



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(702) กันยายน – ธันวาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของ

กราฟดัมเบลและกราฟไม้พาย

Edge-odd Graceful Labelings for

Dumbbell Graph and Paddle Graph

ลลิภัทร ชนูดหอม¹ ทศติญา แก่นแก้ว² ภัทธรวดี หอมสมบัติ³ ณฐภัทร ลอยแก้ว^{4,*} และอาธิติญา สูงสุด⁵

^{1,2,3,4,5}โรงเรียนปทุมคงคา สมุทรปราการ สมุทรปราการ 10280

Laliphat Chanoodhom¹ Tattiya Keankeaw² Phattharawadi Homsombat³

Nathaphat Loykaew^{4,*} and Artitiya Soongsud⁵

^{1,2,3,4,5}Patumkongka Samutprakan School, Samutprakan 10280

Email: ¹laliphat8482@gmail.com ²tattiya2524@gmail.com ³phattarawadee189@gmail.com

⁴jinnynapat@gmail.com ⁵artitiya.bell@gmail.com

วันที่รับบทความ : 3 กุมภาพันธ์ 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 6 มีนาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 17 เมษายน 2563

บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟดัมเบลและกราฟไม้พายตามลำดับ ซึ่งกราฟดัมเบลสร้างจากกราฟวง C_n สองกราฟเชื่อมต่อกันด้วยเส้นเชื่อมหนึ่งเส้น เมื่อ $n \geq 3$ และ กราฟไม้พายสร้างจากกราฟพัด F_n สองกราฟเชื่อมต่อกันด้วยเส้นเชื่อมหนึ่งเส้น เมื่อ $n \geq 2$ แล้ว

* ผู้เขียนหลัก

พิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม n ที่ $n \geq 3$ การกำกับบนเส้นเชื่อมของกราฟดัมเบลที่สร้างเป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงาม และสำหรับจำนวนเต็มคี่ n ที่ $n \geq 3$ การกำกับบนเส้นเชื่อมของกราฟไม้พายที่สร้างเป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงาม

คำสำคัญ: กราฟวง กราฟพัด การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงาม

ABSTRACT

This article construct edge-odd labelings for dumbbell graph and paddle graph, respectively. The dumbbell graph is constructed by connecting two cycle graphs C_n by an edge, for $n \geq 3$ and the paddle graph is constructed by connecting two fan graphs F_n by an edge, for $n \geq 2$. We then proof that the constructed labelings are an edge-odd graceful labeling of the dumbbell graph for $n \geq 3$ and an edge-odd graceful labeling of the paddle graph for odd integers n such that $n \geq 3$.

Keywords: Cycle graph, Fan graph, Edge-odd graceful labeling

1. บทนำ

ให้ $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟเชิงเดียวที่มี $V(G)$ เป็นเซตของจุดยอด และ $E(G)$ เป็นเซตของเส้นเชื่อมที่มีจำนวน q เส้น ในปี ค.ศ.1967 Rosa [5] ได้ให้บทนิยามของการกำกับอย่างสวยงามของ G ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f จาก $V(G)$ ไปยัง $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ ที่ทำให้การกำกับบนเส้นเชื่อม $uv \in E(G)$ แต่ละเส้นที่กำหนดโดย $|f(u) - f(v)|$ แตกต่างกันทั้งหมด ต่อมาในปี ค.ศ.1991 Gnanajothi [4] ได้ให้บทนิยามของการกำกับจำนวนคี่อย่างสวยงามของ G ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f จาก $V(G)$ ไปยัง $\{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\}$ ที่ทำให้การกำกับบนเส้นเชื่อม $uv \in E(G)$ แต่ละเส้นที่กำหนดโดย $|f(u) - f(v)|$ เป็นตัวเลขใน $\{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด และในปี ค.ศ.2009 Solairaju และ Chithra [7] ได้ให้บทนิยามของการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมที่คล้ายเป็นปัญหาผกผันของการกำกับจำนวนคี่อย่างสวยงามของ G ที่นิยามโดย Gnanajothi [4] ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 [7] การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟ $G = (V(G), E(G))$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง $f: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$ ที่เหนี่ยวนำให้ฟังก์ชัน

$$f^+(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \pmod{2q}$$

สำหรับจุดยอด v ใด ๆ ใน $V(G)$ เป็นจำนวนใน $\{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\}$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด

Solairaju และ Chithra [7] ได้สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟต้นไม้ฮอปแมน $P_n \Theta P_2$ เมื่อ $n \geq 2$ กราฟไบสตาร์ $B_{n,n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ กราฟ $\langle K_{1,n}: 2 \rangle$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ กราฟดับเบิลสตาร์ $K_{1,n,n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 2$ ซึ่งทั้งหมดเป็นกราฟที่เกี่ยวข้องกับกราฟวิถี ต่อมาในปี ค.ศ.2013 Singhun [6] ได้สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟ $SF(n, m)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับและ $m = 1$ หรือ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ และ m เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n|m$ และการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟล้อ W_n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ซึ่งเป็นกราฟที่เกี่ยวข้องกับกราฟวิถีและกราฟวง และในปีเดียวกันนี้ Wongpradit และ คณะ [8] ได้สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟปริซึมของวง C_n เมื่อ $n \geq 3$ และกราฟเพลลา $\text{Shaft}(n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ ต่อมาในปี ค.ศ.2015 Boonklurb และ คณะ [3] ได้สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟปริซึมของสตาร์ S_n เมื่อ $n \geq 3$ กราฟ $\text{Prism}_3(S_n)$ เมื่อ $n \geq 3$ และ $n \equiv 2 \pmod{6}$ และกราฟ $\text{Prism}(W_n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 4$ ซึ่งกราฟที่พิจารณาใน Boonklurb และ คณะ [3] และ Wongpradit และ คณะ [8] สร้างจากการคัดลอกกราฟเดิมสองหรือสามรูป แล้วเชื่อมจุดยอดที่สมนัยกันของกราฟที่คัดลอกเหล่านั้นไว้ด้วยเส้นเชื่อม และในปีเดียวกัน ศิริรัตน์ สิงห์นต์ [1] ได้สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟว่าว $(n, m) - \text{kite}$ เมื่อ $n \geq 3$ และ $m = 1$ หรือ 2 และกราฟพัด F_n เมื่อ $n = 2, 3$ และ $n \equiv 1 \pmod{4}$

บทความฉบับนี้ได้แรงบันดาลใจจาก ศิริรัตน์ สิงห์นต์ [1] Boonklurb และ คณะ [3] และ Wongpradit และ คณะ [8] โดยพิจารณากราฟที่เกิดจากการคัดลอกกราฟวง และกราฟที่เกิดจากการคัดลอกกราฟพัด แล้วเชื่อมทั้งสองกราฟนี้ด้วยเส้นเชื่อมหนึ่งเส้น โดยนิยามกราฟทั้งสองนี้ว่ากราฟดัมเบล และกราฟไม้พายตามลำดับ ในที่นี้จึงขอให้บทนิยามสำหรับกราฟวง กราฟวิถี กราฟพัด กราฟดัมเบล และกราฟไม้พายดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2

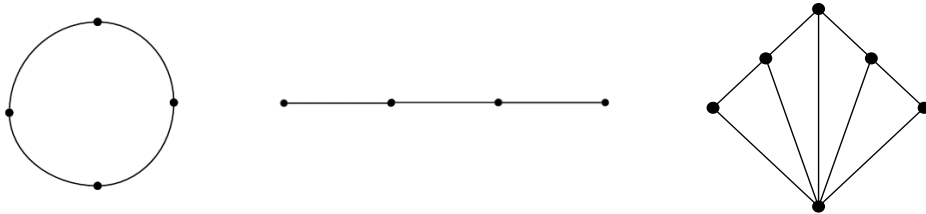
(i) [2] ให้ $n \geq 3$ กราฟวง C_n เป็นกราฟที่มีจุดยอด n จุด และมีเส้นเชื่อม n เส้น โดยจุดยอดสามารถวางเรียงตัวเป็นเส้นรอบวงของวงกลม และจุดยอดสองจุดมีเส้นเชื่อมหากันก็ต่อเมื่อทั้งสองจุดนั้นวางอยู่ติดกันบนเส้นรอบวง

(ii) [2] ให้ n เป็นจำนวนนับ กราฟวิถี P_n เป็นกราฟที่มีจุดยอด n จุด โดยจุดเหล่านั้นสามารถวางเรียงต่อกันเป็นเส้น และจุดยอดสองจุดมีเส้นเชื่อมหากันก็ต่อเมื่อทั้งสองจุดนั้นวางอยู่ติดกันบนเส้น

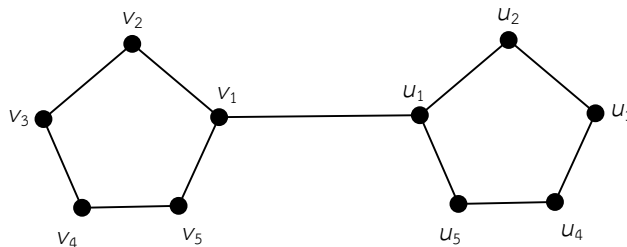
(iii) [2] ให้ $n \geq 2$ กราฟพัด F_n เป็นกราฟที่ประกอบด้วยกราฟวิถี P_n และจุดยอดอีกหนึ่งจุด โดยจุดยอดจุดนี้มีเส้นเชื่อมไปหาจุดยอดทุกจุดบน P_n

(iv) ให้ $n \geq 3$ กราฟดัมเบล $Dumbbell(n)$ เป็นกราฟประกอบด้วยกราฟวง C_n สองกราฟ โดยจุดยอดบน C_n รูปหนึ่งชื่อ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ เรียงตัวในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จุดยอดบน C_n อีกรูปหนึ่งชื่อ $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ เรียงตัวในทิศทางตามเข็มนาฬิกา และมีเส้นเชื่อมระหว่าง v_1 และ u_1

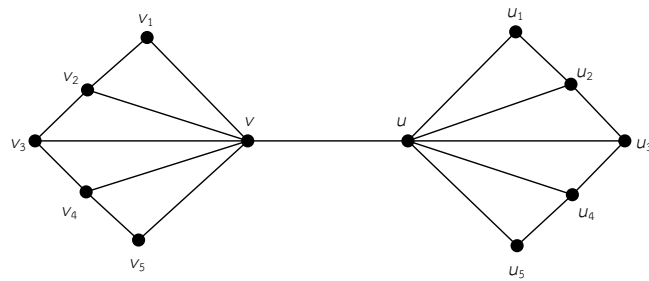
(v) ให้ $n \geq 3$ กราฟไม้พาย $Paddle(n)$ เป็นกราฟประกอบด้วยกราฟพัด F_n สองกราฟ โดยจุดยอดบน F_n รูปหนึ่งชื่อ $v, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ เรียงตัวในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และ v มีเส้นเชื่อมไปหา $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ จุดยอดบน F_n อีกรูปหนึ่งชื่อ $u, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ เรียงตัวในทิศทางตามเข็มนาฬิกา และ u มีเส้นเชื่อมไปหา $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ และมีเส้นเชื่อมระหว่าง v และ u



รูปที่ 1.1 กราฟวง C_4 กราฟวิถี P_4 และกราฟพัด F_5



รูปที่ 1.2 กราฟดัมเบล $Dumbbell(5)$



รูปที่ 1.3 กราฟไม้พาย Paddle(5)

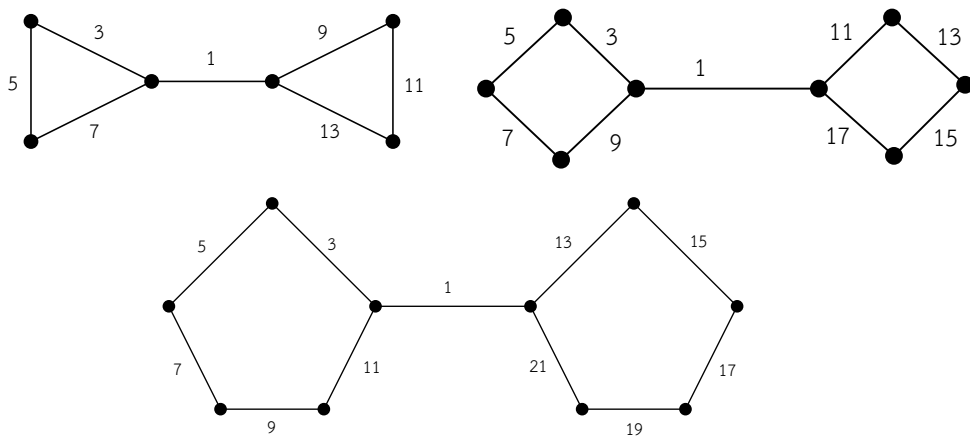
สังเกตว่า $|E(\text{Dumbbell}(n))| = 2n + 1$ และ $|E(\text{Paddle}(n))| = 4n - 1$

2. การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟดั้มเบล $\text{Dumbbell}(n)$

สำหรับ $n \geq 3$ สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟดั้มเบล $\text{Dumbbell}(n)$ ซึ่งคือฟังก์ชัน $f: E(\text{Dumbbell}(n)) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 4n + 1\}$ โดยขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

ขั้นตอนวิธี 2.1

- (i) $f(v_1u_1) = 1$
- (ii) $f(v_iv_{i+1}) = 2i + 1$ เมื่อ $1 \leq i \leq n - 1$
- (iii) $f(v_1v_n) = 2n + 1$
- (iv) $f(u_iu_{i+1}) = 2n + 2i + 1$ เมื่อ $1 \leq i \leq n - 1$
- (v) $f(u_1u_n) = 4n + 1$



รูปที่ 2.1 การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟดั้มเบล $\text{Dumbbell}(3)$, $\text{Dumbbell}(4)$ และ $\text{Dumbbell}(5)$ โดยขั้นตอนวิธี 2.1

ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับ $n \geq 3$ การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟดัมเบล $\text{Dumbbell}(n)$ ที่สร้างโดยขั้นตอนวิธี 2.1 เป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟดัมเบล $\text{Dumbbell}(n)$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดจากขั้นตอนวิธี 2.1 ว่า

$$\begin{aligned} f(E(\text{Dumbbell}(n))) &= \{f(v_1u_1)\} \cup \{f(v_iv_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(v_1v_n)\} \\ &\quad \cup \{f(u_iu_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(u_1u_n)\} \\ &= \{1\} \cup \{3, 5, 7, \dots, 2n-1\} \cup \{2n+1\} \\ &\quad \cup \{2n+3, 2n+5, 2n+7, \dots, 4n-1\} \cup \{4n+1\} \\ &= \{1, 3, 5, \dots, 4n+1\} \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $E(\text{Dumbbell}(n))$ ไปทั่วถึง $\{1, 3, 5, \dots, 4n+1\}$

เนื่องจาก $|E(\text{Dumbbell}(n))| = |\{1, 3, 5, \dots, 4n+1\}| = 2n+1$ ทำให้ f เป็นฟังก์ชันสมนัย
หนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(\text{Dumbbell}(n))$ ไปทั่วถึง $\{1, 3, 5, \dots, 4n+1\}$

ต่อมาให้ $w \in V(\text{Dumbbell}(n))$

กรณี $w = v_1$ โดยขั้นตอนวิธี 2.1 (i), (ii) และ (iii) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f^+(v_1)\} \\ &= \{(f(v_1u_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_n)) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{(1 + 3 + 2n + 1) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{2n+5\} \end{aligned}$$

กรณี $w = v_i$ เมื่อ $2 \leq i \leq n-1$ โดยขั้นตอนวิธี 2.1 (ii) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_2 &= \{f^+(v_i) \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{(f(v_{i-1}v_i) + f(v_iv_{i+1})) \pmod{4n+2} \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{(2(i-1) + 1 + 2i + 1) \pmod{4n+2} \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{4i \mid 2 \leq i \leq n-1\} \end{aligned}$$

กรณี $w = v_n$ โดยขั้นตอนวิธี 2.1 (ii) และ (iii) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_3 &= \{f^+(v_n)\} \\ &= \{(f(v_{n-1}v_n) + f(v_1v_n)) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{(2(n-1) + 1 + 2n + 1) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{4n\} \end{aligned}$$

กรณี $w = u_1$ โดยขั้นตอนวิธี 2.1 (i), (iv) และ (v) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_4 &= \{f^+(u_1)\} \\ &= \{(f(v_1u_1) + f(u_1u_2) + f(u_1u_n)) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{(1 + 2n + 3 + 4n + 1) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{2n+3\} \end{aligned}$$

กรณี $w = u_i$ เมื่อ $2 \leq i \leq n-1$ โดยขั้นตอนวิธี 2.1 (iv) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_5 &= \{f^+(u_i) | 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{(f(u_{i-1}u_i) + f(u_i u_{i+1})) \pmod{4n+2} | 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{(2n+2(i-1)+1+2n+2i+1) \pmod{4n+2} | 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{4i-2 | 2 \leq i \leq n-1\} \end{aligned}$$

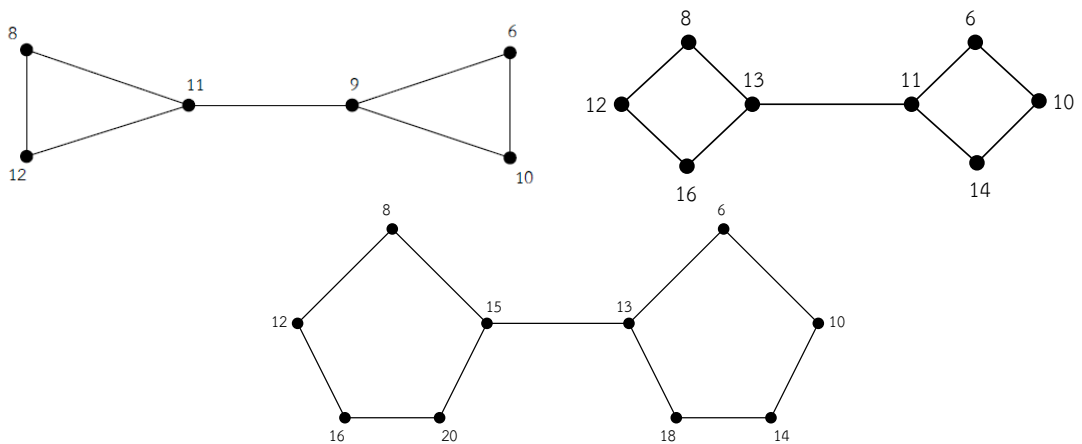
กรณี $w = u_n$ โดยขั้นตอนวิธี 2.1 (iv) และ (v) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_6 &= \{f^+(u_n)\} \\ &= \{(f(u_{n-1}u_n) + f(u_1 u_n)) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{(2n+2(n-1)+1+4n+1) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{4n-2\} \end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่า $A_1 \cap A_3 = \emptyset$, $A_1 \cap A_4 = \emptyset$, $A_1 \cap A_6 = \emptyset$, $A_3 \cap A_4 = \emptyset$, $A_3 \cap A_6 = \emptyset$ และ $A_4 \cap A_6 = \emptyset$ ต่อมาสังเกตว่าสมาชิกใน A_1 และ A_4 เป็นจำนวนเต็มคี่ แต่สมาชิกใน A_2 และ A_5 เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_5 = \emptyset$, $A_2 \cap A_4 = \emptyset$ และ $A_4 \cap A_5 = \emptyset$ และสังเกตว่า $\max_{2 \leq i \leq n-1} A_2 = 4n-4 < 4n-2 < 4n$ และ $\max_{2 \leq i \leq n-1} A_5 = 4n-6 < 4n-2 < 4n$

ดังนั้น $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, $A_2 \cap A_6 = \emptyset$, $A_3 \cap A_5 = \emptyset$ และ $A_5 \cap A_6 = \emptyset$

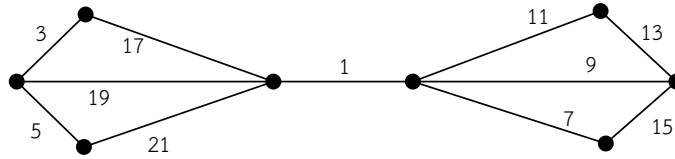
สุดท้ายสังเกตว่าสมาชิกทุกตัวใน A_2 หารด้วย 4 ลงตัว แต่สมาชิกทุกตัวใน A_5 หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 2 ดังนั้น $A_2 \cap A_5 = \emptyset$ ทำให้ได้ว่าการกำกับ f^+ บนจุดยอดเป็นจำนวนใน $\{0, 1, 2, \dots, 4n+2\}$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด จึงได้ว่าการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟดัมเบล $Dumbbell(n)$ ที่สร้างโดยขั้นตอนวิธี 2.1 เป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟดัมเบล $Dumbbell(n)$ □



รูปที่ 2.2 การกำกับการกำกับ f^+ บนจุดยอดของกราฟดัมเบล $Dumbbell(3)$, $Dumbbell(4)$ และ $Dumbbell(5)$ โดยขั้นตอนวิธี 2.1

3. การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(n)$

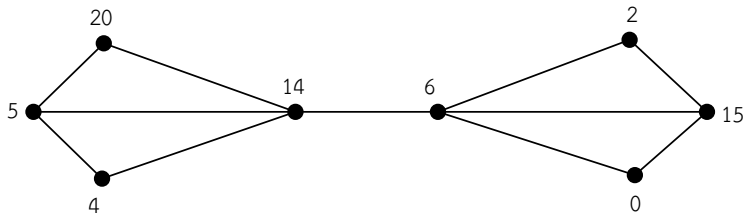
สำหรับ $n = 3$ สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อม $f: E(\text{Paddle}(3)) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 21\}$ ของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(3)$ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(3)$

ให้ $v \in V(\text{Paddle}(3))$

ตรวจสอบการกำกับบนจุดยอด $f^+(v) = \sum_{uv \in E(\text{Paddle}(3))} f(uv) \pmod{22}$ จะได้การกำกับบนจุดยอดของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(3)$ ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การกำกับบนจุดยอดของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(3)$

จะเห็นว่าที่แต่ละจุดยอดของ $\text{Paddle}(3)$ การกำกับบนจุดยอดของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(3)$ ดังรูปที่ 3.2 เป็นจำนวนเต็มใน $\{0, 1, 2, \dots, 21\}$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด ดังนั้น การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อม f ดังรูปที่ 3.1 เป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(3)$

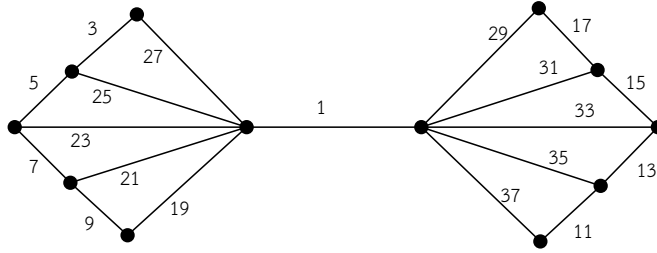
สำหรับ $n \geq 4$ สร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(n)$ ซึ่งคือ ฟังก์ชัน $f: E(\text{Paddle}(n)) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 8n - 3\}$ โดยขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

ขั้นตอนวิธี 3.1

- (i) $f(vu) = 1$
- (ii) $f(v_i v_{i+1}) = 2i + 1$ เมื่อ $1 \leq i \leq n - 1$
- (iii) $f(u_i u_{i+1}) = 2n + 2i - 1$ เมื่อ $1 \leq i \leq n - 1$

$$(iv) f(vv_i) = 6n - 2i - 1 \text{ เมื่อ } 1 \leq i \leq n$$

$$(v) f(uu_i) = 8n - 2i - 1 \text{ เมื่อ } 1 \leq i \leq n$$



รูปที่ 3.3 การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟไม้พาย Paddle(5) โดยขั้นตอนวิธี 3.1

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับจำนวนเต็มคี่ n ที่ $n \geq 3$ การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟไม้พาย Paddle(n) ที่สร้างโดยขั้นตอนวิธี 3.1 เป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟไม้พาย Paddle(n)

บทพิสูจน์ จากรูปที่ 3.2 เราทราบแล้วว่าการกำกับบนเส้นเชื่อมของกราฟไม้พาย Paddle(3) เป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟไม้พาย Paddle(3)

ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ เห็นได้ชัดจากขั้นตอนวิธี 3.1 ว่า

$$\begin{aligned} f(E(\text{Paddle}(n))) &= \{f(vu)\} \cup \{f(vv_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \\ &\quad \cup \{f(uu_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(vv_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \\ &\quad \cup \{f(uu_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{1\} \cup \{3, 5, 7, \dots, 2n-1\} \cup \{2n+1, 2n+3, 2n+5, \dots, 4n-3\} \\ &\quad \cup \{6n-3, 6n-5, 6n-7, \dots, 4n+1\} \\ &\quad \cup \{8n-3, 8n-5, 8n-7, \dots, 6n-1\} \\ &= \{1, 3, 5, \dots, 8n-3\} \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $E(\text{Paddle}(n))$ ไปทั่วถึง $\{1, 3, 5, \dots, 8n-3\}$

$$\text{เนื่องจาก } |E(\text{Paddle}(n))| = |\{1, 3, 5, \dots, 8n-3\}| = 4n-1$$

ทำให้ f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(\text{Paddle}(n))$ ไปทั่วถึง $\{1, 3, 5, \dots, 8n-3\}$

ให้ $w \in V(\text{Paddle}(n))$

กรณี $w = v$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1 (i) และ (iv) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f^+(v)\} \\ &= \{(f(vu) + \sum_{i=1}^n f(vv_i)) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{(1 + \sum_{i=1}^n (6n-2i-1)) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{(5n^2 - 2n + 1) \pmod{8n-2}\} \end{aligned}$$

กรณี $w = v_1$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1 (ii) และ (iv) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_2 &= \{f^+(v_1)\} \\ &= \{(f(v_1v_2) + f(vv_1)) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{(3 + 6n - 3) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{6n\} \end{aligned}$$

กรณี $w = v_i$ เมื่อ $2 \leq i \leq n-1$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1 (ii) และ (iv) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_3 &= \{f^+(v_i) \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{(f(v_{i-1}v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(vv_i)) \pmod{8n-2} \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{(2(i-1) + 1 + 2i + 1 + 6n - 2i - 1) \pmod{8n-2} \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{6n + 2i - 1 \mid 2 \leq i \leq n-1\} \end{aligned}$$

กรณี $w = v_n$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1 (ii) และ (iv) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_4 &= \{f^+(v_n)\} \\ &= \{(f(v_{n-1}v_n) + f(vv_n)) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{(2n-1 + 4n-1) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{6n-2\} \end{aligned}$$

กรณี $w = u$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1 (i) และ (v) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_5 &= \{f^+(u)\} \\ &= \{(f(vu) + \sum_{i=1}^n f(uu_i)) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{(1 + \sum_{i=1}^n (8n-2i-1)) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{(7n^2 - 2n + 1) \pmod{8n-2}\} \end{aligned}$$

กรณี $w = u_1$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1 (iii) และ (v) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_6 &= \{f^+(u_1)\} \\ &= \{(f(u_1u_2) + f(uu_1)) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{(2n+1 + 8n-3) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{2n\} \end{aligned}$$

กรณี $w = u_i$ เมื่อ $2 \leq i \leq n-1$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1 (iii) และ (v) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_7 &= \{f^+(u_i) \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{(f(u_{i-1}u_i) + f(u_iu_{i+1}) + f(uu_i)) \pmod{8n-2} \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{(2n+2(i-1)-1 + 2n+2i-1 + 8n-2i-1) \pmod{8n-2} \mid 2 \leq i \leq n-1\} \\ &= \{4n+2i-3 \mid 2 \leq i \leq n-1\} \end{aligned}$$

กรณี $w = u_n$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1 (iii) และ (v) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_8 &= \{f^+(u_n)\} \\ &= \{(f(u_{n-1}u_n) + f(uu_n)) \pmod{8n-2}\} \\ &= \{(4n-3 + 6n-1) \pmod{4n+2}\} \\ &= \{2n-2\} \end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่า $A_2 \cap A_4 = \emptyset$, $A_2 \cap A_6 = \emptyset$, $A_2 \cap A_8 = \emptyset$, $A_4 \cap A_6 = \emptyset$, $A_4 \cap A_8 = \emptyset$ และ $A_6 \cap A_8 = \emptyset$

ต่อมาสังเกตว่า $\min_{2 \leq i \leq n-1} A_3 = 6n + 3 > 6n$

$$\begin{aligned} &> 6n - 2 \\ &> 6n - 5 \left(= \max_{2 \leq i \leq n-1} A_7 \right) \\ &> 4n + 1 \left(= \min_{2 \leq i \leq n-1} A_7 \right) \\ &> 2n \\ &> 2n - 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_2 \cap A_3 = \emptyset, A_2 \cap A_7 = \emptyset, A_3 \cap A_4 = \emptyset, A_3 \cap A_6 = \emptyset, A_3 \cap A_7 = \emptyset, A_3 \cap A_8 = \emptyset,$
 $A_4 \cap A_7 = \emptyset, A_6 \cap A_7 = \emptyset$ และ $A_7 \cap A_8 = \emptyset$

ต่อมาสมมติว่า มี i ที่ $2 \leq i \leq n-1$ และ $5n^2 - 2n + 1 \equiv 6n + 2i - 1 \pmod{8n - 2}$ หรือ
 $5n^2 - 2n + 1 \equiv 4n + 2i - 3 \pmod{8n - 2}$ หรือ $7n^2 - 2n + 1 \equiv 6n + 2i - 1 \pmod{8n - 2}$
 หรือ $7n^2 - 2n + 1 \equiv 4n + 2i - 3 \pmod{8n - 2}$ จะได้ว่า $8n - 2 \mid 5n^2 - 8n - 2i + 2$ หรือ
 $8n - 2 \mid 5n^2 - 6n - 2i + 4$ หรือ $8n - 2 \mid 7n^2 - 8n - 2i + 2$ หรือ $8n - 2 \mid 7n^2 - 6n - 2i + 4$
 เนื่องจาก $8n - 2$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $5n^2 - 8n - 2i + 2$ หรือ $5n^2 - 6n - 2i + 4$ หรือ
 $7n^2 - 8n - 2i + 2$ หรือ $7n^2 - 6n - 2i + 4$ เป็นจำนวนคู่ด้วย ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ n เป็น
 จำนวนคี่ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $A_1 \cap A_3 = \emptyset, A_1 \cap A_7 = \emptyset, A_3 \cap A_5 = \emptyset$ และ $A_5 \cap A_7 = \emptyset$

จะพิสูจน์ว่า $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

สมมติว่า $5n^2 - 2n + 1 \equiv 6n \pmod{8n - 2}$ นั่นคือ $5n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8n - 2}$

เนื่องจาก $8n - 2 \mid 4n - 1$ ทำให้ $5n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$

เนื่องจาก $5n^2 - 1 = (4n - 1)(4n + 1) - 11n^2$ และ ห.ร.ม. $(4n - 1, n) = 1$

ทำให้ได้ว่า $4n - 1 \mid 11$

แต่เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ $4n - 1 > 11$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

จะพิสูจน์ว่า $A_1 \cap A_4 = \emptyset$

สมมติว่า $5n^2 - 2n + 1 \equiv 6n - 2 \pmod{8n - 2}$ นั่นคือ $5n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{8n - 2}$

เนื่องจาก $8n - 2 \mid 4n - 1$ ทำให้ $5n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$

เนื่องจาก $5n^2 + 1 = -(4n - 1)(4n + 1) + 21n^2$ และ ห.ร.ม. $(4n - 1, n) = 1$

ทำให้ได้ว่า $4n - 1 \mid 21$

แต่เมื่อ $n = 5$ จะได้ $4n - 1 = 19$ ซึ่ง $19 \nmid 21$ และเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$ จะได้ $4n - 1 > 21$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } A_1 \cap A_4 = \emptyset$$

จะพิสูจน์ว่า $A_1 \cap A_5 = \emptyset$

$$\text{สมมติว่า } 5n^2 - 2n + 1 \equiv 7n^2 - 2n + 1 \pmod{8n - 2}$$

$$\text{นั่นคือ } 2n^2 \equiv 0 \pmod{8n - 2}$$

$$\text{เนื่องจาก } 8n - 2 \mid 4n - 1 \text{ ทำให้ } 2n^2 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$$

$$\text{เนื่องจาก } 2n^2 = (4n - 1)n - 2n^2 + n \text{ ทำให้ } 4n - 1 \mid n(2n - 1)$$

$$\text{เนื่องจาก ห.ร.ม.}(4n - 1, n) = 1 \text{ ทำให้ได้ว่า } 4n - 1 \mid 2n - 1$$

แต่เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ $4n - 1 > 2n - 1$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } A_1 \cap A_5 = \emptyset$$

จะพิสูจน์ว่า $A_1 \cap A_6 = \emptyset$

$$\text{สมมติว่า } 5n^2 - 2n + 1 \equiv 2n \pmod{8n - 2}$$

$$\text{เนื่องจาก } 8n - 2 \mid 4n - 1 \text{ นั่นคือ } 5n^2 - 2n + 1 \equiv 2n \pmod{4n - 1}$$

$$\text{ทำให้ } 5n^2 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$$

$$\text{เนื่องจาก } 5n^2 = (4n - 1)n + n^2 + n \text{ ทำให้ } 4n - 1 \mid n(n + 1)$$

$$\text{เนื่องจาก ห.ร.ม.}(4n - 1, n) = 1 \text{ ทำให้ได้ว่า } 4n - 1 \mid n + 1$$

แต่เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ $4n - 1 > n + 1$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } A_1 \cap A_6 = \emptyset$$

จะพิสูจน์ว่า $A_1 \cap A_8 = \emptyset$

$$\text{สมมติว่า } 5n^2 - 2n + 1 \equiv 2n - 2 \pmod{8n - 2}$$

$$\text{เนื่องจาก } 8n - 2 \mid 4n - 1 \text{ นั่นคือ } 5n^2 - 2n + 1 \equiv 2n - 2 \pmod{4n - 1}$$

$$\text{ทำให้ } 5n^2 + 2 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$$

$$\text{เนื่องจาก } 5n^2 + 2 = (4n - 1)(n - 2) + n^2 + 9n \text{ ทำให้ } 4n - 1 \mid n(n + 9)$$

$$\text{เนื่องจาก ห.ร.ม.}(4n - 1, n) = 1 \text{ ทำให้ได้ว่า } 4n - 1 \mid n + 9$$

แต่เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ $4n - 1 > n + 9$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } A_1 \cap A_8 = \emptyset$$

จะพิสูจน์ว่า $A_2 \cap A_5 = \emptyset$

$$\text{สมมติว่า } 7n^2 - 2n + 1 \equiv 6n \pmod{8n - 2}$$

$$\text{นั่นคือ } 7n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8n - 2}$$

$$\text{เนื่องจาก } 8n - 2 \mid 4n - 1 \text{ ทำให้ } 7n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$$

$$\text{เนื่องจาก } 7n^2 - 1 = (4n - 1)(4n + 1) - 9n^2 \text{ และ ห.ร.ม.}(4n - 1, n) = 1$$

$$\text{ทำให้ได้ว่า } 4n - 1 \mid 9 \text{ แต่เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ } n \geq 5 \text{ จะได้ } 4n - 1 > 9 \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

$$\text{ดังนั้น } A_2 \cap A_5 = \emptyset$$

จะพิสูจน์ว่า $A_4 \cap A_5 = \emptyset$

$$\text{สมมติว่า } 7n^2 - 2n + 1 \equiv 6n - 2 \pmod{8n - 2}$$

$$\text{นั่นคือ } 7n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{8n - 2}$$

$$\text{เนื่องจาก } 8n - 2 \mid 4n - 1 \text{ ทำให้ } 7n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$$

$$\text{เนื่องจาก } 7n^2 + 1 = -(4n - 1)(4n + 1) + 23n^2 \text{ และ ห.ร.ม.}(4n - 1, n) = 1$$

ทำให้ได้ว่า $4n - 1 \mid 23$ แต่เมื่อ $n = 5$ จะได้ $4n - 1 = 19$ ซึ่ง $19 \nmid 23$ และเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 7$ จะได้ $4n - 1 > 23$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } A_4 \cap A_5 = \emptyset$$

จะพิสูจน์ว่า $A_5 \cap A_6 = \emptyset$

$$\text{สมมติว่า } 7n^2 - 2n + 1 \equiv 2n \pmod{8n - 2}$$

$$\text{เนื่องจาก } 8n - 2 \mid 4n - 1 \text{ นั่นคือ } 7n^2 - 2n + 1 \equiv 2n \pmod{4n - 1}$$

$$\text{ทำให้ } 7n^2 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$$

$$\text{เนื่องจาก } 7n^2 = (4n - 1)n + 3n^2 + n \text{ ทำให้ } 4n - 1 \mid n(3n + 1)$$

เนื่องจาก ห.ร.ม. $(4n - 1, n) = 1$ ทำให้ได้ว่า $4n - 1 \mid 3n + 1$ แต่เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ $4n - 1 > 3n + 1$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } A_5 \cap A_6 = \emptyset$$

จะพิสูจน์ว่า $A_5 \cap A_8 = \emptyset$

$$\text{สมมติว่า } 7n^2 - 2n + 1 \equiv 2n - 2 \pmod{8n - 2}$$

$$\text{เนื่องจาก } 8n - 2 \mid 4n - 1 \text{ นั่นคือ } 7n^2 - 2n + 1 \equiv 2n - 2 \pmod{4n - 1}$$

$$\text{ทำให้ } 7n^2 + 2 \equiv 0 \pmod{4n - 1}$$

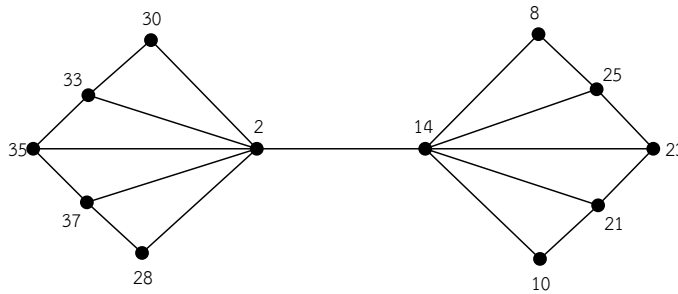
เนื่องจาก $7n^2 + 2 = (4n - 1)(2n - 2) - n^2 + 10n$ ทำให้ $4n - 1 \mid n(n - 10)$

เนื่องจาก ห.ร.ม. $(4n - 1, n) = 1$ ทำให้ได้ว่า $4n - 1 \mid n - 10$ แต่เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ จะได้ $4n - 1 > n - 10$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $A_5 \cap A_8 = \emptyset$

จากการพิจารณาทั้งหมด ทำให้ได้ว่าการกำกับ f^+ บนจุดยอดเป็นจำนวนใน $\{0, 1, 2, \dots, 8n - 3\}$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด จึงได้ว่าเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 5$ การกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(n)$ ที่สร้างโดยขั้นตอนวิธี 3.1 เป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามของกราฟไม้พาย $\text{Paddle}(n)$ $\square$

รูปที่ 3.4 เป็นการกำกับ f^+ บนจุดยอดของกราฟพาย $\text{Paddle}(5)$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1



รูปที่ 3.4 การกำกับ f^+ บนจุดยอดของกราฟพาย $\text{Paddle}(5)$ โดยขั้นตอนวิธี 3.1

4. สรุปและอภิปรายผล

บทความฉบับนี้นำเสนอการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อม 2 แบบ สำหรับกราฟดัมเบล $\text{Dumbbell}(n)$ และกราฟพาย $\text{Paddle}(n)$ ตามลำดับ แล้วพิสูจน์ว่าการกำกับดังกล่าวเป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามสำหรับกราฟดัมเบล $\text{Dumbbell}(n)$ เมื่อ $n \geq 3$ และสำหรับกราฟพาย $\text{Paddle}(n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ โดยที่บทความฉบับนี้เป็นการต่อยอดจากโครงการงานคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ประเภททฤษฎี ที่ได้รับคำแนะนำหัวเรื่องจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศิริรัตน์ สิงห์ตัน มหาวิทยาลัยรามคำแหง โครงการนี้ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการสังเกตจากกรณีย่อย ๆ สร้างข้อคาดการณ์และวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันในการกำกับผ่านการให้เหตุผลแบบอุปนัย แล้วจึงพยายามพิสูจน์ข้อคาดการณ์โดยการให้เหตุผลแบบนิรนัยอย่างรัดกุม ซึ่งน่าจะเป็นตัวอย่างหนึ่งในการทำโครงการงานคณิตศาสตร์ ประเภททฤษฎีอย่างครบวงจร ในช่วงแรก

นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1 ในกรณีทั่วไปได้ และใช้คอมพิวเตอร์ตรวจสอบจนถึง $n = 31$ แต่ได้รับคำชี้แนะจาก อาจารย์ธัชชกฤต แก้วเต็ม และอาจารย์เดี่ยว ใจบุญ โรงเรียนมหิตลวิทยานุสรณ์ จึงทำให้บทพิสูจน์สมบูรณ์ คณะผู้เขียนขอขอบพระคุณอาจารย์ทั้งสองท่านมา ณ ที่นี้ สำหรับผู้ที่สนใจอาจพยายามปรับการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมสำหรับกราฟพาย $Paddle(n)$ เพื่อให้เป็นการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามสำหรับกราฟพาย $Paddle(n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่หรือพิสูจน์ว่าไม่มีทางสร้างการกำกับจำนวนคี่บนเส้นเชื่อมอย่างสวยงามสำหรับกราฟดังกล่าวได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] ศิริรัตน์ สิงห์ตัน. (2558). กราฟเกรซฟูลแบบเส้นเชื่อมที่เป็นจำนวนคี่ที่สัมพันธ์กับวง. รายงานการวิจัย มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
Singhun, S. (2015). Edge-odd Graceful Graphs Related to Cycles. Research Report, Ramkhamhaeng University.
- [2] ศิริรัตน์ สิงห์ตัน. (2560). *ทฤษฎีกราฟ 1*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
Singhun, S. (2017). *Graph Theory 1*. Bangkok: Ramkhamhaeng University Printery.
- [3] Boonklurb, R., Singhun, S. and Wongpradit, A. (2015). Edge-odd Graceful Labelings of some Prisms and Prism-like Graphs, *East-West J. of Mathematics*, 17 (1), p. 33 – 47.
- [4] Gnanajothi, R.B. (1991). *Topics in Graph Theory*. (Doctorak Thesis, Madurai Kamaraj University).
- [5] Rosa, A. (1967). Theory of Graphs, (*International Symposium*, Rome, July 1966), Gordon and Breach, N.Y. and Dunod, Paris, p. 349 – 355.
- [6] Singhun, S. (2013). Graphs with Edge-odd Graceful Labelings, *International Mathematical Forum*, 8 (12), p. 577 – 582.
- [7] Solairaju, A. and Chithra, K. (2009). Edge-odd Graceful Graphs, *Electronic Notes in Discrete Math.*, 33, p. 15 – 20.
- [8] Wongpradit, A., Boonklurb, R. and Singhun, S. (2013). Edge-odd Graceful Labelings of $Prism(C_n)$ and $Shaft(n, 1)$ Graphs, *Proceedings of The 30th National Graduate Research Conference*, p. 23 – 30.