



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66 (705) กันยายน – ธันวาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

เงื่อนไขของเลขโดดในหลักของจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

Conditions of Digit in The Places of Positive Integers Divisible by 7

ธัญยศ จำปาหวาย

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพมหานคร 10300

Thanatyod Jampawai

Division of Mathematics, Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University,
Bangkok 10300

Email: Thanatyod.ja@ssru.ac.th

วันที่รับบทความ : 20 มิถุนายน 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 21 สิงหาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 25 ธันวาคม 2563

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ศึกษาเงื่อนไขของเลขโดดในหลักต่าง ๆ ของจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว ซึ่งพบว่าผลบวกของผลคูณระหว่างเลขโดดในหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย หลักพัน หลักหมื่น หลักแสน หลักล้าน หลักสิบล้าน หลักร้อยล้าน หลักพันล้าน หลักหมื่นล้าน หลักแสนล้าน ... ของจำนวนนั้นกับ $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$ ตามลำดับ จนครบทุกหลัก ต้องหารด้วย 7 ลงตัว และนำเสนอวิธีที่ได้ไปใช้ในการหาเงื่อนไขของจำนวนเต็มบวกที่มีเลขโดดในทุกหลักเป็นจำนวนเดียวกัน ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

คำสำคัญ: เลขโดดในหลัก จำนวนเต็มบวก การหารลงตัว

ABSTRACT

We study conditions of digit in the places of positive integers divisible by 7. We found that the sum of products of digit in the ones place, tens place, hundreds place,

thousands place, ten thousands place, hundred thousands place, millions place, ten millions place, hundred millions place, billions place, ten billions place, hundred billions place, ... and $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$, respectively, is divisible by 7. In addition, we study conditions of positive integers with same digits which are divisible by 7.

Keywords: Digit in the place, Positive integer, Divisibility

1. บทนำ

การศึกษาเงื่อนไขการหารลงตัวของจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนต่าง ๆ มีมากมายหลายจำนวน ดังจะปรากฏในหนังสือของ Konick และ Mercier [2] ชื่อ 1001 Problems in Classical Number Theory ปัญหาข้อที่ 323 การตรวจสอบการหารลงตัว โดยได้กล่าวถึงเงื่อนไขที่จำนวนเต็มจะหารด้วย 3, 4, 6, 7, 8, 9 และ 11 ลงตัว ซึ่งเงื่อนไขการตรวจสอบการหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนที่ไม่ใช่ 7 มีเงื่อนไขที่ไม่ซับซ้อนและถูกใช้อย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะ 3 และ 9 แต่สำหรับตัวหารที่เป็น 7 ในหนังสือเล่มนี้ได้กล่าวไว้ว่า

$$7 \text{ หาร } N \text{ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ } (100a_2 + 10a_1 + a_0) - (100a_5 + 10a_4 + a_3) + (100a_8 + 10a_7 + a_6) - \dots \equiv 0 \pmod{7}$$

เมื่อ $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ โดยที่ $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ และ $a_n \neq 0$

ตัวอย่างการตรวจสอบ 135,487 จะหารด้วย 7 ลงตัวหรือไม่ ซึ่งพบว่า

$$((100 \cdot 4) + (10 \cdot 8) + 7) - ((100 \cdot 1) + (10 \cdot 3) + 5) = 487 - 135 = 352 \equiv 2 \pmod{7}$$

ดังนั้น 7 หาร 135,487 ไม่ลงตัว ซึ่งวิธีดังกล่าว คือการลดจำนวนหลักที่เหลือเพียง 3 หลักเท่านั้น โดย Nahir [3 - 4] ได้นำเสนอวิธีลดจำนวนหลักของจำนวนเต็มไว้ดังนี้

$$7 \text{ หาร } abcdf \text{ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ } 7 \text{ หาร } abcd - 2f \text{ ลงตัว}$$

$$7 \text{ หาร } xyzw \text{ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ } 7 \text{ หาร } xyz - 2w \text{ ลงตัว}$$

$$7 \text{ หาร } stu \text{ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ } 7 \text{ หาร } st - 2u \text{ ลงตัว}$$

โดยที่ $abcdf$, $xyzw$ และ stu เป็นจำนวนเต็มบวกห้าหลัก สี่หลัก และสามหลัก ตามลำดับ

ตัวอย่างการตรวจสอบ 35,487 ว่าหารด้วย 7 ลงตัวหรือไม่ จะพิจารณาโดย

$$3548 - 2(7) = 3534$$

$$353 - 2(4) = 345$$

$$34 - 2(5) = 24$$

จะพบว่า 7 หาร 24 ไม่ลงตัว ดังนั้น 7 หาร 35,487 ไม่ลงตัว

จะเห็นได้ว่ารูปแบบทั้งสองมีความยุ่งยากในการคำนวณ เมื่อจำนวนเต็มเป็นจำนวนขนาดใหญ่ แต่ Nahir [3] ได้นำเสนออีกหนึ่งวิธีเกี่ยวกับการหารด้วย 7 ลงตัวของจำนวนเต็มบวกแปดหลัก $abcdefgh$ โดยมีเงื่อนไขว่า

$$7 \text{ หาร } a - 2b - 3c - d + 2f + 3g + h \text{ ลงตัว}$$

และอธิบายการตรวจสอบจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 7 ลงตัว โดยการพิจารณาผลบวกลักษณะดังกล่าว โดยแบ่งเป็นเซต เซตละ 3 จำนวน เช่น $ab\{cde\}\{fgh\}$ เมื่อ $N = abcdefgh$ จะเห็นว่าวิธีนี้จะอาศัยผลบวกของผลคูณระหว่างเลขโดดในแต่ละหลักกับ $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$ แต่ยังไม่รู้รูปแบบทั่วไป ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจการเขียนรูปแบบทั่วไปและการพิสูจน์เงื่อนไขดังกล่าว

ในงานวิจัยนี้ ตัวแปรที่จะกล่าวถึงจะเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด และเพื่อความสะดวกในการเขียนบทความ กำหนดให้จำนวนเต็มบวก $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ มีความหมายเดียวกับ $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ และ N แทนเซตของจำนวนนับ จากที่งานวิจัยนี้มุ่งเน้นที่การหารลงตัวของจำนวนเต็ม จึงจะขอเริ่มต้นจากการทบทวนบทนิยามของการหารลงตัว [5] ก่อน กล่าวคือ a หาร b ลงตัว เมื่อ $a \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $b = ak$ เขียนแทนด้วย $a \mid b$ และถ้า a หาร b ไม่ลงตัว จะเขียนแทนด้วย $a \nmid b$ โดยมีสมบัติบางประการเช่น

1. ถ้า $a \mid (b + c)$ และ $a \mid b$ แล้ว $a \mid c$
2. ถ้า $a \mid bc$ และ $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $a \mid c$ เมื่อ $\gcd(a, b)$ คือตัวหารร่วมมากของ a และ b

บทนิยาม 1.1 [1] จะกล่าวว่า a สมภาค b มอดุโล m เมื่อ $m > 0$ ก็ต่อเมื่อ $m \mid (b - a)$ เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{m}$ ซึ่งสมบัติของสมภาคบางประการ ได้แก่

1. ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
2. ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม c
3. ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $ac \equiv bc \pmod{m}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม c
4. ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 0$

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้า $a_j \equiv b_j \pmod{m}$ เมื่อ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^n a_j \equiv \sum_{j=1}^n b_j \pmod{m}$$

บทพิสูจน์ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน n ให้ $P(n)$ แทนข้อความของทฤษฎีบท 1.1

เห็นได้ชัด $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง และสมมติว่า $a_j \equiv b_j \pmod{m}$ เมื่อ $j = 1, 2, 3, \dots, k, k+1$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^k a_j \equiv \sum_{j=1}^k b_j \pmod{m}$$

เนื่องจาก $a_{k+1} \equiv b_{k+1} \pmod{m}$ ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{k+1} a_j = \sum_{j=1}^k a_j + a_{k+1} \equiv \sum_{j=1}^k b_j + b_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} b_j \pmod{m}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า ทฤษฎีบท 1.1 เป็นจริง $\square$

2. จำนวนเต็มบวกในรูป 10^k ที่ 7 หารลงตัว

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่า

$$10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{7}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$ โดยสมบัติของสมภาคท้ายบทนิยาม 1.1 ข้อ 4 จะได้ว่า

$$10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{7} \quad \square$$

บทแทรก 2.1 ให้ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่า

$$1. 10^{3k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{7}$$

$$2. 10^{3k+2} \equiv 2(-1)^k \pmod{7}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $10 \equiv 3 \pmod{7}$ และ $10^2 \equiv 2 \pmod{7}$ โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า

$$10^{3k} \cdot 10 \equiv (-1)^k \cdot 10 \pmod{7}$$

$$10^{3k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{7}$$

และ

$$10^{3k} \cdot 10^2 \equiv (-1)^k \cdot 10^2 \pmod{7}$$

$$10^{3k+2} \equiv 2(-1)^k \pmod{7}$$

ดังนั้นบทแทรก 2.1 เป็นจริง $\square$

3. จำนวนเต็มบวก n หลักซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

ในกรณีที่จำนวนเต็มบวก 1 หลัก เราจะไม่กล่าวถึงเนื่องจากง่ายต่อการพิจารณา ดังนั้นเราจะพิจารณากรณี $n \geq 2$ โดยที่จำนวนเต็มบวก 2 หลักที่ 7 หารลงตัว มีเงื่อนไขดังทฤษฎีบท 3.1 และจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 หลักที่ 7 หารลงตัว มีเงื่อนไขดังทฤษฎีบท 3.2

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $N = a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก 2 หลัก โดยที่ $a_0, a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ และ $a_1 \neq 0$ จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a_0 + 3a_1)$$

บทพิสูจน์ พิจารณา $N = 10a_1 + a_0 = 7a_1 + (3a_1 + a_0)$

ถ้า $7 \mid N$ จะได้ว่า $7 \mid (a_0 + 3a_1)$ ในทางกลับกัน ถ้า $7 \mid (a_0 + 3a_1)$ จะสรุปได้ว่า $7 \mid N$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $N = a_na_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n+1$ หลัก เมื่อ $0 < a_n \leq 9$ และ $0 \leq a_j \leq 9$ โดยที่ $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ และ $n \geq 2$

1. ถ้า $n \equiv 0 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n}{3}} a_n$$

2. ถ้า $n \equiv 1 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n-1}{3}} a_{n-1} + 3(-1)^{\frac{n-1}{3}} a_n$$

3. ถ้า $n \equiv 2 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{3}} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}]$$

บทพิสูจน์ ให้ $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ เมื่อ $j = 0, 1, 2, \dots, n$ และ $a_n \neq 0$ โดยทฤษฎีบท 2.1 และ

บทแทรก 2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_{3j} 10^{3j} &\equiv (-1)^j a_{3j} \pmod{7} \\ a_{3j+1} 10^{3j+1} &\equiv 3(-1)^j a_{3j+1} \pmod{7} \\ a_{3j+2} 10^{3j+2} &\equiv 2(-1)^j a_{3j+2} \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2} \\ \equiv (-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2} \pmod{7} \end{aligned}$$

1. สมมติว่า $n \equiv 0 \pmod{3}$ นั่นคือ มี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = 3k$ โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] \\ \equiv \sum_{j=0}^{k-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] \pmod{7} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_{3k}10^{3k} \equiv (-1)^k a_{3k} \pmod{7}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] + a_{3k}10^{3k} \\ \equiv \sum_{j=0}^{k-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^k a_{3k} \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 \\ \equiv \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n}{3}} a_n \pmod{7} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n}{3}} a_n$$

2. สมมติว่า $n \equiv 1 \pmod{3}$ นั่นคือ มี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = 3k + 1$ โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] \\ \equiv \sum_{j=0}^{k-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] \pmod{7} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_{3k}10^{3k} \equiv (-1)^k a_{3k} \pmod{7}$ และ $a_{3k+1}10^{3k+1} \equiv 3(-1)^k a_{3k+1} \pmod{7}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] + a_{3k}10^{3k} + a_{3k+1}10^{3k+1} \\ & \equiv \sum_{j=0}^{k-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^k a_{3k} + 3(-1)^k a_{3k+1} \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} & a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 \\ & \equiv \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n-1}{3}} a_{n-1} + 3(-1)^{\frac{n-1}{3}} a_n \pmod{7} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n-1}{3}} a_{n-1} + 3(-1)^{\frac{n-1}{3}} a_n$$

3. สมมติว่า $n \equiv 2 \pmod{3}$ นั่นคือ มี $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ซึ่ง $n = 3k + 2$ โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] \\ & \equiv \sum_{j=0}^k [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 \equiv \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{3}} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] \pmod{7}$$

สรุปได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{3}} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}]$$

ดังนั้นทฤษฎีบท 3.2 เป็นจริง

□

ตัวอย่าง 3.1 จงหาจำนวนพาลินโดรม 3 หลักทั้งหมด ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

หมายเหตุ จำนวนพาลินโดรม (Palindrome) หมายถึงจำนวนเต็มบวกที่อ่านจากด้านซ้ายไปขวา เหมือนกับด้านขวาไปซ้าย เช่น 11, 121, 2552

วิธีทำ ให้ aba เป็นจำนวนพาลินโดรม 3 หลัก

จากทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 3. จะได้ว่า $7 \mid aba$ ก็ต่อเมื่อ $7 \mid (a + 3b + 2a)$

นั่นคือ $7 \mid 3(a + b)$

เนื่องจาก $\gcd(7, 3) = 1$ จะได้ว่า

$$7 \mid aba \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a + b)$$

ดังนั้น จำนวนพาลินโดรม 3 หลักทั้งหมด ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว คือ

161	252	343	434	525	616	707
595	686	777	868	959		

ตัวอย่าง 3.2 จงหาจำนวนพาลินโดรม 4 หลักทั้งหมด ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

วิธีทำ ให้ $abba$ เป็นจำนวนพาลินโดรม 4 หลัก

จากทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 1. จะได้ว่า $7 \mid abba$ ก็ต่อเมื่อ $7 \mid (a + 3b + 2b - a)$

นั่นคือ $7 \mid 5b$

เนื่องจาก $\gcd(7, 5) = 1$ จะได้ว่า

$$7 \mid abba \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid b$$

ดังนั้น จำนวนพาลินโดรม 4 หลักทั้งหมด ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัวคือ

1,001	2,002	3,003	4,004	5,005	6,006
7,007	8,008	9,009	1,771	2,772	3,773
4,774	5,775	6,776	7,777	8,778	9,779

จากทฤษฎีบท 3.2 ถ้า $N = a_4a_3a_2a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก 5 หลัก จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4)$$

หรือ ถ้า $N = a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก 8 หลัก จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7)$$

เราอาจกล่าวได้โดยย่อว่า N เป็นจำนวนเต็มบวก n หลัก ที่หารด้วย 7 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ ผลบวกของผลคูณระหว่างเลขโดดในหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย หลักพัน หลักหมื่น หลักแสน หลักล้าน หลักสิบล้าน หลักร้อยล้าน หลักพันล้าน หลักหมื่นล้าน หลักแสนล้าน ... กับ $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$ ตามลำดับ จนครบ n จำนวน หารด้วย 7 ลงตัว นั่นเอง

ให้ K_n แทนผลบวกดังกล่าวของจำนวนเต็มบวก n หลัก และจากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.2 ทำให้ได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.1 ให้ N เป็นจำนวนเต็มบวก n หลัก จะได้ว่า

7 หาร N และ K_n ได้เศษเหลือเท่ากัน

ตัวอย่าง 3.3 จงตรวจสอบว่า 12,356,489 หารด้วย 7 ลงตัว หรือไม่ ถ้าไม่ลงตัวมีเศษเหลือเท่าใด

วิธีทำ จะเห็นว่า 12,356,489 เป็นจำนวนเต็ม 8 หลัก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} K_8 &= 9 + 3(8) + 2(4) - 6 - 3(5) - 2(3) + 2 + 3(1) \\ &\equiv 2 + 3 + 1 + 1 - 1 + 1 + 2 + 3 \pmod{7} \\ &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น 7 หาร 12,356,489 ไม่ลงตัว และมีเศษเหลือเท่ากับ 5

ตัวอย่าง 3.4 จงหาเลขโดด a ทั้งหมด ที่ทำให้ 499, a 12 หารด้วย 7 ลงตัว เมื่อ 499, a 12 เป็นจำนวนเต็มบวก 6 หลัก

วิธีทำ พิจารณา K_6 ของ 499, a 12 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} K_6 &= 2 + 3(1) + 2a - 9 - 3(9) - 2(4) \equiv 2 + 3 + 2a - 2 + 1 - 1 \pmod{7} \\ &\equiv 2a + 3 \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 2$ และ 9

4. จำนวนเต็มบวก n หลักที่ทุกหลักซ้ำกันซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $N = 111 \dots 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n + 1$ หลัก เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 6 \mid (n + 1)$$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $6 \nmid (n + 1)$

กรณี 1 $n + 1 = 6k + 1$ สำหรับบางจำนวนนับ k

จะได้ว่า $n = 6k$ นั่นคือ $n \equiv 0 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\sum_{j=0}^{\frac{6k}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] + (-1)^{\frac{6k}{3}} = \sum_{j=0}^{2k-1} 6(-1)^j + (-1)^{2k} = 0 + 1 = 1$$

จาก $7 \nmid 1$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 1. จะได้ว่า $7 \nmid N$

กรณี 2 $n + 1 = 6k + 2$ สำหรับบางจำนวนนับ k

จะได้ว่า $n = 6k + 1$ นั่นคือ $n \equiv 1 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\frac{(6k+1)-1}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] + (-1)^{\frac{(6k+1)-1}{3}} + 3(-1)^{\frac{(6k+1)-1}{3}} \\ &= \sum_{j=0}^{2k-1} 6(-1)^j + (-1)^{2k} + 3(-1)^{2k} = 0 + 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

จาก $7 \nmid 4$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2. จะได้ว่า $7 \nmid N$

กรณี 3 $n + 1 = 6k + 3$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

จะได้ว่า $n = 6k + 2$ นั่นคือ $n \equiv 2 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\sum_{j=0}^{\frac{(6k+2)-1}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] = \sum_{j=0}^{2k} 6(-1)^j = 6(-1)^{2k} = 6$$

จาก $7 \nmid 6$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 3. จะได้ว่า $7 \nmid N$

กรณี 4 $n + 1 = 6k + 4$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

จะได้ว่า $n = 6k + 3$ นั่นคือ $n \equiv 0 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\frac{6k+3}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] + (-1)^{\frac{6k+3}{3}} \\ &= \sum_{j=0}^{2k} 6(-1)^j + (-1)^{2k+1} = 6(-1)^{2k} - 1 = 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

จาก $7 \nmid 5$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 1. จะได้ว่า $7 \nmid N$

กรณี 5 $n + 1 = 6k + 5$ สำหรับจำนวนเต็ม $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

จะได้ว่า $n = 6k + 4$ นั่นคือ $n \equiv 1 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\frac{(6k+4)-1}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] + (-1)^{\frac{(6k+4)-1}{3}} + 3(-1)^{\frac{(6k+4)-1}{3}} \\ &= \sum_{j=0}^{2k} 6(-1)^j + (-1)^{2k+1} + 3(-1)^{2k+1} = 6(-1)^{2k} - 1 - 3 = 2 \end{aligned}$$

จาก $7 \nmid 2$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2. จะได้ว่า $7 \nmid N$

ในทางกลับกัน สมมติว่า $6 \mid (n+1)$ นั่นคือ มี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n+1 = 6k$ หรือ $n = 6k-1$
จะได้ว่า $n \equiv 2 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\sum_{j=0}^{\frac{(6k-1)-2}{3}} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] = 6 \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j = 0$$

จาก $7 \mid 0$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2. จะได้ว่า $7 \mid N$

□

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ และ $N = aaa \dots a$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n+1$ หลัก
เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 7 \text{ หรือ } 6 \mid (n+1)$$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $7 \mid N$ และ $a \neq 7$

$$\text{จะได้ว่า } \gcd(a, 7) = 1$$

$$\text{เนื่องจาก } N = aaa \dots a = a \times (111 \dots 1) \text{ ดังนั้น } 7 \mid 111 \dots 1$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า } 6 \mid (n+1)$$

ในทางกลับกัน ในกรณีที่ $a = 7$ เห็นได้ชัดว่า $7 \mid N$

$$\text{สมมติว่า } 6 \mid (n+1) \text{ นั่นคือ มี } k \in \mathbb{N} \text{ ซึ่ง } n+1 = 6k \text{ หรือ } n = 6k-1$$

$$\text{จะได้ว่า } n \equiv 2 \pmod{3}$$

พิจารณา

$$\sum_{j=0}^{\frac{(6k-1)-2}{3}} [(-1)^j a + 3(-1)^j a + 2(-1)^j a] = 6a \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j = 0$$

จาก $7 \mid 0$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2. จะได้ว่า $7 \mid N$

□

5. สรุป

ให้ $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n + 1$ หลัก

ถ้า N เป็นจำนวนเต็มบวก 2 หลัก จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a_0 + 3a_1)$$

ถ้า N เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 2 หลัก จะแบ่งได้ 3 กรณีดังนี้

กรณี 1 ถ้า $n \equiv 0 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n}{3}} a_n$$

กรณี 2 ถ้า $n \equiv 1 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n-1}{3}} a_{n-1} + 3(-1)^{\frac{n-1}{3}} a_n$$

กรณี 3 ถ้า $n \equiv 2 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{3}} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}]$$

และถ้าค่าประจำหลักเป็นตัวเดียวกัน คือ $a_j = a$ เมื่อ $j = 0, 1, 2, \dots, n$ จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 7 \text{ หรือ } 6 \mid (n + 1)$$

เอกสารอ้างอิง

- [1] อัจฉรา หาญชูวงศ์. (2542). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Harnchoowong, A. (1999). *Theory of Numbers*. Bangkok: Chulalongkorn University Printing House.
- [2] Konick, J.-M. D. and Mercier, A. (2007). *1001 Problems in Classical Number Theory*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- [3] Nahir, Y. (2003). Tests of Divisibility. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 34, p. 581 - 591.

- [4] Nahir, Y. (2008). On Divisibility Tests and The Curriculum Dilemma. *Sutra: International Journal of Mathematical Science Education*, 1 (1), p. 16 - 29.
- [5] Niven, I., Zuherman, H. S. and Montgomery, H. L. (1991). *An Introduction to The Theory of Numbers* (5th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.