



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(702) กันยายน – ธันวาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

คณิต คิดเชื่อมโยง : กิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ลำดับ

Mathematical Connections: Learning Activities on “SEQUENCE”

เมธาสิทธิ์ ธัญรัตน์ศรีสกุล

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนราชินีบูรณะ นครปฐม 73000

Mathasit Tanyarattanasrisakul

Department of Mathematics, Rachineeburana School, Nakhon Pathom 73000

Email: mathasit24@gmail.com

วันที่รับบทความ : 26 ธันวาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 7 กุมภาพันธ์ 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 23 กรกฎาคม 2563

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการนำเสนอกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับ ซึ่งเป็นสาระหนึ่งของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และเป็นแนวทางเข้าสู่การเรียนรู้ในเรื่องแคลคูลัส ในลำดับต่อไป บทความนี้ได้นำเสนอกิจกรรมการเรียนรู้ในเรื่องลำดับที่ประยุกต์มาจากโจทย์ปัญหาของ Larson and Falvo ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ชื่อว่า Cube and Sequence ประกอบด้วย 1) ความหมายของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ 2) ความหมายของลำดับ 3) กิจกรรม Cube and Sequence 3.1) สาระของกิจกรรมการเรียนรู้ 3.2) สาระการเรียนรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นำมาเชื่อมโยง และ 3.3) แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

คำสำคัญ: ลำดับ การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ABSTRACT

This article was a presentation of mathematics learning activities on the sequence, one of mathematics subjects in high school and as a guide to further study in calculus. This article presented learning activities on sequence applied from the problems of Larson and Falvo, which emphasizes on mathematical connections skill entitled of; cube and sequence including of 1) definition of mathematical connections 2) definition of sequence 3) Cube and Sequence activities, 3.1) the essence of learning activities 3.2) learning content and mathematical skills that were linked and 3.3) guidelines for organizing learning activities.

Keywords: Sequence, Mathematical connections, Mathematics instruction

1. บทนำ

ความมุ่งหมายหนึ่งของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) [2] คือ การพัฒนานักเรียนให้เกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ทั้ง 5 ด้าน ได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์ ซึ่งเป็นความสามารถของนักเรียนที่จะนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งความรู้และประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เนื่องจากนักเรียนที่มองเห็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ จะมองเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ นักเรียนจะเข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้ง และมีความคงทนในการเรียนรู้ ตลอดจนเห็นว่าคณิตศาสตร์มีคุณค่า น่าสนใจ และสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตจริงได้ บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์ เพื่อนำเสนอแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เรื่อง ลำดับ ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ ผ่านกิจกรรมที่มีชื่อว่า Cube and Sequence

2. ความหมายของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [4] ได้อธิบายถึงความหมายของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Connections) หมายถึง กระบวนการที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการนำความรู้ เนื้อหาสาระ และหลักการทางคณิตศาสตร์มาสร้างความสัมพันธ์อย่างเป็นเหตุเป็นผลระหว่างความรู้ และทักษะกระบวนการที่มีในเนื้อหาคณิตศาสตร์กับงานที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาและการเรียนรู้แนวคิดใหม่ที่ซับซ้อนหรือสมบูรณ์ยิ่งขึ้น การที่นักเรียนเห็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ จะส่งเสริมให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาในคณิตศาสตร์ และเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ทำให้เข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้ง มีความคงทนในการเรียนรู้ ทำให้การเรียนคณิตศาสตร์น่าสนใจ มีความหมาย และทำให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์

อัมพร ม้าคอง [5] ได้อธิบายว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถของนักเรียนในการสัมพันธ์ความรู้หรือปัญหาคณิตศาสตร์ที่เรียนมา กับความรู้ ปัญหา หรือสถานการณ์อื่นที่ตนเองพบ ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้และพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ จีรวรรณใจเรื่อน และพรทิพย์ โรจน์ศรีพิศาล [1] ได้อธิบายว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้ หลักการ หรือวิธีการทางคณิตศาสตร์มาสัมพันธ์กันอย่างเป็นเหตุเป็นผล เพื่อใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้ หลักการ และแนวคิดทางคณิตศาสตร์มาสัมพันธ์เชื่อมโยงกันด้วยเหตุและผล โดยอาจใช้การคิดวิเคราะห์ การคิดแก้ปัญหา การคิดริเริ่มสร้างสรรค์ หรือกระบวนการคิดขั้นสูง ผสมผสานกับประสบการณ์เดิม เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาหรือการเรียนรู้แนวคิดที่ซับซ้อนในสถานการณ์ใหม่

3. ความหมายของลำดับ [3]

ลำดับ หมายถึง ฟังก์ชันที่มีโดเมน เป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่า ลำดับจำกัด และเรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่า ลำดับอนันต์

ในการเขียนลำดับ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน กล่าวคือ ถ้า a เป็นลำดับ ซึ่ง $a(1) = a_1, a(2) = a_2, a(3) = a_3, \dots, a(n) = a_n$ แล้ว

กรณี a เป็นลำดับจำกัด เขียนแทนลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

กรณี a เป็นลำดับอนันต์ เขียนแทนลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

\vdots

a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

4. กิจกรรม Cube and Sequence

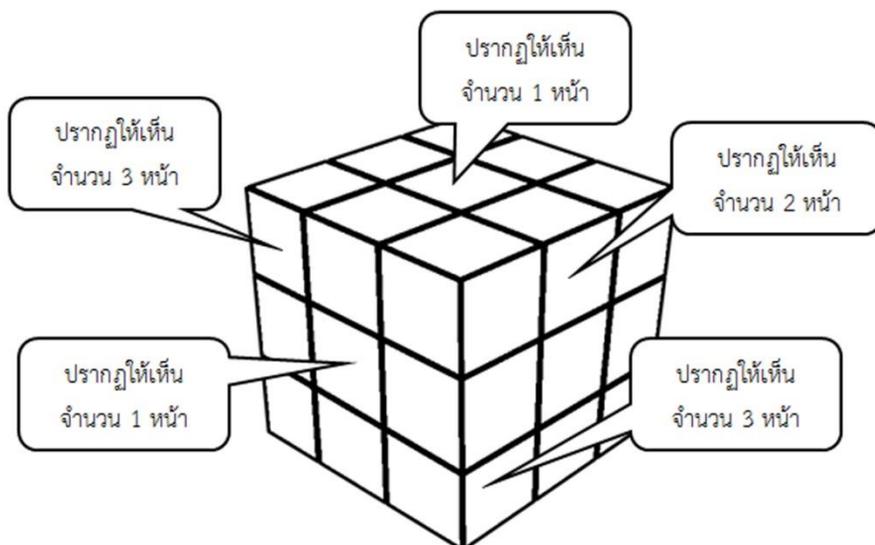
กิจกรรม Cube and Sequence เป็นกิจกรรมที่ผู้เขียนประยุกต์มาจากโจทย์ปัญหาของ Larson and Falvo [6] ที่เน้นการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ครูผู้จัดกิจกรรมจะไม่แสดงจำนวนให้นักเรียนหาพจน์ทั่วไปของลำดับในทันที แต่จะใช้ลูกบาศก์ขนาดต่าง ๆ เป็นสื่อกลาง ซึ่งมีข้อดี คือ นักเรียนจะได้ใช้การสังเกตและการวิเคราะห์ พิจารณาจนได้จำนวนที่ต้องการ และนำมาสู่การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ โดยนำเสนอสาระของกิจกรรมการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นำมาเชื่อมโยง รวมทั้งแนวทางจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนี้

4.1 สาระของกิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรม Cube and Sequence เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนหาพจน์ทั่วไปของลำดับ แต่ก่อนที่จะหาพจน์ทั่วไปนั้น นักเรียนจะต้องทำการวิเคราะห์เกี่ยวกับจำนวนหน้า ที่ปรากฏของลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ที่ประกอบกันเป็นลูกบาศก์ขนาด $3 \times 3 \times 3$ หน่วย ดังรูปที่ 4.1

ประเด็นที่ต้องการให้นักเรียนหาคำตอบ คือ

- 1) มีลูกบาศก์ที่ไม่มีหน้าปรากฏเลย (0 หน้า) จำนวนกี่ลูก
- 2) มีลูกบาศก์ที่มีหน้าปรากฏอยู่ 1 หน้า จำนวนกี่ลูก
- 3) มีลูกบาศก์ที่มีหน้าปรากฏอยู่ 2 หน้า จำนวนกี่ลูก และ
- 4) มีลูกบาศก์ที่มีหน้าปรากฏอยู่ 3 หน้า จำนวนกี่ลูก

รูปที่ 4.1 การวิเคราะห์จำนวนหน้าของลูกบาศก์ขนาด $3 \times 3 \times 3$ หน่วย

ในปัญหาเริ่มต้นของกิจกรรมการเรียนรู้นี้ นักเรียนสามารถหาคำตอบได้โดยการแจงนับได้ว่า คำตอบของข้อ 1) ข้อ 2) ข้อ 3) และข้อ 4) คือ 1, 6, 12 และ 8 ตามลำดับ ซึ่งอาจพบในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ว่านักเรียน หาลูกบาศก์ที่ไม่ปรากฏหน้าให้เห็นเลย (0 หน้า) ไม่เจอ

ตารางที่ 4.1 จำนวนหน้าของลูกบาศก์ที่ปรากฏให้เห็นของลูกบาศก์ขนาด

 $3 \times 3 \times 3, 4 \times 4 \times 4, 5 \times 5 \times 5, 6 \times 6 \times 6$ และ $7 \times 7 \times 7$ หน่วย

ลูกบาศก์ขนาด (หน่วย)	จำนวนหน้าของลูกบาศก์ที่ปรากฏให้เห็น			
	0 หน้า	1 หน้า	2 หน้า	3 หน้า
$3 \times 3 \times 3$	1	6	12	8
$4 \times 4 \times 4$	8	24	24	8
$5 \times 5 \times 5$	27	54	36	8
$6 \times 6 \times 6$	64	96	48	8
$7 \times 7 \times 7$	125	150	60	8

เกิดจากจำนวนยกกำลัง ได้แก่ ลำดับที่ 1 เป็นต้น และสุดท้ายให้นักเรียนหาพจน์ทั่วไปของลำดับ ซึ่ง จะพบว่า

ลำดับที่ 1 : 1, 8, 27, 64, ...	มีพจน์ทั่วไป คือ $a_n = n^3$
ลำดับที่ 2 : 6, 24, 54, 96, ...	มีพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 6n^2$
ลำดับที่ 3 : 12, 24, 36, 48, ...	มีพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 12n$
ลำดับที่ 4 : 8, 8, 8, 8, ...	มีพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 8$

4.2 สารการเรียนรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นำมาเชื่อมโยง

1. การมองภาพในสามมิติ นักเรียนจะต้องอาศัยการมองภาพในสามมิติและการจินตนาการถึง การมีอยู่เชิงนามธรรม สำหรับการแยกแยะสิ่งที่ต้องการและไม่ต้องการซึ่งปะปนอยู่ในองค์ประกอบ เดียวกัน

2. แบบรูปของจำนวน นักเรียนจะต้องวิเคราะห์ชุดของจำนวนที่ได้ เพื่อหาพจน์ทั่วไปของลำดับ หากนักเรียนสังเกตและหาความสัมพันธ์ของแบบรูปได้ นักเรียนก็จะสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับ ได้โดยง่าย

3. ลำดับ และการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ นักเรียนจะต้องทำการเปรียบเทียบพจน์ทั่วไปของ ลำดับกับแบบรูปของจำนวนที่มีความคล้ายคลึงกัน

4.3 แนวทางจัดกิจกรรมการเรียนรู้

เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ประสบผลสำเร็จตามจุดมุ่งหมายของกิจกรรมที่กำหนด นั้นคือ การส่งเสริมให้นักเรียนใช้ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาคำตอบ ที่ต้องการ และสนองต่อศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกัน ครูผู้จัดกิจกรรมอาจใช้รูปแบบ วิธีการ หรือเทคนิคการจัด การเรียนรู้ที่เหมาะสมกับนักเรียน หรืออาจใช้แนวทางการจัดการเรียนรู้ดังต่อไปนี้ (เวลาจัดกิจกรรม 50 นาที)

ชั้นนำเข้าสู่กิจกรรม

1. ครูทบทวนความหมายและการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยให้นักเรียนร่วมกันอภิปราย
2. ครูทบทวนความรู้ในเรื่องรูปเรขาคณิตสามมิติถึงลักษณะที่เพิ่มเติมจากรูปเรขาคณิต สองมิติ และให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันถึงลักษณะของลูกบาศก์ เช่น อย่งไรถึงเรียกว่าลูกบาศก์ เหตุใดปริมาตรของลูกบาศก์จึงมีหน่วยเป็น หน่วย³ เป็นต้น

3. จากคำถามในข้อ 2 ให้นักเรียนพิจารณาว่าหากมีลูกบาศก์ที่มีขนาด 1 หน่วย จำนวน 27 ลูก นักเรียนสามารถนำมาวางประกอบกันเป็นลูกบาศก์ขนาดใหญ่ได้บ้าง อย่างไร และในการประกอบลูกบาศก์จำนวน 27 ลูก นักเรียนจะพบว่าลูกบาศก์บางลูกถูกซ่อนอยู่ด้านใน บางลูกแสดงให้เห็นเพียงหน้าเดียว เป็นต้น

ขั้นจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูแสดงภาพลูกบาศก์ขนาด $3 \times 3 \times 3$ หน่วย ที่เกิดจากการประกอบกันของลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ให้นักเรียนพิจารณาและหาว่า

- 1) มีลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ที่ไม่มีหน้าปรากฏเลยจำนวนกี่ลูก
- 2) มีลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ที่มีหน้าปรากฏอยู่ 1 หน้า จำนวนกี่ลูก
- 3) มีลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ที่มีหน้าปรากฏอยู่ 2 หน้า จำนวนกี่ลูก และ
- 4) มีลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ที่มีหน้าปรากฏอยู่ 3 หน้า จำนวนกี่ลูก

2. เมื่อนักเรียนได้คำตอบแล้ว ครูให้นักเรียนหาคำตอบจากคำถาม “ในลักษณะเดียวกันของลูกบาศก์ขนาด $9 \times 9 \times 9$ หน่วย

- 1) มีลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ที่ไม่มีหน้าปรากฏเลยจำนวนกี่ลูก
- 2) มีลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ที่มีหน้าปรากฏอยู่ 1 หน้า จำนวนกี่ลูก
- 3) มีลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย ที่มีหน้าปรากฏอยู่ 2 หน้า จำนวนกี่ลูก และ
- 4) มีลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วยที่มีหน้าปรากฏอยู่ 3 หน้า จำนวนกี่ลูก”

(ขั้นนี้นักเรียนจะพบปัญหาว่าไม่สามารถวาดภาพลูกบาศก์ขนาด $9 \times 9 \times 9$ หน่วย ได้โดยง่าย นั่นคือไม่สามารถใช้การสังเกตในการหาคำตอบได้นั่นเอง) ครูผู้จัดกิจกรรมอาจแนะนำให้นักเรียนพิจารณาจากส่วนย่อยของปัญหา โดยให้หาคำตอบจากลูกบาศก์ขนาด $4 \times 4 \times 4$ หน่วย ขนาด $5 \times 5 \times 5$ หน่วย หรือ $6 \times 6 \times 6$ หน่วย ก่อน เป็นต้น พร้อมกับแจกเอกสารที่แสดงตารางที่ 4.1 ให้นักเรียนใช้พิจารณา

3. เมื่อนักเรียนหาคำตอบและเติมลงในตารางที่ 4.1 สมบูรณ์แล้ว ซึ่งพบว่าจำนวนในแต่ละหลักเรียงต่อกันเป็นแบบรูปของจำนวน ให้นักเรียนวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกิดขึ้นกับจำนวนที่แสดงขนาดของลูกบาศก์ในหลักที่ 1 และหาสูตรทั่วไปของจำนวนหน้าของลูกบาศก์ที่ปรากฏให้เห็นในรูปของตัวแปร m สำหรับลูกบาศก์ขนาด $m \times m \times m$ หน่วย เมื่อ $m = 3, 4, 5, \dots$

4. ให้นักเรียนสังเกตจำนวนในหลักที่ 2 ถึงหลักที่ 5 ของตารางที่ 4.1 ซึ่งได้เติมคำตอบอย่างสมบูรณ์แล้ว ซึ่งจะเห็นว่าเกิดชุดของจำนวนที่เรียงกันเป็นลำดับจำนวน 4 ลำดับ ให้นักเรียนใช้ความรู้ เรื่อง ลำดับ หาจงนทั่วไป (a_n) ของลำดับทั้งสี่

ขั้นสรุปกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่า “การเติมคำตอบลงในตารางที่ 4.1 ให้สมบูรณ์และถูกต้อง นักเรียนต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องใด หรือมีวิธีการคิดอย่างไรบ้าง” (อาจปรับเป็นคำถามนำ เช่น “นักเรียนใช้การมองภาพในสามมิติอย่างไร” หรือ “นักเรียนมีการใช้แบบรูปมาช่วยในการหาคำตอบหรือไม่”)

2. ครูใช้การอภิปรายและสอบถามนักเรียนเกี่ยวกับลำดับที่เกิดขึ้นในตารางที่ 4.1 เช่น “นักเรียนเรียกลำดับ 8, 8, 8, 8, ... ว่าอย่างไร” (ลำดับที่เป็นค่าคงตัว) “มีลำดับที่เป็นพหุคูณของจำนวนหรือไม่” (ลำดับ 12, 24, 36, 48, ...) หรือ “ลักษณะของลำดับ 1, 8, 27, 64, ... เป็นอย่างไร” (เกิดจากการยกกำลังสาม) เป็นต้น

3. ครูใช้คำถาม “หากนักเรียนไม่มีความรู้ เรื่อง ลำดับ นักเรียนจะใช้วิธีการใดมาหาคำตอบที่เราต้องการ” เพื่อให้นักเรียนเห็นความสำคัญของสาระการเรียนรู้ เรื่อง ลำดับ ที่นักเรียนเรียนอยู่

5. สรุป

การจัดกิจกรรม Cube and Sequence จะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้โดยการสังเกต วิเคราะห์ และตั้งคำถามที่นำไปสู่คำตอบที่ต้องการโดยอาศัยทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหา นักเรียนได้เรียนรู้และเข้าใจว่าความรู้หรือทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เรื่องหนึ่งจะเป็นพื้นฐานก่อให้เกิดความรู้หรือทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เรื่องใหม่ รวมทั้งตระหนักว่าเนื้อหาคณิตศาสตร์ไม่สามารถแยกออกจากกันได้โดยสิ้นเชิง และเข้าใจธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] จีราวรรณ ใจเรื่อน และพรทิพย์ โรจนศิริพิศาล. (2559). การใช้คำถามเพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 22 (AMM 2017). เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

- Jairean, J. & Rotsiraphisan, P. (2016). Using Questions to Promote Mathematical Connection Skills of Mathayomsuksa Five Students. *The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM 2017)*. Chiang Mai: Chiang Mai University.
- [2] สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตร.
- Office of the Basic Education Commission. (2017). *Indicators and Core Content in Mathematics Learning Group (Revised Edition B.E. 2560) in Accordance with the Basic Education Foundation Curriculum, B.E. 2551*. Bangkok: Sahagornkankaset Printing House.
- [3] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2011). *Textbook for Additional Subjects in Mathematics, Volume 6, Grade 10-12*. Bangkok: Printing of Office of the Welfare Promotion Commission for Teachers and Education Personnel, Lat Phrao.
- [4] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์พัฒนาคุณภาพวิชาการ.
- Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012). *Mathematical Skills and Processes*. Bangkok: Pattanakunnapapwichagan Publication.
- [5] อัมพร ม้าคอง. (2553). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Makhanong, A. (2010). *Mathematical Skills and Processes: Development for Development*. Bangkok: Chulalongkorn University Printing House.
- [6] Larson, R. and Falvo, D. C. (2011). *Precalculus with Limits*. Pennsylvania: Charlie Van Wagner.