



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

นัยทั่วไปแบบหนึ่งของทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์

A Generalization of Marion Walter's Theorem

DOI: 10.14456/mj-math.2022.7

รักษ์เกียรติ รักษ์อุดมการณ์^{1,*} และ เกษสุดา บุรณพันธ์²

^{1,2}สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ บุรีรัมย์ 31000

Rakkiad RakUdomkan^{1,*} and Ketsuda Buranaphansak²

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Education, Buriram Rajabhat University, Buriram 31000

Email: ¹rakkiad.rak@bru.ac.th ²katsuda.bp@bru.ac.th

วันที่รับบทความ : 1 สิงหาคม 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 1 พฤษภาคม 2564

วันที่ตอบรับบทความ : 19 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับแบบหนึ่งของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยนำทฤษฎีบทมาประยุกต์ใช้ในการหานัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่ดังกล่าว

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ ทฤษฎีบทของ

* ผู้เขียนหลัก

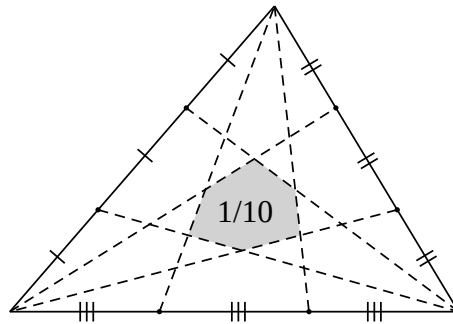
ABSTRACT

In this paper, we provide a generalization of Marion Walter's theorem by applying Shoelace theorem.

Keywords: Marion Walter's theorem, Shoelace theorem

1. บทนำ

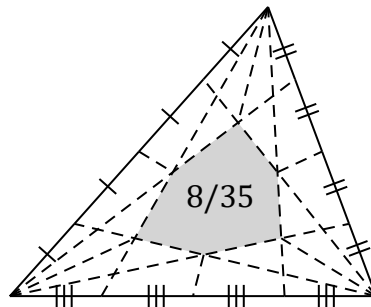
จากทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ (Marion Walter's theorem) [2] ซึ่งกล่าวถึงอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่แบ่งด้านตรงข้ามของจุดยอดนั้นออกเป็น 3 ส่วน เท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 1 ว่าอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมเป็น $1 : 10$ เสมอ



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์ของรูปหกเหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์

จากการศึกษางานวิจัยที่ผ่านมาพบว่า นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะนำสมบัติหรือทฤษฎีบททางเรขาคณิตมาพิสูจน์ว่าอัตราส่วนดังกล่าวเป็นจริงตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ หรือไม่ โดยในปี ค.ศ. 1994 ไรอัน มอร์แกน [6] ได้ขยายทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ ด้วยการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น N ส่วน โดยที่ N เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 ซึ่งผลการศึกษาพบว่า พื้นที่หกเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ $\frac{8}{9N^2-1}$ เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

ในปี ค.ศ. 2016 ลูกา โกลโดนิ [4] ได้ศึกษาอัตราส่วนของพื้นที่ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 2 ซึ่งผลการศึกษาพบว่า พื้นที่รูปหกเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ $\frac{8}{35}$ เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

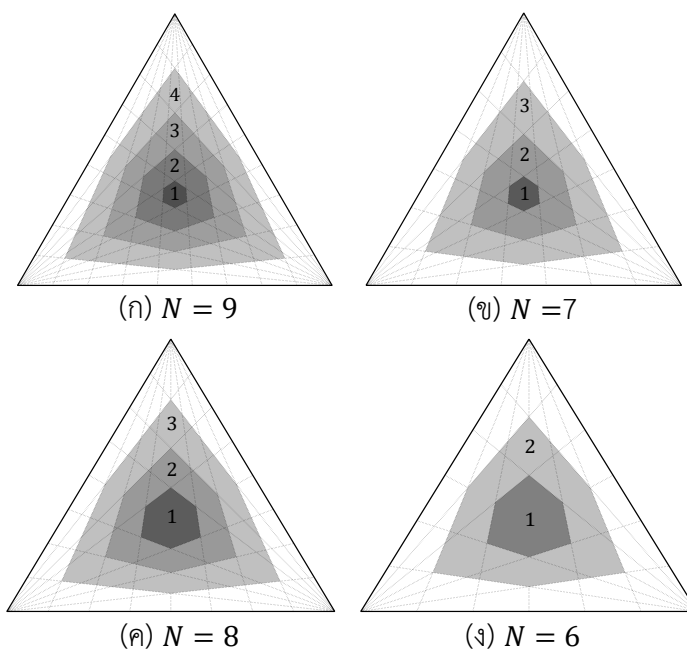


รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ของรูปหกเหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมตามการศึกษาของลูกา โกลโดนิ

ต่อมาปี ค.ศ. 2018 โอซามา अबดุลลา [5] ได้ศึกษารูปทั่วไปของอัตราส่วนของพื้นที่ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยแยกพิจารณาการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นจำนวนคี่และจำนวนคู่ ผลการศึกษาพบว่า

N จำนวนคี่	N เป็นจำนวนคู่
$Ae = \frac{32}{\left(\frac{6N}{2c-1}\right)^2 - 4}$ เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$	$Ae = \frac{32}{9\left(\frac{N}{c}\right)^2 - 4}$ เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}$

โดย N แทน จำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม
 c แทน ลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่
 Ae แทน อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 3 ตัวอย่างลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่กรณี $N = 9, 7, 8$ และ 6 ตามลำดับ
ตามการศึกษาของโอซามา อับดัลลา

จากการศึกษาของโอซามา อับดัลลา ข้างต้น ทำให้เราสนใจที่จะศึกษาต่อยอดเพื่อหานัยทั่วไปแบบอื่นของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมในรูปของ N ใด ๆ เมื่อ N เป็นจำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม และ $N \geq 3$ เพียงสูตรเดียวโดยไม่ต้องแบ่ง N ออกเป็นกรณีจำนวนคู่และกรณีจำนวนคี่

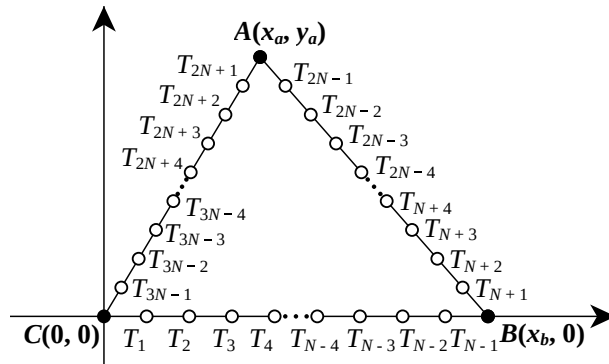
2. ผลการศึกษา

การหานัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ มีขั้นตอนและรายละเอียดดังนี้

2.1 เงื่อนไขเบื้องต้น

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $A(x_a, y_a), B(x_b, 0)$ และ $C(0, 0)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมนั้น

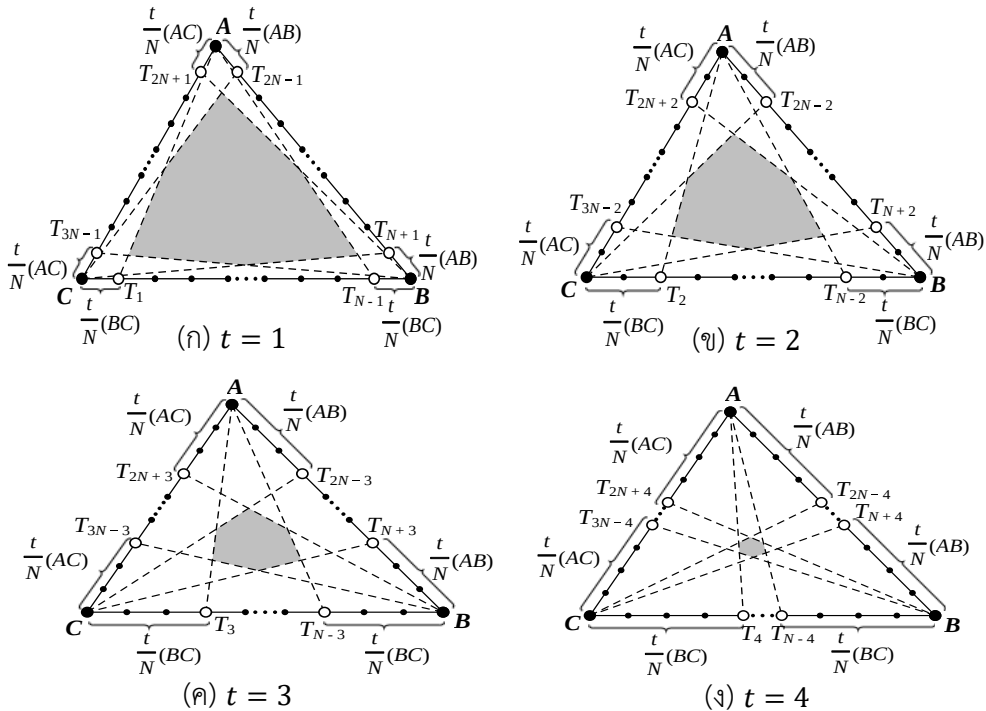
แบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ออกเป็น N ส่วน เท่า ๆ กัน โดยที่ $N \geq 3$ และให้ T_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, 3N$ เป็นจุดแบ่งด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 การแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ออกเป็น N ส่วนเท่า ๆ กัน

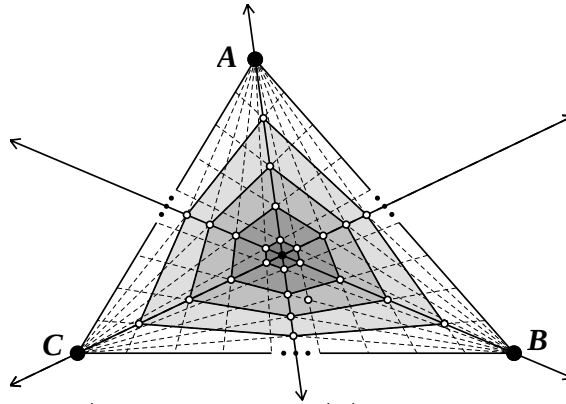
จากรูปที่ 4 จะเห็นว่าจุดแบ่งบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมี $N - 1$ จุด (ไม่นับจุดยอด)

ให้ t เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่าน้อยกว่า $\frac{N}{2}$ เราสามารถลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดแบ่ง 2 จุดที่อยู่บนด้านตรงข้าม โดยจุดแบ่ง 2 จุดนั้น อยู่ห่างจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่อยู่ใกล้ที่สุดในด้านตรงข้ามเป็นระยะเท่ากัน คือ $\frac{t}{N}$ เท่าของความยาวด้านตรงข้ามนั้น ดังตัวอย่างในรูปที่ 5



รูปที่ 5 รูปหกเหลี่ยมภายใต้การแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมด้วยค่า t

จากรูปที่ 5 จะเห็นว่ารูปเรขาคณิตตรงกลางของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้ามดังกล่าวนั้นจะเป็นรูปหกเหลี่ยมเสมอ เนื่องจากไม่มีส่วนของเส้นตรงใดที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมผ่านจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมนั้น และจุดยอดของรูปหกเหลี่ยมจะอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมกับจุดเซนทรอยด์ จึงเกิดเป็นรูปหกเหลี่ยมเสมอ ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 จุดยอดของรูปหกเหลี่ยมจะอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดกับจุดเซนทรอยด์เสมอ

ในขั้นตอนต่อไป จะใช้จุดแบ่ง $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ T_{3N-t} สำหรับหาพื้นที่รูปหกเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยที่ $1 \leq t < \frac{N}{2}$

2.2 พื้นที่รูปหกเหลี่ยมภายใต้เงื่อนไขการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น N ส่วนเท่า ๆ กัน

2.2.1 พิกัดจุดแบ่งแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

จากจุด $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ T_{3N-t} เป็นจุดแบ่งบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งสามารถหาพิกัดจุดแบ่งดังกล่าวได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 [3] ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งบนส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ซึ่งเชื่อมระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $P_1P : PP_2 = r_1 : r_2$ จะได้ว่า

$$x = \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2} \text{ และ } y = \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2}$$

จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ จุดแบ่ง $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ T_{3N-t} มีพิกัดดังนี้

$$\begin{aligned} T_t &= \left(\frac{tx_b}{N}, 0 \right) & T_{2N-t} &= \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{N}, \frac{(N-t)y_a}{N} \right) \\ T_{N-t} &= \left(\frac{(N-t)x_b}{N}, 0 \right) & T_{2N+t} &= \left(\frac{(N-t)x_a}{N}, \frac{(N-t)y_a}{N} \right) \\ T_{N+t} &= \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{N}, \frac{ty_a}{N} \right) & T_{3N-t} &= \left(\frac{tx_a}{N}, \frac{ty_a}{N} \right) \end{aligned}$$

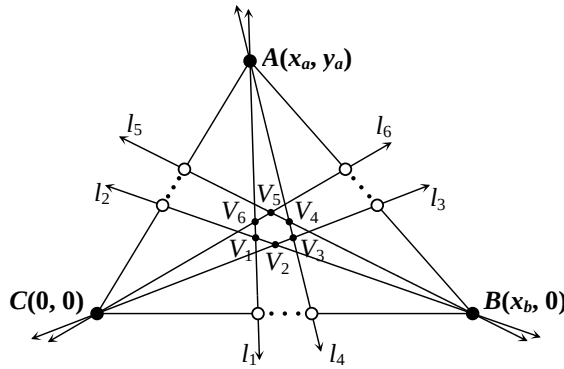
2.2.2 สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและจุดแบ่งที่อยู่บนด้านตรงข้าม

กำหนดให้เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและจุดแบ่งที่อยู่บนด้านตรงข้ามทั้ง 6 จุดข้างต้น คือ เส้นตรง $l_1, l_2, \dots, l_6$ ตามลำดับ โดยมีสมการดังนี้

$$\begin{aligned} l_1 : y &= \frac{Ny_a}{Nx_a - tx_b} (x - x_a) + y_a & l_2 : y &= \frac{ty_a}{tx_a - Nx_b} (x - x_a) \\ l_3 : y &= \frac{ty_a}{tx_a + (N-t)x_b} x & l_4 : y &= \frac{Ny_a}{Nx_a - (N-t)x_b} (x - x_a) + y_a \\ l_5 : y &= \frac{(N-t)y_a}{(N-t)x_a - Nx_b} (x - x_b) & l_6 : y &= \frac{(N-t)y_a}{(N-t)x_a + tx_b} x \end{aligned}$$

2.2.3 พิกัดจุดยอดของรูปหกเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันระหว่างเส้นตรง l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 และ l_6

กำหนดให้ V_i เป็นจุดตัดของเส้นตรง l_i และ l_{i+1} เมื่อ $i = 1, 2, \dots, 6$ และ $l_7 = l_1$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 จุดยอด V_1 ถึง V_6 ของรูปหกเหลี่ยม ที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง l_1 ถึง l_6

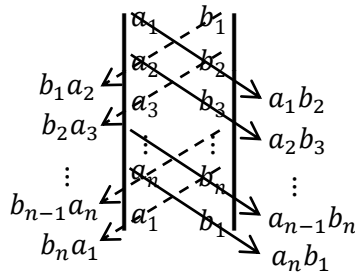
จะได้ จุดยอด V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 และ V_6 ของรูปหกเหลี่ยม มีพิกัดดังนี้

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{t(x_a + x_b)}{N+t}, \frac{ty_a}{N+t} \right) & V_2 &= \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{2N-t}, \frac{ty_a}{2N-t} \right) \\ V_3 &= \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{N+t}, \frac{ty_a}{N+t} \right) & V_4 &= \left(\frac{(N-t)(x_a + x_b)}{2N-t}, \frac{(N-t)y_a}{2N-t} \right) \\ V_5 &= \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{N+t}, \frac{(N-t)y_a}{N+t} \right) & V_6 &= \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{2N-t}, \frac{(N-t)y_a}{2N-t} \right) \end{aligned}$$

2.2.4 พื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$

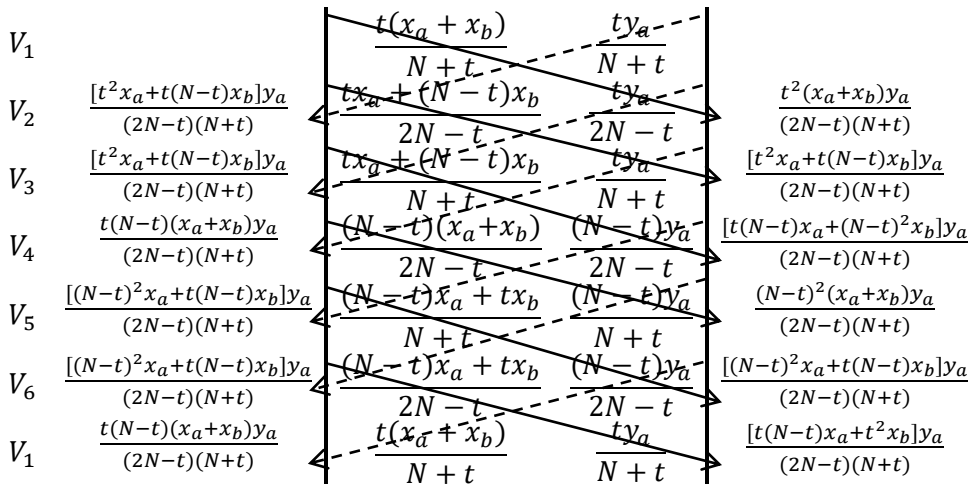
ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทเชลูเช (Shoelace Theorem)) [1] กำหนดให้ P เป็นรูป n เหลี่ยม ที่มีจุดยอดเป็นจุด $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_n, b_n)$ ซึ่งเรียงกันในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา พื้นที่ของรูป P คือ

$$\frac{1}{2} [(a_1b_2 + a_2b_3 + \dots + a_{n-1}b_n + a_nb_1) - (b_1a_2 + b_2a_3 + \dots + b_{n-1}a_n + b_nab_1)]$$



ดังนั้น จากทฤษฎีบทของเพลซและจุดยอด V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 และ V_6 ของรูปหกเหลี่ยมวางเรียงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะได้พื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}y_a \left(\left(\frac{t^2(x_a + x_b)}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t(N-t)x_a + (N-t)^2x_b}{(2N-t)(N+t)} \right. \right. \\ & \quad + \frac{(N-t)^2(x_a + x_b)}{(2N-t)(N+t)} + \frac{(N-t)^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \left. \frac{t(N-t)x_a + t^2x_b}{(2N-t)(N+t)} \right) \\ & \quad - \left(\frac{t^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t(N-t)(x_a + x_b)}{(2N-t)(N+t)} \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(N-t)^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{(N-t)^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t(N-t)(x_a + x_b)}{(2N-t)(N+t)} \right) \right) \\ & = \frac{x_b y_a (N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)} \end{aligned}$$



ให้พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC คือ $[ABC]$ จะได้ว่า $[ABC] = \frac{x_b y_a}{2}$ หรือ $x_b y_a = 2[ABC]$

ดังนั้นพื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ $\frac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$

2.3 รูปทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

จากพื้นที่รูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ $\frac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC คือ $[ABC]$ จะได้ อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ

$$\frac{\frac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}}{[ABC]} = \frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$$

สรุปได้ว่า รูปทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ

$$\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)} \quad (*)$$

เมื่อ N แทน ส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $N \geq 3$

t แทน จำนวนส่วนที่นับจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปถึงจุดแบ่งใกล้ที่สุดที่เลือกบนแต่ละด้าน

2.4 ความสัมพันธ์กับทฤษฎีบทอื่น ๆ

จากนัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของบทความนี้ คือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ เมื่อแทน $t = \frac{N-1}{2}$ จะได้ว่า (*) คือ $\frac{8}{9N^2-1}$ ซึ่งคือ อัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมที่เล็กที่สุดต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ซึ่งเท่ากับอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่ด้านถูกแบ่งออกเป็นจำนวนคี่ของทฤษฎีบทของโรอัน มอร์แกน ซึ่งคือ $\frac{8}{9N^2-1}$

เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีบทของโอซามา अबดุลลา ที่แยกพิจารณาการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นจำนวนคี่และจำนวนคู่ โดยกำหนด c เป็นลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่ ซึ่งเป็นแนวคิดกลับกันกับบทความนี้ที่กำหนดให้ t เป็นลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากใหญ่ไปเล็ก เช่น ถ้าหากแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 9 ส่วน จะเกิดรูปหกเหลี่ยมภายในขึ้นทั้งหมด 4 รูป ซึ่งทฤษฎีบทของโอซามา अबดุลลา จะให้ c เป็น 1, 2, 3, 4 โดยเรียงตามลำดับขนาดของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่ ดังรูปที่ 3(ก) แต่ในบทความนี้จะให้ t เป็น 1, 2, 3, 4 ซึ่งเรียงตามลำดับขนาดรูปหกเหลี่ยมจากใหญ่ไปเล็ก ดังรูปที่ 5 ดังนั้นจะเห็นได้ว่า t และ c มีการเรียงลำดับขนาดของรูปหกเหลี่ยมแบบสวนทางกัน โดยที่ $t = \frac{N+1}{2} - c$ ทำให้ได้ว่าอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่เขียนในรูป t และ c มีความสัมพันธ์กัน ดังตารางที่ 2.1 และ 2.2

ตารางที่ 2.1 กรณีที่ N เป็นจำนวนคี่ (เกิดรูปหกเหลี่ยม $\frac{N-1}{2}$ รูป)

c	t	อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (Ae)
1	$\frac{N-1}{2}$	จาก $t = \frac{N+1}{2} - c = \frac{N+1-2c}{2}$
2	$\frac{N-1}{2} - 1$	แทน t ใน (*) จะได้ว่า
3	$\frac{N-1}{2} - 2$	$Ae = \frac{2\left[N-2\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]^2}{\left[2N-\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]\left[N+\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]}$
$\vdots$	$\vdots$	$= \frac{2(2c-1)^2}{[3N+(2c-1)][3N-(2c-1)]}$
$\frac{N-1}{2} - 2$	3	$= \frac{8(2c-1)^2}{9N^2-(2c-1)^2}$
$\frac{N-1}{2} - 1$	2	$= \frac{8}{\left(\frac{3N}{2c-1}\right)^2 - 1}$
$\frac{N-1}{2}$	1	$= \frac{32}{\left(\frac{6N}{2c-1}\right)^2 - 4}$
		เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$

ตารางที่ 2.2 กรณีที่ N เป็นจำนวนคู่ (เกิดรูปหกเหลี่ยม $\frac{N-2}{2}$ รูป)

c	t	อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (Ae)
1	$\frac{N-2}{2}$	จาก $t = \frac{N}{2} - c = \frac{N-2c}{2}$
2	$\frac{N-2}{2} - 1$	แทน t ใน (*) จะได้ว่า
3	$\frac{N-2}{2} - 2$	$Ae = \frac{2\left[N-2\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]^2}{\left[2N-\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]\left[N+\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]}$
$\vdots$	$\vdots$	$= \frac{2(2c)^2}{[3N+2c][3N-2c]}$
$\frac{N-2}{2} - 2$	3	$= \frac{32c^2}{9N^2-4c^2}$
$\frac{N-2}{2} - 1$	2	$= \frac{32}{9\left(\frac{N}{c}\right)^2 - 4}$
$\frac{N-2}{2}$	1	เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}$

3. สรุปผลการศึกษา

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นการศึกษานัยทั่วไปแบบหนึ่งของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยการแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น N ส่วนเท่า ๆ กัน และไม่ว่าจะลากเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดแบ่ง 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ด้านตรงข้าม ซึ่งจุดแบ่ง 2 จุดนั้นอยู่ห่างจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่ใกล้ที่สุดในด้านนั้นเป็นระยะเท่ากัน จะได้ว่าอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ เมื่อ N แทนจำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $N \geq 3$ และ t แทนจำนวนส่วนที่นับจากจุดแบ่งไปยังจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่ใกล้สุดบนแต่ละด้าน

4. ข้อสังเกต

จากผลการศึกษาอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ซึ่งคือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ หากพิจารณาตัวผกผันของอัตราส่วนนี้ ซึ่งคือ $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$ พบว่า

4.1 ถ้า N เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่อยู่ในการูป 2^n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

จะได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็ม t ที่ทำให้อัตราส่วน $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณาได้ดังนี้

กรณี 1 ถ้า t เป็นจำนวนคี่

จะทำให้ $2 \nmid 9t(2^n - t)$

ดังนั้น $1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(2^n-t)}{2(2^n-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ t เป็นจำนวนคี่

กรณี 2 ถ้า t เป็นจำนวนคู่ ที่อยู่ในการูป $m2^k$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \dots$ และ m เป็นจำนวนคี่

เนื่องจาก $t \leq \frac{N+1}{2} < N$ ดังนั้น $k < N$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2} &= 1 + \frac{9t(2^n-t)}{2(2^n-2t)^2} \\ &= 1 + \frac{(9m2^k)(2^n-(m2^k))}{2(2^n-(2m2^k))^2} \\ &= 1 + \frac{9m(2^{n-k}-m)}{2(2^{n-k}-2m)^2} \end{aligned}$$

เห็นได้ว่าสำหรับ m ที่เป็นจำนวนคี่ $2 \nmid 9m(2^{n-k} - m)$

ดังนั้น $1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็ม t ที่ทำให้อัตราส่วน $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่อยู่ในรูปแบบ 2^n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

4.2 เมื่อ $(N, t) = 1$ จะได้ว่า

4.2.1 ถ้า N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 3$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณาได้ดังนี้ จาก N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ และ $(N, t) = 1$ ทำให้ได้ว่า t เป็นจำนวนคี่

จะเห็นว่า $(2N-t)(N+t)$ เป็นจำนวนคี่ และ $2(N-2t)^2$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 3$ และ

$$(N, t) = 1$$

4.2.2 ถ้า N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 5$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ

$$t = \frac{N-1}{2} \text{ หรือ } t = \frac{N-3}{2}$$

พิจารณาได้ดังนี้

$$\text{จาก } \frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$$

เนื่องจาก N เป็นจำนวนคี่ที่ $N \geq 5$ จะได้ว่า $t(N-t)$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $2 \mid t(N-t)$ เพราะฉะนั้น

$$\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2} \text{ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ } \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2} \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } (N-2t)^2 \mid 9$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } N-2t = 1 \text{ หรือ } N-2t = 3$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } t = \frac{N-1}{2} \text{ หรือ } t = \frac{N-3}{2}$$

ดังนั้น ถ้า N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 5$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ

$$t = \frac{N-1}{2} \text{ หรือ } t = \frac{N-3}{2}$$

เอกสารอ้างอิง

- [1] Beyer, W. (1978). *CRC Standard Mathematical Tables*. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- [2] Cuoco, A., Goldenberg, P., and Mark, J. (1993). Reader Reflections: Marion's Theorem. *Mathematics Teacher*, 86 (8), p. 619.
- [3] Frank, A. and Philip, A. S. (1992). *Schaum's Outline of Theory and Problems of College Mathematics* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill International Edition.

- [4] Luca, G. (2016). A Generalization of Marion Walter's Theorem. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/301284954>.
- [5] Osama, A. (2018). The Relationship Between The Different Central Hexagons Formed Through Odd/Even-Secting The Lengths of Triangles. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/322477444>.
- [6] Ryan, M. (1994). Reader Reflections: No Restrictions need, *Mathematics Teacher*, 87, p. 726, 743.