วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วย การแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ

The First Order Integer-Valued Autoregressive Models with The Two-Parameter Generalized Poisson-Lindley Distribution Based on The Negative Binomial Thinning Operator

สุชิราภรณ์ บุนยะริส[1] และ จิราพรรณ สุนทรโชติ[2,*]
[1,2]ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพมหานคร 10330

Suchiraporn Bunyaris[1] and Jiraphan Suntornchost[2,*]
[1,2]Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: [1]framesuchiraporn@gmail.com [2]jiraphan.s@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 21 ตุลาคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 24 ธันวาคม 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 30 มีนาคม 2564

[*]ผู้เขียนหลัก

บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้นำเสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และศึกษาสมบัติที่สำคัญทางความน่าจะเป็นและสถิติ เช่น ฟังก์ชันก่อกำเนิด ค่าคาดหมาย และ ความแปรปรวน โดยสุดท้ายได้พิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบที่สร้างขึ้น

คำสำคัญ: การแจกแจงไม่ต่อเนื่อง การแจกแจงปัวซงแบบผสม การแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์ ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ

ABSTRACT

In this study, we introduce the first order integer-valued autoregressive models for count data with the two-parameter generalized Poisson-Lindley distribution based on negative binomial thinning operator. Some important probabilistic and statistical properties such as generating function, expectation and variance are derived. Finally, parameter estimations are discussed.

Keywords: Discrete distributions, Mixed Poisson distributions, Poisson-Lindley distribution, Negative binomial thinning operator

1. บทนำ

ข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series data) คือ ชุดของข้อมูลที่เก็บรวบรวมตามระยะเวลาเป็นช่วง ๆ อย่างต่อเนื่องกัน โดยการนับข้อมูลเกิดขึ้นในหลายบริบท เช่น จำนวนอุบัติเหตุ [9] จำนวนผู้ป่วย จำนวนข้อความ จำนวนการซื้อขายหุ้นรายวัน และจำนวนการเอาประกันของกรมธรรม์ประกันชีวิต ดังนั้นตัวแบบอนุกรมเวลาสำหรับข้อมูลการนับ จึงมีความสำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาและสร้างตัวแบบสำหรับปรากฏการณ์ต่าง ๆ กลุ่มของตัวแบบสำหรับข้อมูลการนับที่มีการศึกษาอย่างกว้างขวางในงานวิจัย คือ ตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม (INAR) ซึ่งถูกสร้างขึ้นครั้งแรกโดย McKenzie [12] จากนั้น Alzaid และ Al-Osh [3] ได้สร้างตัวแบบทั่วไปขึ้นตามการแจกแจงของปัวซงโดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางทวินาม (binomial thinning operator) ที่ถูกแนะนำโดย Steutel และ Van-Harn [15] และตัวแบบนี้ได้ถูกนำใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวางในหลายสถานการณ์ เช่น Marcelo และคณะ [11] ได้ประยุกต์ใช้ในการคาดการณ์การเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรายเดือน Xiang และคณะ

[16] ได้ประยุกต์ใช้ในการรวมความเสี่ยงตามตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซง

ตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง (PINAR) นั้น ได้รับความนิยมอย่างมากในการศึกษาเชิงการนับ เพราะสูตรมีความซับซ้อนน้อยและเป็นการประยุกต์จากการแจกแจงปัวซงซึ่งเป็นการแจกแจงที่นิยมสำหรับข้อมูลเชิงการนับ อย่างไรก็ดีการแจกแจงปัวซงมีข้อจำกัดคือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนมีค่าเท่ากัน ซึ่งอาจไม่สามารถใช้ได้ในบางสถานการณ์ที่ข้อมูลไม่ได้อยู่ในสถานะสมดุล ดังนั้นจึงมีการศึกษาการแจกแจงทางเลือกสำหรับข้อมูลประเภทนี้อย่างกว้างขวางเพื่อลดข้อจำกัดนี้ในทศวรรษที่ผ่านมา เช่น กลุ่มการแจกแจงปัวซงนัยทั่วไปถูกใช้โดย Alzaid และ Al-Osh [4] จากนั้น Aghababaei และคณะ [1] ได้แนะนำตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซงที่มีค่าศูนย์เฟ้อ Bakouch และคณะ [6] ได้เสนอตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ในบรรดาตัวแบบที่กล่าวมานั้นสร้างบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ (negative binomial thinning operator)

การแจกแจงปัวซงนัยทั่วไปที่ศึกษาอย่างกว้างขวางอย่างหนึ่ง คือ กลุ่มของการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์ ที่ถูกนำเสนอในบทความของ Sankaran [13] โดยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์เป็นการแจกแจงปัวซงผสมโดยมีพารามิเตอร์เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลินด์เลย์ จากนั้น Bakouch และคณะ[5] ได้ใช้การแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์มาสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงนัยทั่วไปของปัวซง-ลินด์เลย์ และ Mahmoudi และคณะ [9] ได้เสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงนัยทั่วไปของปัวซง-ลินด์เลย์แบบใหม่ โดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางแบบทวินามและทวินามลบ

การแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์ได้ถูกขยายอย่างแพร่หลายในทศวรรษที่ผ่านมา ตัวอย่างเช่น Ghitany และคณะ [8] ได้ทำการขยายตัวแบบโดยใช้การแจกแจงปัวซงที่ไม่เป็นศูนย์ จากนั้น Mahmoudi และคณะ [10] ได้ทำการขยายตัวแบบโดยใช้การแจกแจงปัวซงนัยทั่วไปได้เป็นครั้งแรก เพื่อรองรับข้อมูลได้หลากหลายมากขึ้น

Bhati และคณะ [7] ได้นำเสนอการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์แบบสองพารามิเตอร์นัยทั่วไป โดยพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซงแบบผสมเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลินด์เลย์สองพารามิเตอร์ที่เสนอใน Shanker และ Sharma [14] ซึ่งเป็นการเพิ่มพารามิเตอร์อีกหนึ่งตัวเข้าไปในการแจกแจงลินด์-เลย์ โดย Bhati และคณะ [7] แสดงให้เห็นว่า พฤติกรรมหางขวาของกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นที่

แสดงความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปลู่เข้าสู่ศูนย์ในอัตราที่เร็วกว่าหรือช้ากว่าการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์ แสดงให้เห็นถึงความยืดหยุ่น ดังนั้นการแจกแจงนี้จึงใช้งานได้ดีกับข้อมูลที่มีหางทางขวาของฟังก์ชันความหนาแน่นลู่เข้าสู่ศูนย์ ซึ่งชุดข้อมูลดังกล่าวมักพบในอุตสาหกรรมประกันภัย และยิ่งกว่านั้นการจำลองเชิงตัวเลขของพวกเขาแสดงให้เห็นว่าการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไป จะดีกว่าการแจกแจงอื่น ๆ สำหรับข้อมูลการนับ โดยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไป ที่แสดงไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 [7] ตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์ θ และ β นัยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim NGPL(\theta,\beta)$ มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

$$P(X=x)=\frac{\theta^2}{(\theta+\beta)(1+\theta)^{x+1}}\left(1+\frac{\beta(x+1)}{1+\theta}\right)$$

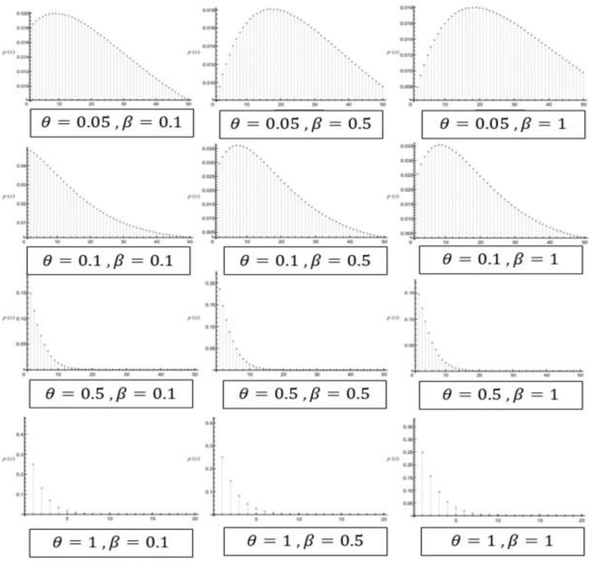
เมื่อ $x=0,1,2,\dots$ และ $\beta,\theta>0$

ทฤษฎีบท 1.1 [7] คุณสมบัติของการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์ θ และ β นัยทั่วไป ที่ระบุไว้ในบทนิยาม 1.1 มีดังนี้

1. ค่าคาดหมาย คือ $E(X)=\frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}$
2. ความแปรปรวน คือ $Var(X)=\frac{2\beta^2(1+\theta)+\theta^2(1+\theta)+\beta\theta(4+3\theta)}{\theta^2(\beta+\theta)^2}$
3. ฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ $\Phi_X(s)=\frac{\theta^2(\beta+\theta-s+1)}{(\beta+\theta)(\theta-s+1)^2}$ เมื่อ $s\in\mathbb{R}$
4. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ คือ $M_X(s)=\frac{\theta^2(\beta+\theta-e^s+1)}{(\beta+\theta)(\theta-e^s+1)^2}$ เมื่อ $s\in\mathbb{R}$

ในบทความนี้ได้นำเสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์ θ และ β นัยทั่วไป โดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ในหัวข้อที่ 2 ของบทความนี้คือ สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม สำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และทำการหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของกระบวนการนวัตกรรม จากนั้นในหัวข้อที่ 3 ได้ทำการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญทางสถิติและความน่าจะเป็นของตัวแบบ ได้แก่ ค่าคาดหมาย ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข ค่าความแปรปรวน ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข ฟังก์ชันค่าสหสัมพันธ์ในตัว และฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัวของตัวแบบ และในหัวข้อที่ 4 ผู้วิจัยได้สร้างสูตรสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข และวิธียูล-วอล์กเกอร์ ซึ่งในส่วน

สุดท้ายคือข้อสรุปและอภิปรายการสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ



รูปที่ 1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปสำหรับค่าต่าง ๆ ของพารามิเตอร์ θ และ β

2. การสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ($NLINAR(1)$) ผู้วิจัยได้ให้คำจำกัดความของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบและตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม นอกจากนั้นได้ทำการหากระบวนการนวัตกรรม (innovation process) ของตัวแบบเพื่อให้เป็นไปตามคุณสมบัติของตัวแบบอนุกรมเวลา

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ $\alpha *$ นิยามดังนี้

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} Z_i$$

เมื่อ $0 < \alpha < 1$ และ $\{Z_i\}_{i\geq 1}$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันที่มีการแจกแจงแบบเรขาคณิตโดยมีพารามิเตอร์เป็น $\frac{1}{1+\alpha}$ และเป็นอิสระจาก X

ทฤษฎีบท 2.1 คุณสมบัติของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ $\alpha *$ ที่ระบุไว้ในบทนิยาม 2.1 มีดังนี้

1. ค่าคาดหมาย คือ $E(\alpha * X) = \alpha E(X)$
2. ความแปรปรวน คือ $Var(\alpha * X) = \alpha(1-\alpha)E(X) + \alpha^2 Var(X)$
3. ฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ $\Phi_{\alpha * X}(s) = \Phi_X((1+\alpha-\alpha s)^{-1})$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$
4. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ คือ $M_{\alpha * X}(s) = M_X((1+\alpha-\alpha e^s)^{-1})$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$

บทนิยาม 2.2 ตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $NLINAR(1)$ โดย $\{X_t\}_{t\geq 1}$ นิยามด้วยสมการดังนี้

$$X_t = \alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t$$

โดยที่ $\alpha *$ คือตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ซึ่งถูกนิยามไว้ในบทนิยาม 2.1 และ $\{X_t\}_{t\geq 1}$ เป็นกระบวนการคงที่ (*stationary process*) โดย X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim NGPL(\theta, \beta)$ และกระบวนการนวัตกรรม $\{\varepsilon_t\}_{t\geq 1}$ เป็นลำดับที่เป็นอิสระ และมีการแจกแจงเดียวกันกับ $\alpha * X_{t-1}$ และ ε_t เป็นอิสระต่อกัน

จากสมมติฐานทั่วไปของตัวแบบอนุกรมเวลา มักจะทำการสร้างตัวแบบคงที่ ดังนั้นในส่วนถัดไป ผู้วิจัยจะทำการพิจารณาการแจกแจงและคุณสมบัติของกระบวนการนวัตกรรม $\{\varepsilon_t\}_{t\geq 1}$ ที่ทำให้ตัวแบบ $NLINAR(1)$ คงที่

ทฤษฎีบท 2.2 จากบทนิยาม 2.2 เมื่อ $\{X_t\}_{t\geq 1}$ เป็นกระบวนการที่คงที่ โดยมีการแจกแจง $NGPL(\theta, \beta)$ ดังนั้นกระบวนการนวัตกรรม $\{\varepsilon_t\}$ มีฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$\Phi_{\varepsilon_t}(s) = \frac{(\beta+\theta-s+1)(\theta+\alpha\theta-\alpha\theta s+\alpha-\alpha s)^2}{(\theta-s+1)^2(1+\alpha-\alpha s)(\theta+\beta+\alpha+\alpha\theta+\alpha\beta-\alpha(\beta+\theta+1)s)}$$

เมื่อ $s \in \mathbb{R}$

บทพิสูจน์ จาก $\{X_t\}_{t\geq 1}$ คือกระบวนการคงที่ โดยมีการแจกแจง $NGPL(\theta, \beta)$ จากบทนิยาม 2.2 คุณสมบัติที่ $\alpha * X_{t-1}$ และ ε_t อิสระต่อกัน และทฤษฎีบท 2.1 (3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_t}(s) &= E(s^{X_t}) \\
&= E(s^{\alpha * X_{t-1}+\varepsilon_t}) \\
&= E(s^{\alpha * X_{t-1}} s^{\varepsilon_t}) \\
&= E(s^{\alpha * X_{t-1}})E(s^{\varepsilon_t}) \\
&= \Phi_{\alpha * X_{t-1}}(s)\Phi_{\varepsilon_t}(s) \\
&= \Phi_{X_t}((1+\alpha-\alpha s)^{-1})\Phi_{\varepsilon_t}(s)
\end{aligned}$$

ดังนั้นกระบวนการนวัตกรรมมีฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$\begin{aligned}\Phi_{\varepsilon_t}(s) &= \frac{\Phi_{X_t}(s)}{\Phi_{X_t}((1+\alpha-\alpha s)^{-1})}\\ &= \frac{\theta^2(\beta+\theta-s+1)}{(\beta+\theta)(\theta-s+1)^2}\times\frac{(\beta+\theta)(\theta-(1+\alpha-\alpha s)^{-1}+1)^2}{\theta^2(\theta-(1+\alpha-\alpha s)^{-1}+1+\beta)}\\ &= \frac{\beta+\theta-s+1}{(\theta-s+1)^2}\times\frac{(\theta+\alpha\theta-\alpha\theta s-1+1+\alpha-\alpha s)^2}{(1+\alpha-\alpha s)(\beta+\alpha\beta-\alpha\beta s+\theta+\theta\alpha-\alpha\theta s-1+1+\alpha-\alpha s)}\\ &= \frac{(\beta+\theta-s+1)(\theta+\alpha\theta-\alpha\theta s+\alpha-\alpha s)^2}{(\theta-s+1)^2(1+\alpha-\alpha s)(\theta+\beta+\alpha+\alpha\theta+\alpha\beta-\alpha(\beta+\theta+1)s)}\end{aligned}$$

□

3. คุณสมบัติความน่าจะเป็นของตัวแบบ $NLINAR(1)$

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาคุณสมบัติบางประการของตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว ค่าคาดหมาย และความแปรปรวน

ทฤษฎีบท 3.1 ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว (γ_k) และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว (ρ_k) ที่สอดคล้องกันกับตัวแบบ $NLINAR(1)$ สำหรับ k ($k \geq 1$) หน่วยเวลาถูกนิยามตามลำดับดังนี้

1. $\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = \alpha^k\gamma_0$ เมื่อ γ_0 คือความแปรปรวนของ X_t
2. $\rho_k = \alpha^k$

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 2.2 และคุณสมบัติของ ε_t และ X_{t-k} เป็นอิสระสำหรับ $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= Cov(X_t, X_{t-k})\\ &= Cov(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t, X_{t-k})\\ &= Cov(\alpha * X_{t-1}, X_{t-k}) + Cov(\varepsilon_t, X_{t-k})\\ &= \alpha Cov(X_{t-1}, X_{t-k})\\ &= \alpha Cov(\alpha * X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, X_{t-k})\\ &= \alpha^k Cov(\alpha * X_{t-k}, X_{t-k}) \qquad (*)\\ &= \alpha^k\gamma_0\end{aligned}$$

จากบทนิยาม 2.2 เมื่อทำซ้ำจะได้ดังสมการ (*)

ดังนั้น ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว (ρ_k) สามารถเขียนได้ว่า

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \alpha^k$$

□

ข้อสังเกต 3.1 จากทฤษฎีบท 3.1 ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว ρ_k จะลดลงแบบทวีคูณ เมื่อ k เข้าสู่อนันต์

ต่อไปจะพิจารณาคุณสมบัติที่มีเงื่อนไขบางอย่าง เช่น ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของกระบวนการนวัตกรรม ε_t และฟังก์ชันความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของตัวแบบ คุณสมบัติเหล่านี้ได้มาจากการใช้นิพจน์ของ $NLINAR(1)$ ที่กำหนดในบทนิยาม 2.2 ดังนั้นก่อนอื่นจะต้องพิจารณาค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนของ X_t สำหรับตัวแบบ $NLINAR(1)$ ซึ่งได้ว่า

1. $E(X_t) = \frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}$
2. $Var(X_t) = \frac{2\beta^2(1+\theta)+\theta^2(1+\theta)+\beta\theta(4+3\theta)}{\theta^2(\beta+\theta)^2}$

ดังนั้น ค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนของ ε_t จึงถูกกำหนดไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนของ ε_t ที่นิยามไว้ในบทนิยาม 2.2 สำหรับ ตัวแบบ $NLINAR$ (1) จะถูกนิยามตามลำดับโดย

1. $E(\varepsilon_t) = (1-\alpha)\left(\frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}\right)$
2. $Var(\varepsilon_t) = \frac{(1-\alpha^2)\left(2\beta^2(1+\theta)+\theta^2(1+\theta)+\beta\theta(4+3\theta)\right)-\alpha\theta(1-\alpha)(\beta+\theta)(2\beta+\theta)}{\theta^2(\beta+\theta)^2}$

โดยที่ $E(X_t)$ นิยามดังข้างต้น

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 2.2 จะได้ว่า $\{X_t\}_{t\geq 1}$ เป็นกระบวนการคงที่โดยมีการแจกแจง $NGPL(\theta,\beta)$ และจากคุณสมบัติว่า $\alpha * X_{t-1}$ และ ε_t เป็นอิสระต่อกัน และทฤษฎีบท 1.1 ข้อ 1. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \alpha E(X_t) + E(\varepsilon_t) \\ &= \alpha\left(\frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}\right) + E(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

ดังนั้น $E(\varepsilon_t) = (1-\alpha)\left(\frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}\right)$

พิจารณาความแปรปรวนของ ε_t ในทำนองเดียวกันจากคุณสมบัติว่า $\alpha * X_{t-1}$ และ ε_t เป็นอิสระต่อกันและทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Var(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= Var(\alpha * X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \\ &= \alpha(1-\alpha)E(X_{t-1}) + \alpha^2 Var(X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

จากนั้นจะได้ว่า $(1-\alpha^2)Var(X_t) = \alpha(1-\alpha)E(X_t) + Var(\varepsilon_t)$ ดังนั้น

$$Var(\varepsilon_t) = (1-\alpha^2)Var(X_t) - \alpha(1-\alpha)E(X_t)$$

$$= (1-\alpha^2)\left(\frac{2\beta^2(1+\theta)+\theta^2(1+\theta)+\beta\theta(4+3\theta)}{\theta^2(\beta+\theta)^2}\right)-\alpha(1-\alpha)\left(\frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}\right)$$

$$= \frac{(1-\alpha^2)\big(2\beta^2(1+\theta)+\theta^2(1+\theta)+\beta\theta(4+3\theta)\big)-\alpha\theta(1-\alpha)(\beta+\theta)(2\beta+\theta)}{\theta^2(\beta+\theta)^2}$$

□

ทฤษฎีบท 3.3 ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไขของตัวแบบ $NLINAR(1)$ ล่วงหน้า $k + 1$ หน่วยเวลา คือ

$$E(X_{t+k} \mid X_{t-1}=x) = \alpha^{k+1} x + \left(1-\alpha^{k+1}\right)\left(\frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}\right)$$

สำหรับ $x \in \{0,1,2,\dots\}$

บทพิสูจน์ จาก $E(X_{t+k} \mid X_{t-1}=x) = E(\alpha * X_{t+k-1}+\varepsilon_{t+k} \mid X_{t-1}=x)$

$$= E(\alpha * (\alpha * X_{t+k-2}+\varepsilon_{t+k-1})+\varepsilon_{t+k} \mid X_{t-1}=x)$$

และจากบทนิยาม 2.2 เมื่อแทนค่า $\{X_t\}_{t\geq 1}$ ซ้ำจนได้สมการสุดท้ายเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
E(X_{t+k} \mid X_{t-1}=x) &= E\left(\alpha^{k+1} * X_{t-1}+\alpha^k * \varepsilon_t+\alpha^{k-1} * \varepsilon_{t+1}+\cdots+\varepsilon_{t+k} \,\middle|\, X_{t-1}=x\right)\\
&= E\left(\alpha^{k+1} * X_{t-1} \,\middle|\, X_{t-1}=x\right)+\sum_{h=0}^{k} E\left(\alpha^h * \varepsilon_{t+k-h} \,\middle|\, X_{t-1}=x\right)\\
&= \alpha^{k+1}x+\sum_{h=0}^{k}\alpha^h E(\varepsilon_{t+k-h})\\
&= \alpha^{k+1}x+\left(\frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha}\right)E(\varepsilon_t)\\
&= \alpha^{k+1}x+(1-\alpha^{k+1})\left(\frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}\right)
\end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต 3.2 ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข $E(X_{t+k} \mid X_{t-1}=x)$ จะลู่เข้าหาค่าคาดหมายแบบไม่มีเงื่อนไข คือ $\frac{2\beta+\theta}{\theta(\beta+\theta)}$ เมื่อ k เข้าสู่อนันต์

ทฤษฎีบท 3.4 ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของตัวแบบ $NLINAR(1)$ ล่วงหน้า $k + 1$ หน่วยเวลา คือ

$$\begin{aligned}
&Var(X_{t+k} \mid X_{t-1}=x)\\
&\quad= \alpha^{k+1}\left(1-\alpha^{k+1}\right)x+\frac{1-\alpha^{2(k+1)}}{1-\alpha^2}Var(\varepsilon_t)+\frac{\alpha(1-\alpha^k)(1-\alpha^{k+1})}{1-\alpha^2}E(\varepsilon_t)
\end{aligned}$$

สำหรับ $x \in \{0,1,2,\dots\}$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned}
&Var(X_{t+k} \mid X_{t-1}=x)\\
&\quad= Var(\alpha * X_{t+k-1}+\varepsilon_{t+k} \mid X_{t-1}=x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Var(\alpha * (\alpha * X_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k-1}) + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
&= Var\left(\alpha^{k+1} * X_{t-1} + \alpha^{k} * \varepsilon_{t} + \alpha^{k-1} * \varepsilon_{t+1} + \cdots + \varepsilon_{t+k} \,\middle|\, X_{t-1} = x\right) \\
&= Var\left(\alpha^{k+1} * X_{t-1} \,|\, X_{t-1} = x\right) + \sum_{h=0}^{k} Var\left(\alpha^{h} * \varepsilon_{t+k-h} \,\middle|\, X_{t-1} = x\right) \\
&= \alpha^{k+1}\left(1-\alpha^{k+1}\right)x + \sum_{h=0}^{k} Var(\alpha^{h} * \varepsilon_{t+k-h}) \\
&= \alpha^{k+1}\left(1-\alpha^{k+1}\right)x + \sum_{h=0}^{k} \left(\alpha^{h}(1-\alpha^{h})E(\varepsilon_{t+k-h}) + \alpha^{2h} Var(\varepsilon_{t+k-h})\right) \\
&= \alpha^{k+1}\left(1-\alpha^{k+1}\right)x + Var(\varepsilon_{t}) \sum_{h=0}^{k} \alpha^{2h} + E(\varepsilon_{t}) \sum_{h=0}^{k} \alpha^{h}(1-\alpha^{h}) \\
&= \alpha^{k+1}\left(1-\alpha^{k+1}\right)x + \frac{1-\alpha^{2(k+1)}}{1-\alpha^{2}} Var(\varepsilon_{t}) + \frac{\alpha\left(1-\alpha^{k}\right)\left(1-\alpha^{k+1}\right)}{1-\alpha^{2}} E(\varepsilon_{t})
\end{aligned}
$$

□

ข้อสังเกต 3.3 ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข $Var(X_{t+k} \,|\, X_{t-1} = x)$ ลู่เข้าหาความแปรปรวนแบบไม่มีเงื่อนไขคือ $\frac{2\beta^2(1+\theta)+\theta^2(1+\theta)+\beta\theta(4+3\theta)}{\theta^2(\beta+\theta)^2}$ เมื่อ k เข้าสู่อนันต์

4. การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ $NLINAR(1)$

การประมาณค่าเป็นวิธีการใช้ค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่างไปประมาณค่าพารามิเตอร์ เป็นการหาข้อสรุปที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์ ในลักษณะของการประมาณ โดยจะนำพารามิเตอร์ที่ประมาณได้ไปใช้ในตัวแบบเพื่อพยากรณ์แนวโน้มของเหตุการณ์ต่าง ๆ ในอนาคต และในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะพิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบทั้ง 2 วิธี ซึ่งเป็นวิธีที่นิยม ได้แก่ การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข (conditional least square: CLS) และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธียูล-วอล์กเกอร์ (Yule-Walker: YW)

4.1. การประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข

ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ α และ μ ของตัวแบบ $NLINAR(1)$ ได้มาจากการแทนค่า $k = 0$ ในทฤษฎีบท 3.3 ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข คือ

$$E(X_t \,|X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + \mu(1-\alpha)$$

โดยที่ $\mu = E(X_t)$

ดังนั้น สมการกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข คือ

$$Q_n = \sum_{t=2}^{n}\big(X_t - E(X_t \mid X_{t-1})\big)^2 = \sum_{t=2}^{n}\big(X_t - \alpha\, X_{t-1} - \mu(1-\alpha)\big)^2$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ Q_n เทียบกับพารามิเตอร์ μ และ α และกำหนดให้เท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\left.\frac{\partial Q_n}{\partial \mu}\right|_{\mu=\hat{\mu},\alpha=\hat{\alpha}} = -\sum_{t=2}^{n} 2\big(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}\,(1-\hat{\alpha})\big)(1-\hat{\alpha}) = 0 \tag{4.1}$$

$$\left.\frac{\partial Q_n}{\partial \alpha}\right|_{\mu=\hat{\mu},\alpha=\hat{\alpha}} = \sum_{t=2}^{n} 2(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}\,(1-\hat{\alpha}))(\hat{\mu} - X_{t-1}) = 0 \tag{4.2}$$

จาก (4.1) จัดรูปได้ดังนี้

$$\sum_{t=2}^{n} X_t - \hat{\alpha}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} - \hat{\mu}(n-1)(1-\hat{\alpha}) = 0$$

แก้สมการข้างต้นจะได้ค่าประมาณของ $\hat{\mu}$ มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{n} X_t - \hat{\alpha}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}}{(n-1)(1-\hat{\alpha})}$$

จาก (4.2) จัดรูปได้ดังนี้

$$\hat{\mu}\sum_{t=2}^{n} X_t - \hat{\alpha}\hat{\mu}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} - \hat{\mu}^2(n-1)(1-\hat{\alpha}) - \sum_{t=2}^{n} X_{t-1}X_t + \hat{\alpha}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2 + (1-\hat{\alpha})\hat{\mu}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} = 0$$

แก้สมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\alpha}$ มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\alpha} = \frac{(1-n)\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}X_t + \sum_{t=2}^{n} X_t \sum_{t=2}^{n} X_{t-1}}{(n-1)\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}\right)^2}$$

จากค่าคาดหมายของ X_t และสูตร $\hat{\mu}$ ข้างต้น จะได้ว่า

$$\frac{2\,\hat{\beta}_{CLS} + \hat{\theta}_{CLS}}{\hat{\theta}_{CLS}\big(\hat{\beta}_{CLS} + \hat{\theta}_{CLS}\big)} = \hat{\mu}_{CLS} = \frac{\sum_{t=2}^{n} X_t - \hat{\alpha}_{CLS}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}}{(n-1)(1-\hat{\alpha}_{CLS})}$$

พิจารณาตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ σ^2

จากฟังก์ชันที่กำหนดไว้ใน Alzaid และคณะ [2] และการแทนค่า $k = 0$ ในทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

$$Var(X_t \mid X_{t-1}) = \alpha\,(1-\alpha)X_{t-1} + Var(\varepsilon_t)$$

แทน $Var(\varepsilon_t)$ จากทฤษฎีบท 3.2 ลงในสมการข้างต้น จะได้ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข คือ

$$Var(X_t \mid X_{t-1}) = \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + (1-\alpha^2)\sigma^2 - \alpha(1-\alpha)\mu$$

หาค่าประมาณของ $\hat{\sigma}^2$ โดยพิจารณาจากบทความของ Alzaid และคณะ [2] ซึ่งเริ่มจากสมการกำลังสองน้อยสุด ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{t=2}^{n} \left[\left(X_t - E(X_t \mid X_{t-1})\right)^2 - Var(X_t \mid X_{t-1}) \right]^2 \\ &= \sum_{t=2}^{n} [(X_t - \alpha X_{t-1} - \mu(1-\alpha))^2 - \alpha(1-\alpha)X_{t-1} - (1-\alpha^2)\sigma^2 + \alpha(1-\alpha)\mu]^2 \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ S_n เทียบกับพารามิเตอร์ σ^2 และกำหนดให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$\left.\frac{\partial S_n}{\partial \sigma^2}\right|_{\sigma^2=\hat{\sigma},\, \mu=\hat{\mu},\, \alpha=\hat{\alpha}}$$

$$= \sum_{t=2}^{n} 2\left[\left(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1-\hat{\alpha})\right)^2 - \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})X_{t-1} - (1-\hat{\alpha}^2)\hat{\sigma}^2 + \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})\hat{\mu} \right]^2 (\hat{\alpha}^2 - 1) = 0$$

จัดรูปสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$\sum_{t=2}^{n} \left[\left(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1-\hat{\alpha})\right)^2 - \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})X_{t-1} - (1-\hat{\alpha}^2)\hat{\sigma}^2 + \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})\hat{\mu} \right] = 0$$

แก้สมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\sigma}^2$ มีสูตรดังนี้

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left[\left(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1-\hat{\alpha})\right)^2 - \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})X_{t-1} + \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})\hat{\mu} \right]}{(1-\hat{\alpha}^2)(n-1)}$$

จากค่าคาดหมายของ X_t และสูตร $\hat{\sigma}^2$ ข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{2\hat{\beta}^2(1+\hat{\theta}) + \hat{\theta}^2(1+\hat{\theta}) + \hat{\beta}\hat{\theta}(4+3\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2\left(\hat{\beta} + \hat{\theta}\right)^2} &= \hat{\sigma}_{CLS}^2 \\ &= \frac{\sum_{t=2}^{n} \left[\left(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1-\hat{\alpha})\right)^2 - \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})X_{t-1} + \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})\hat{\mu} \right]}{(1-\hat{\alpha}^2)(n-1)} \end{aligned}$$

4.2 การประมาณค่าแบบยูล-วอล์กเกอร์

ในส่วนนี้จะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ α, μ และ σ^2 ของตัวแบบ $NLINAR(1)$ ด้วยการประมาณค่าแบบยูล-วอล์กเกอร์ โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว (γ_k)

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n=k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$$

โดยที่ $0 \le k < n$ และ $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$ คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

จากสมการยูล-วอล์กเกอร์ และสมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\alpha}$ มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\alpha}_{YW} = \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})\,(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})^2}$$

ให้ $\hat{\mu} = E(X_t)$ และ $\hat{\sigma}^2 = Var(X_t)$ นิยามตามในข้างต้นของหัวข้อที่ 3 โดยที่ $S^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})}{n-1}$ จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ด้วยวิธีแบบยูล-วอล์กเกอร์ เป็นดังนี้

$$\hat{\mu}_{YW} = \bar{X} = \frac{2\hat{\beta} + \hat{\theta}}{\hat{\theta}(\hat{\beta} + \hat{\theta})}$$

$$\hat{\sigma}_{YW}^2 = S^2 = \frac{2\hat{\beta}^2(1 + \hat{\theta}) + \hat{\theta}^2(1 + \hat{\theta}) + \hat{\beta}\hat{\theta}(4 + 3\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2(\hat{\beta} \ + \hat{\theta})^2}$$

5. สรุป

ในบทความนี้ได้สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม สำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และทำการหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของกระบวนการนวัตกรรม $\{\varepsilon_t\}$ จากนั้นได้ทำการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญทางสถิติและความน่าจะเป็นของตัวแบบ ได้แก่ ค่าคาดหมาย ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข ค่าความแปรปรวน ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข ฟังก์ชันค่าสหสัมพันธ์ในตัว ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว ของตัวแบบ $NLINAR(1)$ และสุดท้ายได้พิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี วิธีแรก คือการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข ซึ่งเริ่มจากการหารูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์ α และ μ จากการหาอนุพันธ์ของสมการกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขเทียบกับพารามิเตอร์ จากนั้นทำการหารูปแบบเฉพาะของ σ^2 ซึ่งเงื่อนไขที่มีอยู่ไม่เพียงพอที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงศึกษาแนวคิดเพิ่มเติมจากบทความของ Alzaid และคณะ [2] ซึ่งได้รูปแบบเฉพาะของ σ^2 แต่ไม่สามารถหารูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์ β และ θ ได้ และวิธีที่สอง คือการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธียูล-วอล์กเกอร์ โดยวิธีนี้จะใช้สมการยูล-วอล์กเกอร์ในการประมาณค่า α โดยใช้ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างในการประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และใช้ค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างในการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ^2 โดยจะได้นำรูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์ที่ได้ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อพยากรณ์แนวโน้มค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของเหตุการณ์ต่าง ๆ ในอนาคตต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Aghababaei, J., Jones, M. and Lai, C.D. (2012). First-Order Integer Valued AR Processes with Zero Inflated Poisson Innovations. *Journal of Time Series Analysis*, 33 (6), p. 954 - 963.

[2] Alzaid, A. A., Abdulhamid, A. and Omair, A. (2014). Poisson Difference Integer Valued Autoregressive Model of Order One. *Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society,* 37 (2), p. 465 - 485.

[3] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A. (1988). First-Order Integer-Valued Autoregressive (INAR(1)) Process: Distributional and Regression Properties. *Statistica Neerlandica*, 42, p. 53 - 61.

[4] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A. (1993). Some Autoregressive Moving Average Processes with Generalized Poisson Marginal Distributions. *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, 45, p. 223 - 232.

[5] Bakouch, H. S., Mohammadpour, M. and Shirozhan, M. (2019). Poisson-Lindley INAR(1) Model with Applications. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 32, p. 262 - 280.

[6] Bakouch, H. S. Ristic, M. M. and Nastic, A. S. (2009). A New Geometric First Order Integer-Valued Autoregressive (NGINAR(1)) Process. *Statistical Planning and Inference,* 139, p. 2218 - 2226.

[7] Bhati, D., Sastry, D. and Qadri, P. (2015). New Generalized Poisson-Lindley Distribution: Applications and Properties. *Austrian Journal of Statistics*, 44 (4), p. 35 - 51.

[8] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Nadarajah, S. (2008). Zero-Truncated Poisson–Lindley Distribution and Its Application. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, p. 279 - 287.

[9] Mahmoudi, E., Rostami, A. and Roozegar, R. (2018). A New Integer-Valued AR(1) Process with Poisson-Lindley Innovation. *Statistics Applications*, ArXiv:1802.00994v1.

[10] Mahmoudi, E. and Zakerzadeh, H. (2010). Generalized Poisson–Lindley Distribution. *Communications in Statistics*, 39 (10), p. 1785 - 1798.

[11] Marcelo, B., Klaus, L. P. and Vasconcellos, V. (2016). A Poisson INAR(1) Process with A Seasonal Structure. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 86 (2), p. 373-387.

[12] McKenzie, E. (1985). Some Simple Models for Discrete Variate Time Series. *Journal of the American Water Resources Association*, 21, p. 645 - 650.

[13] Sankaran, M. (1970). The Discrete Poisson-Lindley Distribution. *Biometrics*, 26, p. 145-149.

[14] Shanker, R. and Sharma, S. (2013). A Two-Parameter Lindley Distribution for Modeling Waiting and Survival Times Data. *Applied Mathematics*, 4, p. 363 - 368.

[15] Steutel, F. W. and Van-Harn, K. (1979). Discrete Analogues of Self-Decomposability and Stability. *The Annals of Probability*, 7 (5), p. 893 - 899.

[16] Xiang, H., Nannan, Y. and Mi, C. (2018). Risk Aggregation Based on The Poisson INAR(1) Process with Periodic Structure. *Lithuanian Mathematical Journal*, 58, p. 505 - 515.