อไปนี้จะแนะนำแนวความคิดของสมาชิกตัวแปรในกึ่งกรุปเกือบซ้าย นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของ $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป โดยเริ่มต้นจากการกำหนดบทนิยามของสมาชิกตัวแปรในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ดังนี้

กำหนดให้ a เป็นสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ นิยามการดำเนินการ “ $\circ_a$ ” โดยที่

$$x \circ_a y = (x * a) * y$$

สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน S เห็นได้ชัดเจนว่า $\circ_a$ เป็นดำเนินการทวิภาคบน S จะเรียกสมาชิก a ว่า **ตัวแปร (variant)** ของ S

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $(S, *)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป แล้ว $(S, \circ_a)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป

บทพิสูจน์ เริ่มต้นจะแสดงว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย

ให้ x, y และ z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (x \circ_a y) \circ_a z &= ((x * a) * y) \circ_a z \\ &= (((x * a) * y) * a) * z \\ &= ((a * y) * (x * a)) * z \\ &= (x * ((a * y) * a)) * z \\ &= (z * ((a * y) * a)) * x \\ &= ((a * y) * (z * a)) * x \\ &= (((z * a) * y) * a) * x \\ &= ((z \circ_a y) * a) * x \\ &= (z \circ_a y) \circ_a x \end{aligned}$$

ดังนั้น $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย

ต่อไปจะแสดงว่า $(S, \circ_a)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป

กำหนดให้ x, y และ z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 x \circ_a (y \circ_a z) &= (x * a) * (y \circ_a z) \\
 &= (x * a) * ((y * a) * z) \\
 &= (y * a) * ((x * a) * z) \\
 &= (y * a) * (x \circ_a z) \\
 &= y \circ_a (x \circ_a z)
 \end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป □

บทแทรก 3.2 ถ้า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย แล้ว $(S, \circ_a)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป

บทพิสูจน์ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.1 □

บทแทรก 3.3 ถ้า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย แล้ว $(S, \circ_e)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย

บทพิสูจน์ กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 e \circ_e x &= (e * e) * x \\
 &= e * x \\
 &= x
 \end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(S, \circ_e)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย □

กำหนดให้ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย

นิยามเซต $\mathcal{R}(S)$ โดยที่ $\mathcal{R}(S) = \{a \in S \mid (S, \circ_a) \text{ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ}\}$

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ $(S, *)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป ถ้า $\mathcal{R}(S) \neq \emptyset$ แล้ว $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\mathcal{R}(S) \neq \emptyset$ ดังนั้นจะมีสมาชิก a ใน S ซึ่ง $a \in \mathcal{R}(S)$

จะได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ

กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 x &= (x \circ_a y) \circ_a x \\
 &= ((x * a) * y) \circ_a x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (((x*a)*y)*a)*x \\
&= ((a*y)*(x*a))*x \\
&= (x*((a*y)*a))*x \in (x*S)*x
\end{aligned}$$

สำหรับบางสมาชิก y ใน S

จึงสรุปได้ว่า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ □

บทแทรก 3.5 กำหนดให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้าย

ถ้า $\mathcal{R}(S) \neq \emptyset$ แล้ว $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ

บทพิสูจน์ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.4 □

ทฤษฎีบท 3.6 กำหนดให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย

ถ้า $a \in \mathcal{R}(S)$ แล้ว $(S*a)*S = S$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนว่า $(S*a)*S \subseteq S$ ต่อไปจะแสดงว่า $S \subseteq (S*a)*S$

กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

เนื่องจาก $a \in \mathcal{R}(S)$ จะได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ

ดังนั้น จะมีสมาชิก s ใน S โดยที่ $x = (x \circ_a s) \circ_a x$ เพราะว่า

$$\begin{aligned}
x &= (x \circ_a s) \circ_a x \\
&= ((x*a)*s) \circ_a x \\
&= (((x*a)*s)*a)*x \in (S*a)*S
\end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(S*a)*S = S$ □

ทฤษฎีบท 3.7 กำหนดให้ $(S,*)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุป และ $a, b \in S$ ซึ่ง $a \in \mathcal{R}(S)$

ถ้า $a \in S*b$ แล้ว $b \in \mathcal{R}(S)$

บทพิสูจน์ จาก $a \in S*b$ จะได้ว่า จะมี $s \in S$ โดยที่ $a = s*b$

กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

เนื่องจาก $a \in \mathcal{R}(S)$ จะได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ

ดังนั้น จะมี $w \in S$ โดยที่ $x = (x \circ_a w) \circ_a x$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 x &= (x \circ_a w) \circ_a x \\
 &= ((x * a) * w) \circ_a x \\
 &= (((x * a) * w) * a) * x \\
 &= (((x * a) * w) * (s * b)) * x \\
 &= ((b * s) * (w * (x * a))) * x \\
 &= (((w * (x * a)) * s) * b) * x \\
 &= (((w * (((((x * a) * w) * a) * x) * a)) * s) * b) * x \\
 &= (((w * (((x * a) * ((x * a) * w)) * a)) * s) * b) * x \\
 &= (((w * ((a * ((x * a) * w)) * (x * a))) * s) * b) * x \\
 &= (((w * ((a * ((x * a) * w)) * (x * (s * b)))) * s) * b) * x \\
 &= (((w * ((a * ((x * a) * w)) * (s * (x * b)))) * s) * b) * x \\
 &= (((w * (((x * b) * s) * (((x * a) * w) * a))) * s) * b) * x \\
 &= (((((x * b) * s) * (w * (((x * a) * w) * a))) * s) * b) * x \\
 &= (((s * (w * (((x * a) * w) * a))) * ((x * b) * s)) * b) * x \\
 &= (((x * b) * (s * (w * (((x * a) * w) * a))) * s) * b) * x
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \in (((x * b) * S) * b) * x$ ทำให้ได้ว่า จะมี $z \in S$ โดยที่

$$\begin{aligned}
 x &= (((x * b) * z) * b) * x \\
 &= ((x \circ_b z) * b) * x \\
 &= (x \circ_b z) \circ_b x
 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $(S, \circ_b)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $b \in \mathcal{R}(S)$

□

ทฤษฎีบท 3.8 ถ้า $(S, *)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปปรกติและ $a \in S$ แล้ว เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $a \in \mathcal{R}(S)$
2. $(S * a) * b = S * b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$

บทพิสูจน์

สมมติให้ $a \in \mathcal{R}(S)$ จะได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

กำหนดให้ b เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S เห็นได้ชัดเลยว่า $(S * a) * b \subseteq S * b$

ต่อไปจะแสดงว่า $S * b \subseteq (S * a) * b$

เนื่องจาก $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ ดังนั้น จะมี $s \in S$ โดยที่

$$\begin{aligned} b &= (b \circ_a s) \circ_a b \\ &= ((b * a) * s) \circ_a b \\ &= (((b * a) * s) * a) * b \end{aligned}$$

ต่อไปกำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S โดยที่ $x \in S * b$

จึงได้ว่าจะมี $t \in S$ โดยที่ $x = t * b$ พิจารณา

$$\begin{aligned} x &= t * b \\ &= t * (((b * a) * s) * a) * b \\ &= (((b * a) * s) * a) * (t * b) \\ &= (b * t) * (a * ((b * a) * s)) \\ &= ((a * ((b * a) * s)) * t) * b \\ &= ((t * ((b * a) * s)) * a) * b \in (S * a) * b \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $S * b \subseteq (S * a) * b$ นั่นคือ $(S * a) * b = S * b$

สมมติให้ 2 เป็นจริง กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า $(x * a) * S = x * S$ และ $(S * a) * x = S * x$

เนื่องจาก $(S, *)$ เป็น $\mathcal{LA}^{**}$ -กึ่งกรุปปรกติ

ดังนั้นจะมี $s \in S$ โดยที่ $x = (x * s) * x \in S * x$

จะได้ว่า $x \in (S * a) * x$ นั่นคือ จะมี $t \in S$ ซึ่ง $x = (t * a) * x$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 x &= (x * s) * x \\
 &= (((t * a) * x) * s) * ((t * a) * x) \\
 &= ((s * x) * (t * a)) * ((t * a) * x) \\
 &= ((a * t) * (x * s)) * ((t * a) * x) \\
 &= (x * ((a * t) * s)) * ((t * a) * x) \\
 &= (((t * a) * x) * ((a * t) * s)) * x \\
 &= (((t * a) * (a * t)) * (x * s)) * x \\
 &= ((a * ((t * a) * t)) * (x * s)) * x \\
 &= (((x * s) * ((t * a) * t)) * a) * x \\
 &= (((t * a) * ((x * s) * t)) * a) * x \\
 &= (((t * a) * ((t * s) * x)) * a) * x \\
 &= (((t * s) * ((t * a) * x)) * a) * x \\
 &= (((t * s) * ((x * a) * t)) * a) * x \\
 &= (((x * a) * ((t * s) * t)) * a) * x \in (((x * a) * s) * a) * x
 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า จะมี $w \in S$ โดยที่

$$\begin{aligned}
 x &= (((x * a) * w) * a) * x \\
 &= ((x \circ_a w) * a) * x \\
 &= (x \circ_a w) \circ_a x
 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a \in \mathcal{R}(S)$

□

เอกสารอ้างอิง

- [1] Abdullah, S., Aslam, S. and Amin, N. (2014). LA-semigroup characterized by the properties of interval valued (α, β) -fuzzy ideal. *J. Appl. Math. & Informatics*, 32 (3-4), p. 405 – 426.

- [2] Aslam, M., Abdullah, S. and Masoo, M. (2012). Bipolar fuzzy Ideals in LA-semigroups. *World Applied Sciences Journal*, 17 (12), p. 1769 – 1782.
- [3] Boinovic, M., Protic, P.V. and Stevanovic, N. (2008). Kernel normal system of inverse AG**-groupoids. *Quasigroups and Related Systems*, 17, p. 1 – 8.
- [4] Chinram, R. and Yonthanthum, W. (2019). On the regularity-preserving elements in regular ordered semigroups. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 14 (3), p. 729 – 736.
- [5] Dudek, W.A. and Gigon, R.S. (2013). Completely inverse AG**-groupoids. *Semigroup Forum*, 87, p. 201 – 229.
- [6] Faisal, Yaqoob, N. and Saeid, A.B. (2012). Some results in bipolar-valued fuzzy ordered AG-groupoids. *Discussiones Mathematica General Algebra and Applications*, 32, p. 55 – 76.
- [7] Kazim, M. A. and Naseerudin, M. (1972). On almost-semigroup. *Aligarh Bull. Math.*, 2, p. 1 – 7.
- [8] Khan, A., Faisal, Khan, W. and Yaqoob, N. (2013). Ordered LA-semigroups in terms of interval valued fuzzy ideals. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, 5 (1), p. 100 – 117.
- [9] Khan, M., Shum, K.P. and Iqbal, M.F. (2014). On minimal ideals of AG**-groupoids. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 38, 389 – 399.
- [10] Khan, W., Yousafzai, F. and Hila, K. (2018). Congruences and decompositions of AG**-groupoids. *Miskolc Mathematical Notes*, 19 (2), p. 931 – 944.
- [11] Khan, W., Yousafzai, F. and Khan, M. (2016). On generalized ideals of left almost semigroups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9 (3), p. 277 – 291.

- [12] Mushtaq, Q. and Yusuf, S.M. (1979). On locally associative LA-semigroups. *J. Nat. Sci. Math.*, 19, p. 57 – 62.
- [13] Protic, P.V. and Boinovic, M. (1995). Some congruences on an AG^{**} -groupoid. *Filomat*, 9, p. 879 – 886.
- [14] Yaqoob, N. (2012). Bipolar-valued fuzzy ideals in LA-semigroups. *Journal of Advanced Studies in Topology*, 3 (1), p. 60 – 71.
- [15] Yaqoob, N. (2013). Interval valued intuitionistic fuzzy ideals of regular LA-semigroups. *Thai Journal of Mathematics*, 11 (3), p. 683 – 695.
- [16] Yaqoob, N., Chinram, R. and Ghareeb, A. (2013). Left almost semigroups characterized by their interval valued fuzzy ideals. *Afr. Mat.*, 24, p. 231 – 245.