วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน (2)
Evaluating Determinants by Jacobi's Method and Dodgson's Condensation Method (2)

พิสมัย กิตติภูมิ[1,*] และ ปาริชาติ ศรีรัตน์[2]
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 91011

Pisamai Kittipoom[1,*] and Parichat Srirat[2]
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Prince of Songkla University, Songkhla 90110

Email: [1]pisamai.k@psu.ac.th [2]parichat74712@gmail.com

วันที่รับบทความ : 12 มิถุนายน 2562 วันที่แก้ไขบทความ : 1 กรกฎาคม 2562 วันที่ตอบรับบทความ : 12 ธันวาคม 2562

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นบทความที่สอง และเป็นบทความสุดท้ายของการศึกษาวิธีหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์โดยใช้วิธีของยาโคบี และวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน โดยในบทความนี้มีการเรียบเรียงบทพิสูจน์ของวิธีการทั้งสอง

คำสำคัญ: ตัวกำหนด โคแฟกเตอร์

[*] ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

This article is the second and final part of the study of Jacobi method and Dodgson's condensation method.

Keywords: Determinants, Cofactors

ในบทความตอนที่ 2 นี้ เราจะได้นำเสนอวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนด 2 วิธี วิธีแรกได้มาจากทฤษฎีบทยาโคบี (Jacobi's theorem) วิธีที่สองคือการควบแน่นของดอดจ์สัน ซึ่งเป็นการลดขนาดของเมทริกซ์ลงทีละหนึ่ง โดยผ่านกระบวนการควบแน่น วิธีการควบแน่นของดอดจ์สันมีขั้นตอนการคำนวณที่ง่ายและไม่ซับซ้อน นอกจากนี้ที่มาและบทพิสูจน์ก็มีรายละเอียดที่น่าสนใจ ในบทความตอนที่ 1 เราได้นำเสนอว่า เบื้องหลังสำคัญของความสำเร็จของวิธีควบแน่นของดอดจ์สันมาจากทฤษฎีบทยาโคบี ดังนั้นในบทความตอนที่ 2 นี้ เราจะศึกษารายละเอียดการพิสูจน์ และเบื้องลึกเบื้องหลังของวิธีการหาตัวกำหนดทั้งสองวิธี

1. บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทยาโคบี

ในหัวข้อสุดท้ายของบทความตอนที่ 1 เราได้แสดงผ่านตัวอย่างของเมทริกซ์ขนาด 4×4 ว่าสูตรที่ได้จากทฤษฎีบทยาโคบีสามารถแจกแจงเป็นขั้นตอนในกระบวนการควบแน่นของดอดจ์สันได้ ในหัวข้อนี้ เราจึงต้องทำความเข้าใจทฤษฎีบทยาโคบีให้มากขึ้น โดยการศึกษาบทพิสูจน์และหาข้อสังเกตนี้ที่จะมีประโยชน์ในการพิสูจน์วิธีควบแน่นของดอดจ์สันต่อไป

ทฤษฎีบท 1.1 [4] (ทฤษฎีบทยาโคบี) ให้ $A=\left[a_{i,j}\right]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ โดยที่ $n\geq 3$ ถ้า $\left[a^{*}_{k:k+n-m-1,k:k+n-m-1}\right]$ เป็นไมเนอร์ประกอบขนาด $(n-m)\times(n-m)$ โดยที่ $2\leq m<n-1$ ของ A และ $\left[a'_{k:k+n-m-1,k:k+n-m-1}\right]$ เป็นไมเนอร์สอดคล้องขนาด $m\times m$ ของเมทริกซ์ A' แล้ว

$$\det A\det\left[a'_{k:k+n-m-1,k:k+n-m-1}\right]=\left(\det A\right)^{m}\cdot\det\left[a^{*}_{k:k+n-m-1,k:k+n-m-1}\right] \qquad (1)$$

ถ้า $\det A\neq 0$ แล้ว

$$\det\left[a'_{k:k+n-m-1,k:k+n-m-1}\right]=\left(\det A\right)^{m-1}\cdot\det\left[a^{*}_{k:k+n-m-1,k:k+n-m-1}\right] \qquad (2)$$

บทพิสูจน์ [4] กำหนดให้

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

และแอดจูเกตของ A คือ

$$A'=\begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} & C_{m+1,1} & \cdots & C_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} & C_{m+1,m} & \cdots & C_{n,m} \\ C_{1,m+1} & \cdots & C_{m,m+1} & C_{m+1,m+1} & \cdots & C_{n,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & \cdots & C_{m,n} & C_{m+1,n} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix}$$

สร้างเมทริกซ์ A'_I ขนาด $n\times n$ โดยมีสมาชิกในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ m เป็นสมาชิกในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ m ของเมทริกซ์ A' และสมาชิกในหลักที่ $m+1$ ถึงหลักที่ n เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกของเมทริกซ์ศูนย์และเมทริกซ์เอกลักษณ์ ดังแสดงต่อไปนี้

$$A'_I=\begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{1,m+1} & \cdots & C_{m,m+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & \cdots & C_{m,n} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

พิจารณาผลคูณของเมทริกซ์ A และ A'_I จะได้ว่า

$$AA_I' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}C_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}C_{m,j} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}C_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}C_{m,j} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline \sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j}C_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j}C_{m,j} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}C_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}C_{m,j} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right]$$

จากสมบัติของโคแฟกเตอร์ของเมทริกซ์ $A=[a_{i,j}]$ ขนาด $n\times n$ จะได้ว่า

$$a_{i,1}C_{k,1}+a_{i,2}C_{k,2}+\cdots+a_{i,n}C_{k,n}=\begin{cases}\det A, & i=k \\ 0, & i\neq k\end{cases}, k\in\{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

เราพบว่าสมาชิกแนวทแยงในบล็อกซ้ายบนมีค่าเท่ากับ $\det A$ และสมาชิกอื่น ๆ ในบล็อกนี้มีค่าเป็นศูนย์ รวมถึงสมาชิกในบล็อกซ้ายล่างก็มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่นกัน

$$AA_I' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \det A & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right]$$

โดยใช้วิธีกระจายโคแฟกเตอร์ตามหลักที่ 1 กับเมทริกซ์ด้านซ้าย ได้ว่า

$$\det\left(AA_I'\right)=\left(\det A\right)C_{1,1}+0+\cdots+0$$

โดยที่ $C_{1,1}=\det\left[\begin{array}{ccc|ccc} \det A & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right]_{(n-1)\times(n-1)}$

ในทำนองเดียวกัน เราหาค่า $C_{1,1}$ โดยใช้การกระจายโคแฟกเตอร์ตามหลักที่ 1 ได้ว่า

$$\det\left(AA_I'\right)=\det A\left(\det A\det\left[\begin{array}{ccc|ccc}\det A & \cdots & 0 & a_{3,m+1} & \cdots & a_{3,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \det A & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n}\\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n}\end{array}\right]_{(n-2)\times(n-2)}\right)$$

เนื่องจาก $\det\left(AA_I'\right)=\det A\det A_I'$ ดังนั้น เมื่อหาค่าตัวกำหนดถึงครั้งที่ m เราได้ว่า

$$\det A\det A_I'=\left(\det A\right)^m\det\begin{bmatrix}a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n}\end{bmatrix}$$

ถ้า $\det A\neq 0$ ได้ว่า

$$\det A_I'=\left(\det A\right)^{m-1}\det\begin{bmatrix}a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n}\end{bmatrix} \tag{3}$$

ต่อมาหาค่า $\det A_I'$ ด้านซ้ายมือ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ของ A_I' ตามหลักที่ $m+1$ ได้ว่า

$$\det A_I'=0+0+\cdots+0+\det\begin{bmatrix}C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} & 0 & \cdots & 0\\ C_{1,m+2} & \cdots & C_{m,m+2} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{1,n} & \cdots & C_{m,n} & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=\det\begin{bmatrix}C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} & 0 & \cdots & 0\\ C_{1,m+3} & \cdots & C_{m,m+3} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{1,n} & \cdots & C_{m,n} & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$=\det\begin{bmatrix}C_{1,1} & \cdots & C_{m,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m}\end{bmatrix}$$

$$=\det\left[a'_{(m+1):n,(m+1):n}\right]$$

ดังนั้น ในกรณีที่มีการตัดแถวและหลักที่ $m+1$ ถึง n ของเมทริกซ์ A และ A' เราจะว่า

ไมเนอร์ประกอบ คือ $\left[a^*_{(m+1):n,(m+1):n}\right]=\begin{bmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}_{(n-m)\times(n-m)}$ และ

ไมเนอร์สอดคล้อง คือ $\left[a'_{(m+1):n,(m+1):n}\right]=\begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} \end{bmatrix}_{m\times m}$

โดยที่ $\det\left[a^*_{(m+1):n,(m+1):n}\right]=\det\begin{bmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$ และ $\det A'_I=\det\left[a'_{(m+1):n,(m+1):n}\right]$

เมื่อแทนทั้งหมดในสมการ (3) จะได้ว่า เราได้พิสูจน์สมการ (1) ของยาโคบีเป็นที่เรียบร้อยแล้ว □

หมายเหตุ ในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทยาโคบี มีการตัดแถวและหลักที่ $m+1$ ถึง n ที่สมมาตรของเมทริกซ์ A และ A' ซึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันว่า การเลือกตัดแถวและหลักใด ๆ ก็ยังได้ว่าสมการ (1) และ (2) ในทฤษฎีบทของยาโคบีเป็นจริง

ข้อสังเกต 1.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ และให้ $A_{i:k,\,j:l}$ เป็นเมทริกซ์ย่อยของ A ที่ประกอบด้วยแถว $i, i+1, \ldots, k$ และหลัก $j, j+1, \ldots, l$ ของ A โดยที่ $k, l=1, 2, 3, \ldots, n$

พิจารณาเมทริกซ์ย่อยขนาด 3×3 ของ A

$$A_{i:i+2,\,j:j+2}=\begin{bmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} & a_{i,j+2} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j+2} \\ a_{i+2,j} & a_{i+2,j+1} & a_{i+2,j+2} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีของยาโคบี เราเลือกตัดแถวและหลักที่ 2 เพียงแถวและหลักเดียว นั่นคือ $m=3-1=2$ ทำให้ได้ไมเนอร์ประกอบของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+2,\,j:j+2}$ คือ $\left[a^*_{i,j}\right]=a_{i+1,j+1}$ และไมเนอร์สอดคล้องของ $A_{i:i+2,\,j:j+2}$ คือ $\left[a'_{i+1,j+1}\right]=\begin{bmatrix} C'_{i,j} & C'_{i+2,j} \\ C'_{i+2,j} & C'_{i+2,j+2} \end{bmatrix}$ โดยที่ $C'_{k,l}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $A_{i:i+2,\,j:j+2}$ จากสูตรของยาโคบี ได้ว่า

$$\left|A_{i:i+2,\,j:j+2}\right|=\frac{1}{a_{i+1,j+1}}\begin{vmatrix} (-1)^{i+j}\left|A_{i+1:i+2,\,j+1:j+2}\right| & (-1)^{i+j+2}\left|A_{i:i+1,\,j+1:j+2}\right| \\ (-1)^{i+j+2}\left|A_{i+1:i+2,\,j:j+1}\right| & (-1)^{i+j+4}\left|A_{i:i+1,\,j:j+1}\right| \end{vmatrix}$$

จากสมบัติของตัวกำหนดเราได้ว่า

$$\left|A_{i:i+2,\,j:j+2}\right| = \frac{1}{a_{i+1,\,j+1}} \begin{vmatrix} \left|A_{i:i+1,\,j:j+1}\right| & \left|A_{i:i+1,\,j+1:j+2}\right| \\ \left|A_{i+1:i+2,\,j:j+1}\right| & \left|A_{i+1:i+2,\,j+1:j+2}\right| \end{vmatrix} \tag{4}$$

ในทำนองเดียวกัน ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ สำหรับเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+n-k,\,j:j+n-k}$ ขนาด $(n-k+1)\times(n-k+1)$ ของ A เมื่อ $k=1,2,3,\ldots,n-1$

$$A_{i:i+n-k,\,j:j+n-k} = \begin{bmatrix} a_{i,j} & a_{i,\,j+1} & \cdots & a_{i,\,j+n-k} \\ a_{i+1,\,j} & a_{i+1,\,j+1} & \cdots & a_{i+1,\,j+n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+n-k,\,j} & a_{i+n-k,\,j+1} & \cdots & a_{i+n-k,\,j+n-k} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีของยาโคบี เราตัดแถวที่ $i+1$ ถึง $i+n-k-1$ และหลักที่ $j+1$ ถึง $j+n-k-1$ จำนวน $n-k-1$ แถว (หลัก) เราได้ว่า $m=n-k+1-(n-k-1)=2$ และไมเนอร์ประกอบของ $A_{i:i+n-k,\,j:j+n-k}$ คือ

$$\left[a^*_{i+1:i+n-k-1,\,j+1:j+n-k-1}\right] = \begin{bmatrix} a_{i+1,\,j+1} & \cdots & a_{i+1,\,j+n-k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+n-k-1,\,j+1} & \cdots & a_{i+n-k-1,\,j+n-k-1} \end{bmatrix} = A_{\,i+1:i+n-k-1,\,j+1:j+n-k-1}$$

และไมเนอร์สอดคล้องของ $A_{i:i+n-k,\,j:j+n-k}$ คือ

$$\left[a'_{i+1:i+n-k-1,\,j+1:j+n-k-1}\right] = \begin{bmatrix} C'_{i,j} & C'_{i+n-k,\,j} \\ C'_{i,\,j+n-k} & C'_{i+n-k,\,j+n-k} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C'_{l,m}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $A_{i+1:i+n-k,\,j+1:j+n-k}$ จากสูตร (1) ของยาโคบี และจากสมบัติของตัวกำหนด เราได้ว่า

$$\left|A_{i:i+n-k,\,j:j+n-k}\right| = \frac{1}{\left|A_{i+1:\,i+n-k-1,\,j+1:j+n-k-1}\right|} \begin{vmatrix} \left|A_{i:i+n-k-1,\,j:j+n-k-1}\right| & \left|A_{i:i+n-k-1,\,j+1:j+n-k}\right| \\ \left|A_{i+1:i+n-k,\,j:j+n-k-1}\right| & \left|A_{i+1:i+n-k,\,j+1:j+n-k}\right| \end{vmatrix} \tag{5}$$

2. บทพิสูจน์ของวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

ในบทความตอนที่ 1 เราได้แสดงขั้นตอนและตัวอย่างการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน เพื่อเป็นการทบทวนวิธีการดังกล่าว ในตัวอย่างต่อไปนี้ เราแสดงขั้นตอนการควบแน่นของดอดจ์สัน สำหรับเมทริกซ์ขนาด 5×5 ใด ๆ นอกจากนี้ เราพบข้อสังเกตที่สำคัญซึ่งจะมีประโยชน์ในการพิสูจน์วิธีควบแน่นของดอดจ์สันสำหรับเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ใด ๆ

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณาเมทริกซ์ขนาด 5×5

$$A = A^{(5)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีควบแน่น เราคำนวณเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(4)}$ ได้ดังนี้

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} |A_{1:2,1:2}| & |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,3:4}| & |A_{1:2,4:5}| \\ |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \\ |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \\ |A_{4:5,1:2}| & |A_{4:5,2:3}| & |A_{4:5,3:4}| & |A_{4:5,4:5}| \end{bmatrix}$$

จากนั้นคำนวณเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(3)}$ โดยการควบแน่น $A^{(4)}$ และหารเมทริกซ์ที่ได้ด้วยสมาชิกใน $\operatorname{int} A^{(5)} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$ ดังนี้

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:2,1:2}| & |A_{1:2,2:3}| \\ |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| \end{vmatrix}}{a_{2,2}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,3:4}| \\ |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \end{vmatrix}}{a_{2,3}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,4:5}| \\ |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \end{vmatrix}}{a_{2,4}} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| \\ |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| \end{vmatrix}}{a_{3,2}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \end{vmatrix}}{a_{3,3}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \\ |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \end{vmatrix}}{a_{3,4}} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| \\ |A_{4:5,1:2}| & |A_{4:5,2:3}| \end{vmatrix}}{a_{4,2}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \\ |A_{4:5,2:3}| & |A_{4:5,3:4}| \end{vmatrix}}{a_{4,3}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \\ |A_{4:5,3:4}| & |A_{4:5,4:5}| \end{vmatrix}}{a_{4,4}} \end{bmatrix}$$

จากสมการ (4) ในข้อสังเกต 1.1 เราได้ว่าสมาชิกใน $A^{(3)}$ คือตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 3×3 ของเมทริกซ์ $A = A^{(5)}$ ดังนี้

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}| & |A_{3:5,3:5}| \end{bmatrix} \qquad (6)$$

ต่อมาทำการควบแน่น $A^{(3)}$ และหารด้วยสมาชิกใน $\operatorname{int} A^{(4)} = \begin{bmatrix} |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \end{bmatrix}$ ได้เป็นเมทริกซ์ควบแน่น

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \end{vmatrix}}{|A_{2:3,2:3}|} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \end{vmatrix}}{|A_{2:3,3:4}|} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}| \end{vmatrix}}{|A_{3:4,2:3}|} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \\ |A_{3:5,2:4}| & |A_{3:5,3:5}| \end{vmatrix}}{|A_{3:4,3:4}|} \end{bmatrix}$$

จากสมการ (5) ในข้อสังเกต 1.1 เมื่อ $n=5, k=2$ เราได้ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+3,\, j:j+3}$ ขนาด 4×4 ของเมทริกซ์ A ดังนี้

$$|A_{i:i+3,\, j:j+3}| = \frac{1}{|A_{i+1:i+2,\, j+1:j+2}|} \begin{vmatrix} |A_{i:i+2,\, j:j+2}| & |A_{i:i+2,\, j+1:j+3}| \\ |A_{i+1:i+3,\, j:j+2}| & |A_{i+1:i+3,\, j+1:j+3}| \end{vmatrix}$$

แทน $i, j = 1$ ได้ว่า

$$|A_{1:4,1:4}| = \frac{1}{|A_{2:3,2:3}|} \begin{vmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \end{vmatrix}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับแถวและหลักที่ 1 ของ $A^{(2)}$

แทน $i=1, j=2$ ได้ว่า

$$|A_{1:4,2:5}| = \frac{1}{|A_{2:3,3:4}|} \begin{vmatrix} |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \end{vmatrix}$$

มีค่าเท่ากับแถวที่ 1 และหลักที่ 2 ของ $A^{(2)}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อแทน $i=2, j=1$ และแทน $i, j=2$ เราได้ $\left|A_{2:5,1:4}\right|$ และ $\left|A_{2:5,2:5}\right|$ เป็นสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 และสมาชิกในแถวและหลักที่ 2 ของ $A^{(2)}$ ตามลำดับ ดังนั้น เราได้ว่าสมาชิกใน $A^{(2)}$ คือตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 4×4 ทั้งหมดของเมทริกซ์ A ดังนี้

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix} \left|A_{1:4,1:4}\right| & \left|A_{1:4,2:5}\right| \\ \left|A_{2:5,1:4}\right| & \left|A_{2:5,2:5}\right| \end{bmatrix}$$

ก่อนที่จะแสดงขั้นตอนการควบแน่นครั้งสุดท้าย เราได้ข้อสังเกตจากการควบแน่นครั้งที่ 2 ซึ่งได้เมทริกซ์ควบแน่น $A^{(3)}$ เราพบว่าสมาชิกทุกตัวใน $A^{(3)}$ ในสมการ (6) เป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 3×3 ทั้งหมดของ A และในกระบวนการควบแน่นครั้งที่ 3 ซึ่งทำให้ได้เมทริกซ์ควบแน่น $A^{(2)}$ ที่เราพบว่าสมาชิกทุกตัวใน $A^{(2)}$ เป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 4×4 ทั้งหมดของ A

ดังนั้น ในการควบแน่นครั้งสุดท้าย ซึ่งคือการควบแน่น $A^{(2)}$ และหารค่าที่ได้ด้วย $\operatorname{int} A^{(3)}=\left|A_{2:4,2:4}\right|$ ก็สามารถคาดเดาได้ว่าค่าที่ได้จะเป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ A ขนาด 5×5 นั่นเอง และนี่จึงกลายเป็นข้อสรุปของวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้ เราจะแสดงการพิสูจน์วิธีควบแน่นของดอดจ์สันสำหรับเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.1 [3] (วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน) สำหรับเมทริกซ์ $A=A^{(n)}$ ขนาด $n\times n$ ที่ผ่านกระบวนการควบแน่น k ครั้ง ได้เป็นเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-k)}=\left[a_{i,j}^{(n-k)}\right]$ ขนาด $(n-k)\times(n-k)$ โดยที่ $k=1, 2, 3, \ldots, n-1$ แล้วได้ว่าสมาชิก $a_{i,j}^{(n-k)}$ ทุกตำแหน่งใน $A^{(n-k)}$ คือค่าของตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+k,\, j:j+k}$ ที่มีขนาด $(k+1)\times(k+1)$ ทั้งหมดของ A ดังนี้

$$a_{i:i+k,\, j:j+k}^{(n-k)}=\left|A_{i:i+k,\, j:j+k}\right| \tag{7}$$

โดยที่ $i, j=1, 2, 3, \ldots, n-k$ นั่นคือ

$$A^{(n-k)}=\begin{bmatrix} \left|A_{1:k+1,1:k+1}\right| & \left|A_{1:k+1,2:k+2}\right| & \cdots & \left|A_{1:k+1,n-k:n}\right| \\ \left|A_{2:k+2,1:k+1}\right| & \left|A_{2:k+2,2:k+2}\right| & \cdots & \left|A_{2:k+2,n-k:n}\right| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|A_{n-k:n,1:k+1}\right| & \left|A_{n-k:n,2:k+2}\right| & \cdots & \left|A_{n-k:n,n-k:n}\right| \end{bmatrix}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจากในกระบวนการควบแน่นต้องมีการหารสมาชิกของเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-k)}$ ด้วยสมาชิกในเมทริกซ์ภายใน $\operatorname{int} A^{(n-(k-2))}$ ดังนั้นในการพิสูจน์นี้เราสมมติให้สมาชิกทุกตัวของ $\operatorname{int} A^{(n-(k-2))}$ ไม่เป็นศูนย์ และเราจะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

เมื่อ $k=1$ คือการควบแน่นครั้งแรก ซึ่งได้เมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-1)}$ ที่มีสมาชิกทุกตำแหน่งเป็นค่าของตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

ในการควบแน่นครั้งต่อ ๆ ไป คือ $k=2, 3, \ldots, n-1$ สมมติให้สมาชิกของเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-k)}$ ครั้งที่ k คือ

$$a_{i,j}^{(n-k)} = \left|A_{i:i+k,\, j:j+k}\right| \tag{8}$$

โดยที่ $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n-k$

ต่อมาในการควบแน่นครั้งที่ $k+1$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-(k+1))} = \left[a_{i,j}^{(n-(k+1))}\right]$ โดยที่ $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n-(k+1)$ และสมาชิก $a_{i,j}^{(n-(k+1))}$ ได้จากการควบแน่น $A^{(n-k)} = \left[a_{i,j}^{(n-k)}\right]$ และหารด้วยสมาชิกใน $\operatorname{int} A^{(n-(k-1))}$ ดังนี้

$$a_{i,j}^{(n-(k+1))} = \frac{a_{i,j}^{(n-k)} a_{i+1,j+1}^{(n-k)} - a_{i,j+1}^{(n-k)} a_{i+1,j}^{(n-k)}}{a_{i+1,j+1}^{(n-(k-1))}}$$

จาก (8) ได้ว่า

$$a_{i,j}^{(n-(k+1))} = \frac{\left|A_{i:i+k,\, j:j+k}\right|\left|A_{i+1:i+k+1,\, j+1:j+k+1}\right| - \left|A_{i:i+k,\, j+1:j+k+1}\right|\left|A_{i+1:i+k+1,\, j:j+k}\right|}{\left|A_{i+1:i+k,\, j+1:j+k}\right|} \tag{9}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราต้องแสดงว่า $a_{i,j}^{(n-(k+1))}$ มีค่าเท่ากับ $\left|A_{i:i+k+1,\, j:j+k+1}\right|$ โดยที่ $A_{i:i+k+1,\, j:j+k+1}$ เป็นเมทริกซ์ย่อยขนาด $(k+2)\times(k+2)$ ของ A

เนื่องจาก $A_{i:i+k+1,\, j:j+k+1} = \begin{bmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,j+k+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,j+k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+K+1,j} & a_{i+k+1,j+1} & \cdots & a_{i+k+1,j+k+1} \end{bmatrix}$ โดยวิธีของยาโคบี เราเลือกตัดแถวที่ $i+1$ ถึง $i+k$ และหลักที่ $j+1$ ถึง $j+k$ จำนวน k แถว k หลักของ $A_{i:i+k+1,\, j:j+k+1}$ ทำให้ได้ $m=2$ และมีไมเนอร์ประกอบของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+k+1,\, j:j+k+1}$ คือ $\left[a^{*}_{i+1:i+k,\, j+1:j+k}\right] = \begin{bmatrix} a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,j+k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+k,j+1} & \cdots & a_{i+k,j+k} \end{bmatrix} = A_{i+1:i+k,\, j+1:j+k}$ และไมเนอร์สอดคล้องของ $A_{i:i+k+1,\, j:j+k+1}$ คือ

$\left[a'_{i+1:i+k,\,j+1:j+k}\right]=\begin{bmatrix} C'_{i,j} & C'_{i+k+1,j} \\ C'_{i,j+k+1} & C'_{i+k+1,j+k+1}\end{bmatrix}$ โดยที่ $C'_{l,m}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}$ และจากสูตร (1) ของยาโคบี ได้ว่า

$$\left|A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}\right|=\frac{1}{\left|A_{i+1:i+k,\,j+1:j+k}\right|}\begin{bmatrix} C'_{i,j} & C'_{i+k+1,j} \\ C'_{i,j+k+1} & C'_{i+k+1,j+k+1}\end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
C'_{i,j} &= (-1)^{i+j}\left|A_{i+1:i+k+1,\,j+1:j+k+1}\right| \\
C'_{i+k+1,j} &= (-1)^{i+j+k+1}\left|A_{i:i+k,\,j+1:j+k+1}\right| \\
C'_{i,j+k+1} &= (-1)^{i+j+k+1}\left|A_{i+1:i+k+1,\,j:j+k}\right| \\
C'_{i+k+1,j+k+1} &= (-1)^{i+j+2k+2}\left|A_{i:i+k,\,j:j+k}\right|
\end{aligned}$$

ดังนั้น ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}$ ขนาด $(k+2)\times(k+2)$ ของ A คือ

$$\left|A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}\right|=\frac{\left|A_{i+1:i+k+1,\,j+1:j+k+1}\right|\left|A_{i:i+k,\,j:j+k}\right|-\left|A_{i:i+k,\,j+1:j+k+1}\right|\left|A_{i+1:i+k+1,\,j:j+k}\right|}{\left|A_{i+1:i+k,\,j+1:j+k}\right|} \qquad (10)$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $a_{i,j}^{(n-(k+1))}$ ในสมการ (9) โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราพิสูจน์สมการ (7)

ในขั้นสุดท้ายของวิธีการควบแน่น เมื่อ $k=n-1$ เราจึงสรุปได้ว่า เมทริกซ์ควบแน่นในครั้งสุดท้าย $A^{(1)}$ เท่ากับค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A ขนาด $n\times n$ □

ในช่วงท้ายของการพิสูจน์วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน มีการใช้ทฤษฎีบทยาโคบีเพื่อหาค่า $\left|A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}\right|$ และแสดงว่าค่าที่ได้เท่ากับ $a_{i,j}^{(n-(k+1))}$ ซึ่งเป็นสมาชิกในเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-(k+1))}$ วิธีหาค่า $\left|A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}\right|$ เริ่มจากการตัดแถวที่ $i+1$ ถึง $i+k$ และหลักที่ $j+1$ ถึง $j+k$ ของ $A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}$ จำนวน k แถว k หลัก ซึ่งในวิธีของยาโคบีนั้น เราสามารถเลือกตัดแถวและหลักอื่น ๆ ของ $A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}$ ที่ทำให้สามารถหา $\left|A_{i:i+k+1,\,j:j+k+1}\right|$ ได้เช่นกัน ซึ่งข้อสังเกตนี้จะช่วยให้เราแก้ปัญหาและข้อบกพร่องบางกรณีของวิธีควบแน่นของดอดจ์สันซึ่งจะแสดงรายละเอียดในหัวข้อต่อไป

3. ปัญหาที่พบในวิธีควบแน่นของดอดจ์สันและวิธีแก้ไข

ปัญหาสำคัญหนึ่งที่พบในวิธีควบแน่นของดอดจ์สันคือเมื่อมีสมาชิกบางตัวของเมทริกซ์ภายใน $\operatorname{int} A$ เป็นศูนย์ ซึ่งเราได้แสดงวิธีแก้ไขปัญหานี้ผ่านตัวอย่างในบทความตอนที่ 1 มาแล้ว แต่ในกรณีที่

สมาชิกทุกตัวใน $\operatorname{int} A$ ไม่เท่ากับศูนย์ก็อาจทำให้เกิดปัญหาในกระบวนการควบแน่นได้ ถ้าหลังจากการควบแน่นครั้งที่ k แล้วเกิดมีสมาชิกบางตัวใน $\operatorname{int} A^{(n-k)}$ มีค่าเป็นศูนย์

การแก้ปัญหาดังกล่าว เราใช้ความสัมพันธ์ (7) ในทฤษฎีบท 2.1 โดยสมมติให้ในการควบแน่นครั้งที่ $k^* \in \{0, 1, 2, \dots, n-4\}$ ได้เมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-k^*)} = \left[a_{i,j}^{(n-k^*)}\right]$ ซึ่ง $\operatorname{int} A^{(n-k^*)}$ มีสมาชิกในตำแหน่ง $i^*, j^* \in \{2, 3, 4, \dots, n-(k^*+1)\}$ เป็นศูนย์ นั่นคือ $a_{i^*,j^*}^{(n-k^*)} = 0$ และจากเหตุนี้ส่งผลให้เกิดปัญหาขึ้นในการควบแน่นครั้งที่ k^*+2 โดยเฉพาะกับสมาชิก $a_{i^*-1,j^*-1}^{(n-(k^*+2))}$ ของเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-(k^*+2))}$ ที่ต้องถูกหารด้วย $a_{i^*,j^*}^{(n-k^*)}$ อย่างไรก็ตาม สำหรับสมาชิก $A^{(n-(k^*+2))}$ ในตำแหน่งที่ไม่มีปัญหา คือ $i \neq i^*-1,\ j \neq j^*-1$ นั้น เราสามารถคำนวณโดยใช้กระบวนการควบแน่นปกติ แต่ในตำแหน่ง i^*-1 และ j^*-1 ที่มีปัญหา เราสามารถคำนวณค่าผ่านสมการ (7) ได้ดังนี้

$$a_{i^*-1,j^*-1}^{(n-(k^*+2))} = \left|A_{i^*-1:i^*-1+(k^*+2),\ j^*-1:j^*-1+(k^*+2)}\right| \tag{11}$$

โดยใช้วิธีของยาโคบี เราต้องเลือกตัดแถวและหลักของเมทริกซ์ย่อย $A_{i^*-1:i^*+k^*+1,\ j^*-1:j^*+k^*+1}$ ที่ทำให้สามารถคำนวณค่าตัวกำหนดใน (11) ได้ จากนั้นแทนค่าสมาชิกตำแหน่งที่มีปัญหากลับในเมทริกซ์ควบแน่น และดำเนินการควบแน่นต่อไปจนได้ค่าตัวกำหนดของ A

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณา $A = A^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งมี $\operatorname{int} A^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

โดยการควบแน่นครั้งที่ 1 ได้ว่า $A^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ และ $\operatorname{int} A^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่ามีสมาชิกในแถวและหลักที่ 1 ของ $\operatorname{int} A^{(4)}$ เป็นศูนย์ ซึ่งส่งผลให้การควบแน่นในครั้งที่ 3 ไม่สามารถหาค่าสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(2)}$ โดยใช้วิธีควบแน่นแบบเดิมได้ อย่างไรก็ตาม ไม่มีปัญหาในการควบแน่นครั้งที่ 2 เรายังดำเนินการควบแน่นเมทริกซ์ $A^{(4)}$ ได้ดังนี้

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -3 & 3 & -5\\ -2 & -1 & -5\end{bmatrix}$$

ในการควบแน่นครั้งที่ 3 เราได้

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}? & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

เราพบปัญหาเฉพาะในแถวและหลักที่ 1 โดยใช้ความสัมพันธ์ (10) เมื่อ $n=5, k^*=1$ และ $i^*,\ j^*=0$ เราสามารถคำนวณค่า $a_{1,1}^{(2)}$ ซึ่งเป็นสมาชิกในตำแหน่งที่มีปัญหาของ $A^{(2)}$ ได้ดังนี้

$$a_{1,1}^{(2)}=\left|A_{1:4,1:4}\right|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

โดยวิธีของยาโคบี เราเลือกตัดแถวและหลักที่ไม่สร้างปัญหา คือตัดแถวและหลักที่ 1 และ 2 ของ $A_{1:4,1:4}$ เราได้ไมเนอร์ประกอบคือ $\left[a_{i,j}^*\right]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ และไมเนอร์สอดคล้อง $\left[a'_{i,j}\right]=\begin{bmatrix}C'_{3,3} & C'_{4,3}\\ C'_{3,4} & C'_{4,4}\end{bmatrix}$ โดยที่ $C'_{j,i}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $A_{1:4,1:4}$ และจากสูตร (1) ของยาโคบี ได้ว่า

$$\left|A_{1:4,1:4}\right|=\frac{\begin{vmatrix}C'_{3,3} & C'_{4,3}\\ C'_{3,4} & C'_{4,4}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}6 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=0$$

นั่นคือ

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

ในการควบแน่นครั้งสุดท้ายของ $A^{(2)}$ และหารด้วย $\operatorname{int} A^{(3)}=3$ เราได้ $\det A=\frac{6}{3}=2$ เป็นค่าของตัวกำหนดที่ถูกต้องของ A

การที่เราสามารถแก้ปัญหากรณีที่มีสมาชิกบางตำแหน่งใน $\operatorname{int} A^{(n-k)}$ เป็นศูนย์ สำหรับ $k\in\{0,1,2,\ldots,n-4\}$ โดยใช้สมการ (11) อาจสร้างความสงสัยให้ผู้อ่าน เนื่องจากสมการ (11) อ้างอิงถึงทฤษฎีบท 2.1 ซึ่งมีการกำหนดให้สมาชิกใน $\operatorname{int} A$ และ $\operatorname{int} A^{(n-k)}$ ต้องไม่เป็นศูนย์

ในตัวอย่างการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 5×5 ใด ๆ ต่อไปนี้ เราขอย้อนไปใช้วิธีของยาโคบี โดยในการคำนวณตัวกำหนดของทุกเมทริกซ์ในสูตร (2) ของยาโคบี เรายึดหลักเกณฑ์การตัดแถวและหลักที่บรรจุเมทริกซ์ภายในของเมทริกซ์นั้น ๆ ซึ่งหลักเกณฑ์นี้เองทำให้เราสามารถแจกแจงเป็นวิธีควบแน่นของดอดจ์สันได้ ในกรณีที่วิธีของดอดจ์สันมีปัญหาจากการมีสมาชิกบางตำแหน่งใน $\operatorname{int} A^{(n-k)}$ เป็นศูนย์สำหรับ $k\in\{0, 1, 2, \dots, n-4\}$ เราจะชี้ให้เห็นว่าเหตุใดเราจึงสามารถใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (11) ได้

ตัวอย่าง 3.2 ให้ A คือเมทริกซ์

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix}$$

จากวิธีของยาโคบี โดยการตัดแถวและหลักที่บรรจุ $\operatorname{int} A$ เราได้ว่าไมเนอร์ประกอบ $\left[a^{*}_{2:4,2:4}\right]=\operatorname{int} A=A_{2:4,2:4}$ และไมเนอร์สอดคล้อง $\left[a'_{2:4,2:4}\right]=\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{5,1} \\ C_{1,5} & C_{5,5}\end{bmatrix}$ โดยที่ $C_{i,j}$ คือ โคแฟกเตอร์ของ A โดยสูตร (1) ของยาโคบี เราได้

$$\det A=\frac{1}{|\operatorname{int} A|}\begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{5,1} \\ C_{1,5} & C_{5,5}\end{vmatrix}=\frac{1}{|A_{2:4,2:4}|}\begin{vmatrix} C_{5,5} & C_{5,1} \\ C_{1,5} & C_{1,1}\end{vmatrix}=\frac{1}{|A_{2:4,2:4}|}\begin{vmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}|\end{vmatrix} \tag{12}$$

ในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย $A_{1:4,1:4}, A_{1:4,2:5}, A_{2:5,1:4}$ และ $A_{2:5,2:5}$ เราใช้วิธีของยาโคบีโดยตัดแถวและหลักที่บรรจุเมทริกซ์ภายในของแต่ละเมทริกซ์ย่อย ดังที่แสดงมาแล้วในข้อสังเกต 1.1 สมการ (5) เมื่อแทน $n=5, k=2$ เราได้

$$\begin{vmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}|\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}|\end{vmatrix}}{|A_{2:3,2:3}|} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}|\end{vmatrix}}{|A_{2:3,3:4}|} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}|\end{vmatrix}}{|A_{3:4,2:3}|} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \\ |A_{3:5,2:4}| & |A_{3:5,3:5}|\end{vmatrix}}{|A_{3:4,3:4}|}\end{vmatrix}$$

ซึ่งพบว่าสมาชิกในตัวกำหนดของสมการข้างบนคือสมาชิกในเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(2)}$ ในวิธีของดอดจ์สัน และจากสมการ (5) ในข้อสังเกต 1.1 เราได้ว่าสมาชิกใน $A^{(2)}$ เขียนได้เป็น

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \end{vmatrix}}{|A_{2:3,2:3}|} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \end{vmatrix}}{|A_{2:3,3:4}|} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}| \end{vmatrix}}{|A_{3:4,2:3}|} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \\ |A_{3:5,2:4}| & |A_{3:5,3:5}| \end{vmatrix}}{|A_{3:4,3:4}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}| \end{bmatrix}$$

และเมื่อพิจารณาสมาชิกใน $A^{(2)}$ พบว่าได้มาจากการควบแน่นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}| & |A_{3:5,3:5}| \end{bmatrix}$$

และหารด้วยสมาชิกใน $\begin{bmatrix} |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน และเราพบว่าเมทริกซ์ขนาด 3×3 นี้คือเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(3)}$ ในวิธีของดอดจ์สันนั่นเอง

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}| & |A_{3:5,3:5}| \end{bmatrix}$$

ในการคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 3×3 ซึ่งเป็นสมาชิกใน $A^{(3)}$ โดยการตัดแถวและหลักที่บรรจุเมทริกซ์ภายในของแต่ละเมทริกซ์ย่อย ดังที่แสดงมาแล้วในสมการ (4) ในข้อสังเกต1.1 เราได้

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:2,1:2}| & |A_{1:2,2:3}| \\ |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| \end{vmatrix}}{a_{2.2}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,3:4}| \\ |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \end{vmatrix}}{a_{2.3}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,4:5}| \\ |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:35}| \end{vmatrix}}{a_{2.4}} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| \\ |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| \end{vmatrix}}{a_{3.2}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \end{vmatrix}}{a_{3.3}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \\ |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \end{vmatrix}}{a_{3.4}} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| \\ |A_{4:5,1:2}| & |A_{4:5,2:3}| \end{vmatrix}}{a_{4.2}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \\ |A_{4:5,2:3}| & |A_{4:5,3:4}| \end{vmatrix}}{a_{4.3}} & \dfrac{\begin{vmatrix} |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \\ |A_{4:5,3:4}| & |A_{4:5,4:5}| \end{vmatrix}}{a_{4.4}} \end{bmatrix}$$

ซึ่งพบว่าสมาชิกใน $A^{(3)}$ ก็ได้มาจากการควบแน่นเมทริกซ์ $A^{(4)}$ และหารด้วย $\operatorname{int} A=\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$ โดยที่ $A^{(4)}$ คือ

$$A^{(4)}=\begin{bmatrix} |A_{1:2,1:2}| & |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,3:4}| & |A_{1:2,4:5}| \\ |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \\ |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \\ |A_{4:5,1:2}| & |A_{4:5,2:3}| & |A_{4:5,3:4}| & |A_{4:5,4:5}| \end{bmatrix}$$

และอีกครั้ง สมาชิกใน $A^{(4)}$ เกิดจากการควบแน่นเมทริกซ์เริ่มต้น A นั่นเอง

จากที่แสดงมาทั้งหมด เราเห็นอีกครั้งว่าวิธีควบแน่นของดอดจ์สันคือการดำเนินการย้อนกลับของขั้นตอนต่าง ๆ ที่ได้จากสมการ (12) ด้วยวิธีของยาโคบี ดังนั้นถ้าเราใช้วิธีควบแน่นของดอดจ์สันในการหาค่าตัวกำหนดของ A และพบว่ามีสมาชิกบางตำแหน่งใน $\operatorname{int} A^{(4)}$ (หรือ $\operatorname{int} A$) เท่ากับศูนย์ สมมติคือ $|A_{3:4,3:4}|=0$ เราพบว่า กระบวนการควบแน่นของดอดจ์สันยังคงดำเนินการต่อไปได้เพียงแต่ในขั้นตอนการหา $A^{(2)}=\begin{bmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}| \end{bmatrix}$ ต้องมีการปรับวิธีหาตัวกำหนด $|A_{2:5,2:5}|$ โดยไม่ใช้การตัดแถวและหลักแบบเดิมที่บรรจุ $\operatorname{int} A_{2:5,2:5}$ ซึ่งวิธีแก้ปัญหานี้สามารถใช้ได้สำหรับเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ $n \geq 4$

อย่างไรก็ตาม ในการควบแน่นครั้งสุดท้าย

$$\det A = \frac{1}{\operatorname{int} A^{(3)}} \begin{Vmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}| \end{Vmatrix}$$

สำหรับเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ ใด ๆ ที่ $n \geq 3$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันว่า

$$\det A = \frac{1}{\operatorname{int} A^{(3)}} \begin{Vmatrix} |A_{1:(n-1),1:(n-1)}| & |A_{1:(n-1),2:n}| \\ |A_{2:n,1:(n-1)}| & |A_{2:n,2:n}| \end{Vmatrix}$$

เราเห็นว่าในขั้นสุดท้ายนี้มีการหารด้วย $\operatorname{int} A^{(3)}$ และถ้า $\operatorname{int} A^{(3)} = 0$ เราจะไม่สามารถหาค่าตัวกำหนดได้โดยวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน และการควบแน่นที่ได้ดำเนินการมาก่อนหน้านี้จะไม่เกิดประโยชน์ใด ๆ อย่างไรก็ตาม เราสามารถตรวจสอบว่าเมื่อควบแน่นเมทริกซ์ A แล้วจะมีโอกาสที่ $\operatorname{int} A^{(3)} = 0$ หรือไม่ โดยใช้ความสัมพันธ์จากสมการ (6) และ (10) ได้ว่า

$$\operatorname{int} A^{(3)} = a_{2,2}^{(3)} = |A_{2:(n-1),2:(n-1)}| = |\operatorname{int} A|$$

ดังนั้น ก่อนที่จะใช้การควบแน่นของดอดจ์สันเพื่อหาค่าตัวกำหนด เราต้องตรวจสอบเสมอว่า $|\operatorname{int} A| \neq 0$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณา $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เราพบว่าไม่มีศูนย์ใน $\operatorname{int} A$ เมื่อทำการควบแน่นเมทริกซ์ A เราได้

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งไม่พบศูนย์ใน $\operatorname{int} A^{(4)}$ และเราทำการควบแน่น $A^{(4)}$ ได้ว่า

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix}\dfrac{-3}{-1} & \dfrac{-4}{2} & \dfrac{-1}{-1}\\ \dfrac{6}{2} & \dfrac{0}{-1} & \dfrac{2}{1}\\ \dfrac{-2}{1} & \dfrac{4}{-2} & \dfrac{3}{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

ในขั้นนี้เอง เราพบศูนย์ใน $\operatorname{int} A^{(3)}$ นั่นหมายความว่า การควบแน่นที่เราทำมาก่อนหน้านั้นไม่สามารถใช้หาค่าตัวกำหนดของ A ได้ ดังนั้น ก่อนการใช้วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน เพื่อหาค่าตัวกำหนด เราควรตรวจสอบเสมอว่า ค่าตัวกำหนด $|\operatorname{int} A|\neq 0$ ถึงแม้ว่าเราจะไม่พบศูนย์ใน $\operatorname{int} A$ หรือ $\operatorname{int} A^{(n-k)}$ แต่ถ้า $|\operatorname{int} A|=0$ ปัญหาก็จะมาแสดงเมื่อทำการควบแน่นครั้งสุดท้าย

อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าเมทริกซ์ A ในตัวอย่างนี้จะมี $|\operatorname{int} A|=0$ เราสามารถแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นได้โดยการสลับแถวที่ 1 และ 2 ดังนี้

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $|\operatorname{int} A|=-2\neq 0$ ดังนั้น เราจึงสามารถใช้กระบวนการควบแน่นเพื่อหาค่าตัวกำหนดของ $\tilde{A}$ ได้ ถึงแม้ว่ามีสมาชิกบางตัวใน $\operatorname{int} A$ เป็นศูนย์ เราสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 3.1 ว่าตัวกำหนดของ $\tilde{A}$ มีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือ ตัวกำหนดของ A มีค่าเป็น 0 เช่นกัน

4. สรุป

จากขั้นตอนที่ไม่ซับซ้อนในวิธีควบแน่นของดอดจ์สันที่สร้างความประทับใจให้กับคณะผู้เรียบเรียงในเริ่มแรก แต่เมื่อเจาะลึกในรายละเอียดก็พบว่า หากเราดำเนินการควบแน่นเมทริกซ์ไปอย่างไม่รีรอในช่วงเริ่มต้นของการคำนวณ เราอาจโชคดีที่ไม่พบการหารด้วยศูนย์เกิดขึ้นในการควบแน่น แต่เมื่อการควบแน่นดำเนินการมาถึงตอนท้าย ๆ ได้เมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-k)}$ และเรากลับพบว่า $\operatorname{int} A^{(n-k)}=0$ นั่นหมายความว่า กระบวนการควบแน่นที่เราทำมาก่อนหน้าทั้งหมดล้มเหลว ดังนั้น การตรวจสอบว่าค่าตัวกำหนด $|\operatorname{int} A|\neq 0$ ก่อนดำเนินการควบแน่นจึงเป็นสิ่งจำเป็น อย่างไรก็ตาม ในการตรวจสอบสำหรับเมทริกซ์ A ขนาด $n\times n$ เราต้องคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์ภายในขนาด $(n-2)\times(n-2)$ นับว่าเป็นค่ามัดจำที่ราคาแพง นอกจากนี้ระหว่างการควบแน่นก็ไม่การันตีว่าเราจะ

เจอปัญหาการหารด้วยศูนย์หรือไม่ ดังนั้นจึงไม่น่าแปลกใจว่าเหตุใดวิธีควบแน่นของดอดจ์สันจึงไม่ถูกอ้างอิงและนิยมใช้ในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์

เอกสารอ้างอิง

[1] Abeles, F. F. (2008). Dodgson Condensation: The Historical and Mathematical Development of an Experimental Method, *Linear Algebra and its Applications,* 429, p. 429 - 438.

[2] Dodgson, C. L. (1866). Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing Their Arithmetical Values, *Proceedings of the Royal Society of London*, 15, p. 150 - 155.

[3] Leggett, D., Perry, J. and Torrence, E. (2011). Computing Determinants by Double-Crossing. *The College Mathematics Journal*, 42, p. 43 - 54.

[4] Rise, A. and Torrence, E. (2007). “Shutting Up Like a Telescope”: Lewis Carroll's “Curious” Condensation Method for Evaluating Determinants. *The College Mathematics Journal*, 38, p. 85 - 95.