วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา 67 เล่มที่ 706 มกราคม – เมษายน 2565

http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การสร้างตารางราศีจักรในกระดานโหร

A Construction of A Zodiac Diagram in The Astrology Board

DOI: 10.14456/mj-math.2022.1

อรรถวุฒิ วงศ์ประดิษฐ์[1,*] และ ประถมจิต ขจรเจริญกุล[2]

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12121

[2]สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ นครศรีธรรมราช 80160

Attawut Wongpradit[1,*] and Prathomjit Khachorncharoenkul[2]

[1]Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Thammasat University, Pathumthani 12121

[2]School of Science, Walailak University, Nakhon Si Thammarat 80160

Email: [1]attawutt@tu.ac.th [2]prathomjit@gmail.com

วันที่รับบทความ : 31 มกราคม 2564 วันที่แก้ไขบทความ : 27 กรกฎาคม 2564 วันที่ตอบรับบทความ : 19 กุมภาพันธ์ 2565

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอการสร้างตารางราศีจักรในกระดานโหร โดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียน ภายใต้ข้อกำหนดการแบ่งเส้นรอบวงของตารางราศีจักรออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน

คำสำคัญ: กระดานโหร ราศีจักร สันตรง วงเวียน

---

* ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

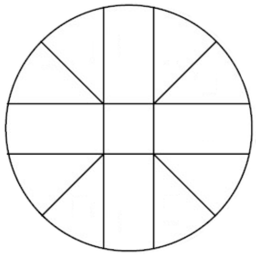
This article presents the construction of a zodiac diagram in the astrology board using only a straightedge and compass, under the condition for dividing the circumference of a circle into 12 equal parts.

Keywords: Astrology board, Zodiac, Straightedge, Compass

1. บทนำ

กระดานโหร ดังรูปที่ 1.1 (ก) เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ประกอบการพยากรณ์ทางโหราศาสตร์ มีลักษณะเป็นกระดานเรียบ จารึกลวดลายที่เรียกว่า ตารางราศีจักร [2] ซึ่งเป็นตารางรูปวงกลมที่มีลักษณะดังรูปที่ 1.1 (ข) ภายในวงกลมมีเส้นขนานสองคู่ที่มีระยะห่างเท่ากัน ตัดกันเป็นมุมฉาก และมีเส้นแบ่งครึ่งมุมฉากสี่เส้นลากจากจุดตัดของเส้นขนานแต่ละจุดไปจรดเส้นรอบวง

รูปที่ 1.1 (ก) กระดานโหร



รูปที่ 1.1 (ข) ตารางราศีจักร

แหล่งที่มารูปที่ 1.1 (ก): https://www.matichon.co.th/lifestyle/news_1208177

ตารางราศีจักรนี้เป็นที่รู้จักกันดีในหมู่ผู้สนใจโหราศาสตร์ไทย มีชื่อเรียกหลากหลาย เช่น ตารางลัคนา ตารางพิเภก หรือตารางดวงฤกษ์ พบหลักฐานการใช้ตารางในลักษณะดังกล่าวประกอบการทำนาย หรือช่วยในการคำนวณตามหลักดาราศาสตร์โบราณมาเป็นเวลาช้านาน ดังเช่น การค้นพบแผ่นฤกษ์ทรงกลมที่มีการจารึกตัวอักษรในวัฒนธรรมทวารวดี [1] ณ โบราณสถานโคกแจง จังหวัดนครปฐม เมื่อวันที่ 21 กรกฎาคม 2563 นอกจากนี้ยังพบว่าตารางราศีจักรกลายเป็นส่วนหนึ่งของศิลปกรรมไทยที่เกี่ยวข้องกับโหราศาสตร์ดังรูปที่ 1.2 (ก) ลายพิมพ์บนเหรียญบูชา (ข) อุปกรณ์ประกอบการแสดงโขน และ (ค) ลวดลายประกอบยันต์

(ก) (ข) (ค)

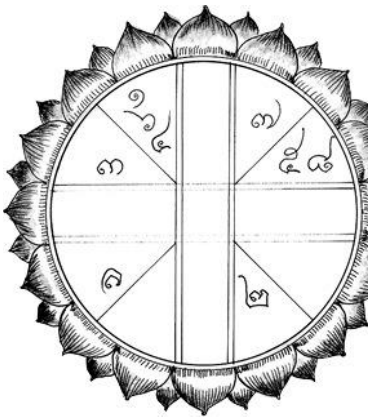
รูปที่ 1.2 ศิลปกรรมไทยที่เกี่ยวข้องกับโหราศาสตร์

แหล่งที่มารูปที่ 1.2 (ก): https://www.web-pra.com/auction/show/3320499

1.2 (ข): https://www.matichon.co.th/lifestyle/news_1208177

1.2 (ค): http://uauction2.uamulet.com/AuctionDetail.aspx?bid=291&qid=21873

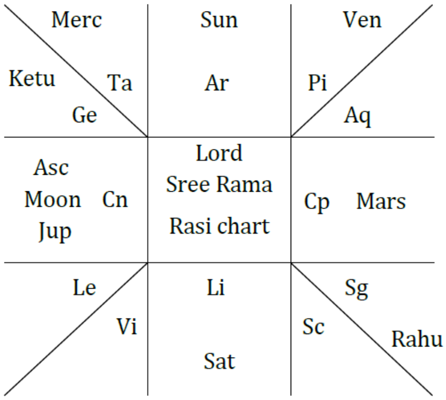
จาการศึกษาของ Baker และ Phongpaichit [2] ได้ตั้งข้อสันนิษฐานเกี่ยวกับตารางราศีจักรว่า ตารางในลักษณะดังกล่าวได้รับอิทธิพลมาจากแผนผังชโยติษ (Jyotisha diagram) ของอินเดีย โดยในทางโหราศาสตร์ไทย ใช้ตารางราศีจักรเป็นอุปกรณ์สำหรับช่วยบันทึกราศี หรือลัคนา โดยนำตารางนี้มาบันทึกเวลาเกิดของเจ้าชะตาว่าตกอยู่ในราศีใด เพื่อใช้พยากรณ์ดวงชะตา ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 ตารางราศีจักรสำหรับการพยากรณ์ดวงชะตา [2]

เมื่อพิจารณาโครงสร้างทางเรขาคณิตของแผนผังชโยติษที่ใช้ในประเทศอินเดีย พบว่า มีความแตกต่างกับตารางราศีจักรที่ใช้ในประเทศไทยอยู่เล็กน้อย กล่าวคือ แผนผังชโยติษ มีลักษณะที่ใช้

กลุ่มของเส้นขนานและรังสีแบ่งระนาบออกเป็น 13 ส่วน โดยใช้บริเวณสี่เหลี่ยมจัตุรัสตรงกลางแทนตำแหน่งปัจจุบัน และใช้บริเวณส่วนย่อยทั้ง 12 ส่วนที่อยู่นอกบริเวณสี่เหลี่ยมจัตุรัสตรงกลาง เป็นตัวแทนของราศีทั้ง 12 ราศี ดังรูปที่ 1.4 โดยไม่มีวงกลมล้อมรอบดังเช่นตารางราศีจักร



รูปที่ 1.4 แผนผังชโยติษ

แหล่งที่มา: http://gokulhinduastrology.blogspot.com

แม้ว่าการสร้างกระดานโหรหรือการสร้างตารางราศีจักรในโหราศาสตร์ไทยนี้ จะไม่มีหลักการตายตัวที่ใช้อ้างอิงในการสร้าง เพื่อให้ได้ตารางที่เหมือนกันทุกประการกับตารางมาตรฐานที่กำหนดไว้ แต่เมื่อพิจารณาตามหลักการใช้งานที่ตารางดังกล่าวแบ่งวงกลมออกเป็น 12 ส่วน โดยไม่นับบริเวณสี่เหลี่ยมจัตุรัสตรงกลาง ซึ่งแต่ละส่วนเป็นตัวแทนของแต่ละราศี ดังนั้น 12 ส่วนนี้ ควรสื่อถึงความเท่ากันตามนัยยะการเสมอภาคของราศีทั้ง 12 ราศี

ในทางคณิตศาสตร์ เมื่อพิจารณาความเท่ากันตามนัยยะการเสมอภาคของราศีทั้ง 12 ราศี ดังกล่าว สามารถนำเสนอได้ด้วยการเท่ากันของพื้นที่ในแต่ละส่วนของวงกลม หรือ การเท่ากันของความยาวส่วนโค้งที่เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่ถูกแบ่ง เพื่อเป็นตัวแทนของแต่ละราศี

อย่างไรก็ตาม การแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน สามารถทำได้ไม่ยากนัก แต่ปัญหาที่น่าสนใจคือ หากกำหนดกลุ่มของเส้นตรงและรังสีไว้ก่อนแล้ว ดังเช่นเส้นตารางในแผนผังชโยติษแล้วจะสามารถสร้างวงกลมที่เส้นตารางดังกล่าวแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กันได้หรือไม่ และในทางกลับกัน หากกำหนดวงกลมไว้ก่อน แล้วจะสามารถสร้างเส้นตารางแบบแผนผังชโยติษ ที่แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กันได้หรือไม่

ในบทความนี้ ผู้เขียนได้นำเสนอวิธีการสร้างตารางราศีจักรที่แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็นส่วนโค้ง 12 ส่วนโค้งที่มีความยาวเท่ากัน ใน 2 ลักษณะคือ การสร้างตารางราศีจักร เมื่อกำหนดเส้นขนาน ระยะห่าง และรังสี ดังแสดงไว้ในหัวข้อ 2 และการสร้างตารางราศีจักร เมื่อกำหนดขนาดของวงกลม ดังแสดงไว้ในหัวข้อ 3 โดยการสร้างที่กล่าวถึงในบทความนี้ใช้เพียงสันตรงและวงเวียนในการสร้างซึ่งเป็นการสร้างที่รู้จักกันเป็นอย่างดี โดยมีหนังสือและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษารูปแบบดังกล่าวอย่างมากมาย [3 - 7]

2. การสร้างตารางราศีจักรเมื่อกำหนดเส้นขนาน ระยะห่างและรังสี

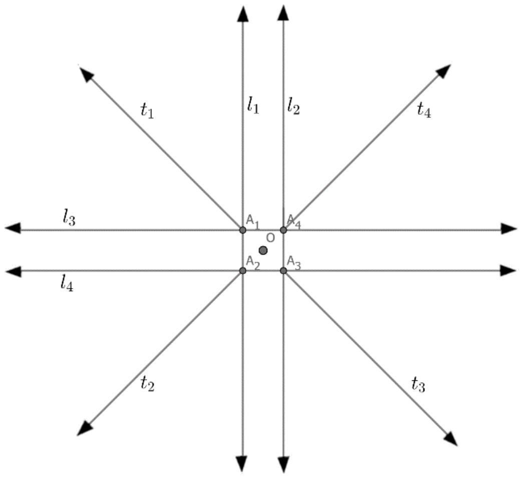
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{l_1}$ และ $\overleftrightarrow{l_2}$ เป็นเส้นขนานตามแนวตั้ง ที่มีระยะห่าง k หน่วย

$\overleftrightarrow{l_3}$ และ $\overleftrightarrow{l_4}$ เป็นเส้นขนานตามแนวนอน ที่มีระยะห่าง k หน่วย

โดยที่ $\overleftrightarrow{l_1}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{l_3}$ ที่จุด A_1 และตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{l_4}$ ที่จุด A_2

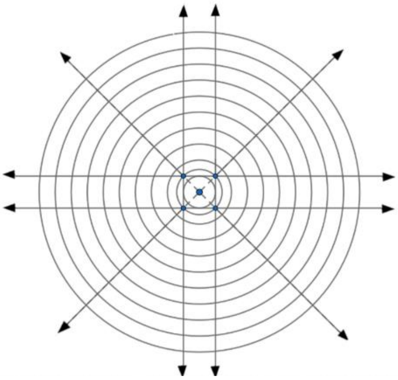
$\overleftrightarrow{l_2}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{l_3}$ ที่จุด A_4 และตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{l_4}$ ที่จุด A_3

กำหนดให้ $\overrightarrow{t_i}$ เป็นรังสีที่แบ่งครึ่งมุมฉากที่เกิดขึ้น ณ จุด A_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4$ และจุด O เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส $A_1A_2A_3A_4$ ดังรูปที่ 2.1 ในที่นี้เรียกกลุ่มของเส้นขนานและรังสีนี้ว่า เส้นตาราง T

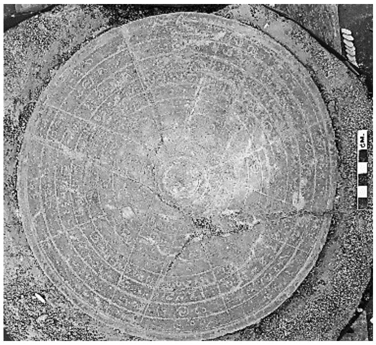


รูปที่ 2.1 เส้นตาราง T

จากรูปที่ 2.1 ถ้าให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมีต่าง ๆ กัน จะพบว่า วงกลมเหล่านี้ถูกเส้นตาราง T แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็นส่วนโค้งที่มีความยาวต่างกัน ดังรูปที่ 2.2 ซึ่งลักษณะดังกล่าวพบในแผ่นฤกษ์ทรงกลม ดังรูปที่ 2.3



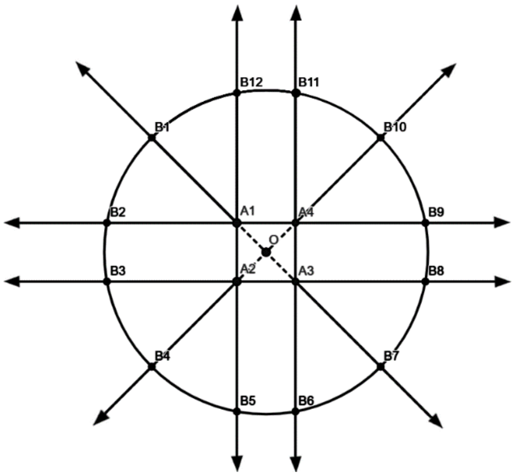
รูปที่ 2.2 วงกลมรัศมีต่าง ๆ กันกับเส้นตาราง T



รูปที่ 2.3 แผ่นฤกษ์ทรงกลม [1]

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้วงกลมที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}k$ หน่วย เมื่อ k คือระยะห่างระหว่างเส้นขนานแต่ละคู่ในเส้นตาราง T จะได้ว่า เส้นตาราง T แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 12 ส่วนโค้งที่มีความยาวเท่ากัน

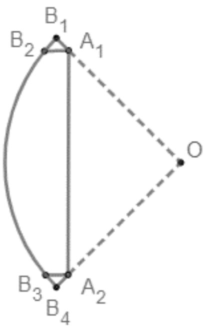
บทพิสูจน์ กำหนดให้ r เป็นรัศมีของวงกลม ที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง และจุด $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{12}$ เป็นจุดตัดระหว่างวงกลม O กับเส้นตาราง T ดังรูปที่ 2.4



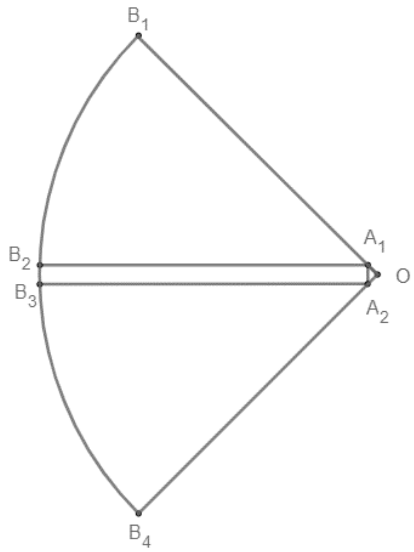
รูปที่ 2.4 รูปประกอบการพิสูจน์

จะได้ว่า ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม O ต้องมีค่ามากกว่าความยาวของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส $A_1A_2A_3A_4$ นั่นคือ $2r > k\sqrt{2}$ จึงจะทำให้เส้นรอบวงของวงกลม O ถูกแบ่งออกเป็น 12 ส่วน โดยเส้นตาราง T

ให้ $F(r)=\left|B_1B_2\right|-\left|B_2B_3\right|$ เมื่อ $\left|B_iB_j\right|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่แสดงระยะทางตามเส้นรอบวงของวงกลม O จากจุด B_i ไปยังจุด B_j จะพบว่า ถ้า $r \to \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^+$ (r เข้าใกล้ $\frac{k}{\sqrt{2}}$ ทางขวา) จะได้ว่า $\left|B_1B_2\right| \to 0$ และ $\left|B_2B_3\right| \to \frac{\pi}{2}$ ส่งผลทำให้ $F(r)=\left|B_1B_2\right|-\left|B_2B_3\right|<0$ ดังรูปที่ 2.5 (ก) และถ้า $r \to \infty$ (r มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด) จะได้ว่า $\left|B_1B_2\right| \to \infty$ และ $\left|B_2B_3\right| \to 0$ ส่งผลทำให้ $F(r)=\left|B_1B_2\right|-\left|B_2B_3\right|>0$ ดังรูปที่ 2.5 (ข)



(ก) $F(r)<0$ เมื่อ $r \to \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^+$



(ข) $F(r)>0$ เมื่อ $r \to \infty$

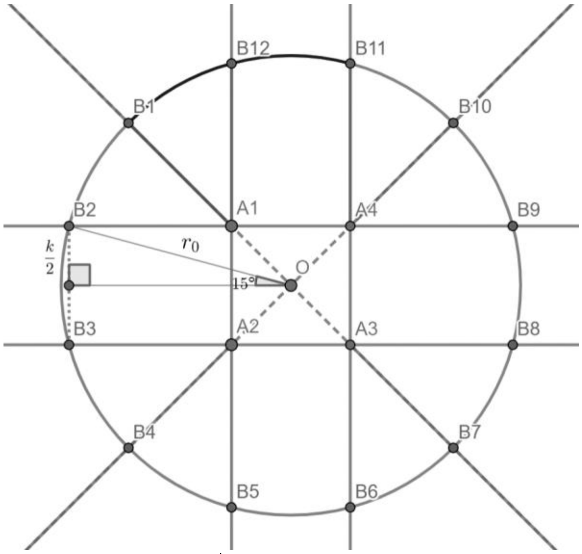
รูปที่ 2.5 ค่าของ $F(r)=\left|B_1B_2\right|-\left|B_2B_3\right|$

เนื่องจาก $F(r)=\left|B_1B_2\right|-\left|B_2B_3\right|$ เป็นผลต่างของฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า $F(r)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย ดังนั้นจะมี $r_0 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $F(r_0)=0$

จาก $F(r_0)=0$ จะได้ว่า $\left|B_1B_2\right|-\left|B_2B_3\right|=0$ หรือ $\left|B_1B_2\right|=\left|B_2B_3\right|$ เนื่องจากวงกลม O และเส้นตาราง T ต่างสมมาตรเทียบกับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ทั้งในแนวตั้งและแนวนอน และยังสมมาตรเทียบกับ $\overleftrightarrow{B_1B_7}$ และ $\overleftrightarrow{B_4B_{10}}$ ทำให้ได้ว่า

$$\left|B_1B_2\right|=\left|B_2B_3\right|=\left|B_3B_4\right|=\cdots=\left|B_{11}B_{12}\right|=\left|B_{12}B_1\right|$$

เพราะฉะนั้น r_0 คือ รัศมีของวงกลมที่เส้นตาราง T แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 2.6 ดังนั้น $\angle B_1OB_2=\angle B_2OB_3=\angle B_3OB_4=\cdots=\angle B_{12}OB_1$



รูปที่ 2.6 การหาค่า r_0

จาก $\angle B_1OB_2+\angle B_2OB_3+\angle B_3OB_4+\cdots+\angle B_{12}OB_1=360^\circ$ จะได้ว่า

$$\angle B_1OB_2=\angle B_2OB_3=\angle B_3OB_4=\cdots=\angle B_{12}OB_1=30^\circ$$

ดังนั้น ΔB_2OB_3 เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมยอดขนาด 30° และฐานยาว k หน่วย เมื่อพิจารณาส่วนสูงของ ΔB_2OB_3 ดังรูปที่ 2.6 จะได้ว่า $r_0\sin 15^\circ=\dfrac{k}{2}$ หรือ

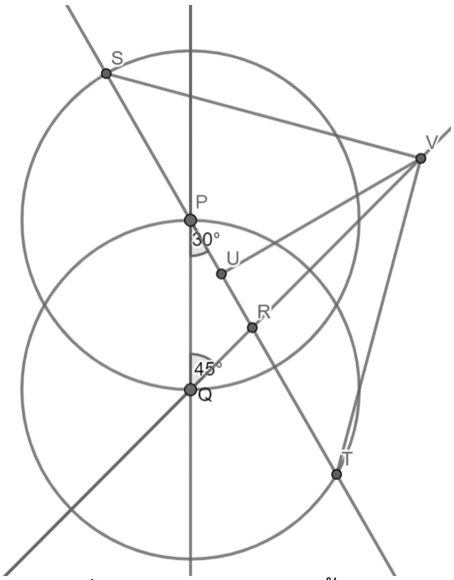
$$r_0=\frac{k}{2\sin 15^\circ}=\frac{k}{2\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}k$$

นั่นคือ รัศมีของวงกลมที่เส้นตาราง T แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน มีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}k$ หน่วย เมื่อ k คือระยะห่างระหว่างเส้นขนานแต่ละคู่ในเส้นตาราง T □

จากทฤษฎีบท 2.1 ข้างต้นแสดงให้เห็นว่าเมื่อกำหนดกลุ่มของเส้นขนานและรังสีในเส้นตาราง T สามารถคำนวณหารัศมีของวงกลม r_0 ที่ทำให้เส้นรอบวงของวงกลมสามารถแบ่งออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กันได้ ต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า สามารถสร้างวงกลมที่มีรัศมีดังกล่าว โดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียน ไม่จำเป็นต้องวัดความยาว r_0 ตามข้างต้น

บทตั้ง 2.1 กำหนดให้จุด P และจุด Q เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน วาดวงกลมซึ่งมีรัศมียาว PQ หน่วย และมีจุด P และจุด Q เป็นจุดศูนย์กลางตามลำดับ ให้จุด R เป็นจุดที่ทำให้ $\angle RPQ = 30^\circ$ และ $\angle RQP = 45^\circ$ โดยเส้นตรง $\overleftrightarrow{PR}$ ตัดกับวงกลม P ที่จุด S และตัดกับวงกลม Q ที่จุด T

ถ้าจุด U เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $\overline{ST}$ และจุด V เป็นจุดภายนอกวงกลมทั้งสองที่อยู่บนเส้นตรง $\overleftrightarrow{QR}$ ซึ่งทำให้ $UV = SU$ แล้ว $SV = TV$



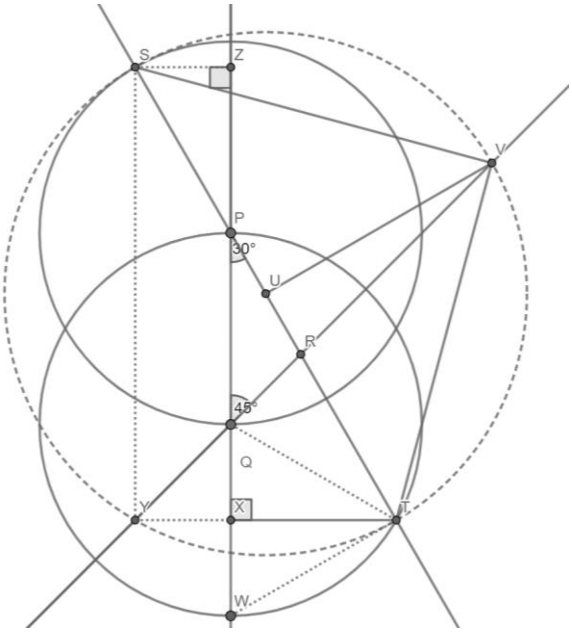
รูปที่ 2.7 รูปประกอบบทตั้ง 2.1

บทพิสูจน์ ให้จุด W เป็นจุดตัดอีกจุดของวงกลม Q กับ $\overleftrightarrow{PQ}$ ดังรูปที่ 2.7

เนื่องจาก $\angle PTW$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม Q จะได้ว่า $\angle PTW = 90^\circ$ ดังนั้น $\angle PWT = 60^\circ$

ให้ $\overline{PQ}$ ยาว k หน่วย จะได้ว่า $TW = PW\sin 30^\circ = 2k\left(\frac{1}{2}\right) = k$ ดังนั้น $QT = QW = TW$ ทำให้ได้ว่า ΔQTW เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ให้จุด X เป็นจุดบน $\overleftrightarrow{PQ}$ ที่ทำให้ $\overline{TX}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ จะได้ว่าจุด X เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{QW}$ ลาก $\overline{TX}$ ไปตัด $\overleftrightarrow{RQ}$ ที่จุด Y



รูปที่ 2.8 แสดงประกอบการพิสูจน์

เนื่องจาก $\angle XQY = \angle PQR = 45^\circ$ จะได้ว่า $XY = XQ = \frac{1}{2}QW = \frac{k}{2}$

ให้จุด Z เป็นจุดบน $\overleftrightarrow{PQ}$ ที่ทำให้ $\overline{SZ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ จะได้ว่า

$$SZ = SP\sin\angle SPZ = SP\sin\angle RPQ = SP\sin 30^\circ = k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2}$$

ดังนั้น $SZ = XY$

นอกจากนี้ได้ว่า $\angle SZP = 90^\circ = \angle QXY$ ดังนั้น $\square SZXY$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะฉะนั้น $\overleftrightarrow{SY}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ ส่งผลให้ $\angle QYS = \angle RQP = 45^\circ$ และ $\angle SYT = 90^\circ$

สร้างวงกลมรัศมี SU หน่วย โดยที่จุด U เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม จะได้ว่าจุด V เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม U เพราะว่า $UV = SU$ และจุด Y เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม U เพราะว่า $\angle SYT = 90^\circ$ ดังนั้น $\angle STV$ และ $\angle SYV$ เป็นมุมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง SV

ทำให้ได้ว่า $\angle STV = \angle SYV = 45^\circ$ เนื่องจาก ΔSVT เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในครึ่งวงกลม U จะได้ว่า $\angle VST = 180^\circ - \angle SVT - \angle STV = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ดังนั้น ΔSVT เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้ว่า $SV = TV$ □

ขั้นตอนการสร้างวงกลมที่มีรัศมียาว r_0 หน่วย โดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียน

กำหนดให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $A_1A_2A_3A_4$ ที่มีความกว้าง k หน่วย ดังที่ปรากฏในตาราง T

ขั้นที่ 1 สร้างวงกลมที่มีจุด A_1 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมียาว k หน่วย ตัดกับเส้นตรง l_1 ที่จุด C และจุด A_2

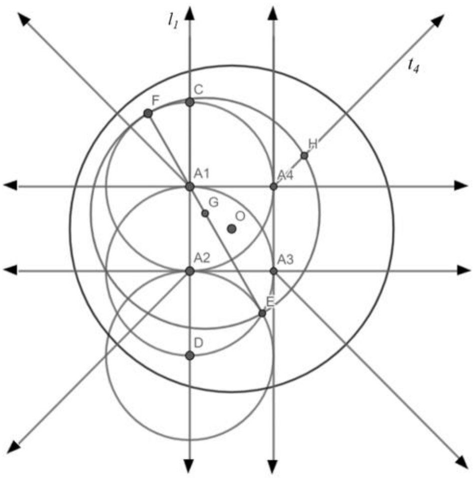
ขั้นที่ 2 สร้างวงกลมที่มีจุด A_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมียาว k หน่วย ตัดกับเส้นตรง l_1 ที่จุด D และ A_1

ขั้นที่ 3 สร้างวงกลมที่มีจุด D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมียาว k หน่วย ตัดกับวงกลม A_2 ที่จุด E

ขั้นที่ 4 ต่อรังสี $\overrightarrow{EA_1}$ ไปตัดวงกลม A_1 ที่จุด F

ขั้นที่ 5 ให้จุด G เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $\overline{EF}$ สร้างวงกลมที่มีจุด G เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมียาว GE หน่วย ตัดกับรังสี $\overrightarrow{t_4}$ ของตาราง T ที่จุด H

จะได้ว่า วงกลมที่จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมียาว EH หน่วย จะเป็นวงกลมที่เส้นตาราง T แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 รูปประกอบการสร้างวงกลมที่มีรัศมียาว r_0 หน่วย โดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียน

จากขั้นตอนการสร้างข้างต้น จะพิสูจน์ว่า $EH = r_0$

บทพิสูจน์ จากรูปที่ 2.9 เนื่องจากจุด E อยู่บนวงกลม A_2 และวงกลม D จะได้

$$k = A_2E = A_2D = DE$$

ดังนั้น ΔA_2DE เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังนั้น $\angle A_2DE = 60^\circ$

จาก $\angle DEA_1$ เป็นมุมที่เส้นรอบวงในวงกลม A_2 ที่รองรับด้วยเส้นผ่านศูนย์กลาง $\overline{A_1D}$ จะได้ว่า $\angle DEA_1 = 90^\circ$ ดังนั้น ΔDEA_1 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$A_1E^2 = A_1D^2 - DE^2 = (2k)^2 - k^2 = 3k^2$$

นั่นคือ $A_1E = \sqrt{3}k$ ทำให้ได้ว่า

$$EF = EA_1 + A_1F = \sqrt{3}k + k = \left(\sqrt{3}+1\right)k = \frac{2}{\sqrt{3}-1}k$$

เนื่องจาก $\overline{EF}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม G ทำให้ได้ว่า ΔEFH เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งด้าน $\overline{FH}$ ตั้งฉากกับด้าน $\overline{EH}$

จาก ΔDEA_1 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า $\angle DA_1E = 30^\circ$ และจาก $\angle A_1A_2A_4 = 45^\circ$ เพราะเป็นมุมที่เกิดจากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $A_1A_2A_3A_4$ ดังนั้นโดยบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า $FH = EH$ ทำให้ ΔEFH เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว เพราะฉะนั้น

$$EH = EF\sin 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}-1}k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}k = r_0$$

□

เมื่อพิจารณาขั้นตอนการสร้างวงกลมที่มีรัศมียาว r_0 หน่วย โดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียน ร่วมกับทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า เส้นตาราง T แบ่งเส้นรอบวงของวงกลม O ที่มีรัศมียาว EH หน่วย ออกเป็น 12 ส่วนโค้งที่มีความยาวเท่ากัน

3. การสร้างตารางราศีจักร เมื่อกำหนดขนาดของวงกลม

ในหัวข้อนี้ จะกำหนดขนาดของวงกลมมาให้ จากนั้นจะสร้างเส้นตาราง T ภายในวงกลมที่กำหนด ซึ่งแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 12 ส่วนโค้งที่มีความยาวเท่ากัน โดยการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิตที่ใช้เพียงสันตรงและวงเวียน

ขั้นตอนการสร้างตารางราศีจักร เมื่อกำหนดขนาดของวงกลม โดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียน

กำหนดวงกลมที่รัศมียาว r หน่วย และมีจุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ขั้นที่ 1 ลากเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ในแนวดิ่ง ตัดวงกลม O ที่จุด A และ B

ขั้นที่ 2 ลากเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ตัดวงกลม O ที่จุด C และ D

ขั้นที่ 3 ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม $\angle AOC$ ตัดวงกลม O ที่จุด E_1 และ E_2

ขั้นที่ 4 ลากเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ตั้งฉากกับ $\overline{E_1E_2}$ ตัดวงกลม O ที่จุด E_3 และ E_4

ขั้นที่ 5 สร้างวงกลมที่มีรัศมียาว AO หน่วย โดยที่จุด E_1 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ตัดวงกลม O ที่จุด E_5 และ E_6

ขั้นที่ 6 สร้างวงกลมที่มีรัศมียาว AO หน่วย โดยที่จุด E_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ตัดวงกลม O ที่จุด E_7 และ E_8

ขั้นที่ 7 สร้างวงกลมที่มีรัศมียาว AO หน่วย โดยที่จุด E_3 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ตัดวงกลม O ที่จุด E_9 และ E_{10}

ขั้นที่ 8 สร้างวงกลมที่มีรัศมียาว AO หน่วย โดยที่จุด E_4 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ตัดวงกลม O ที่จุด E_{11} และ E_{12}

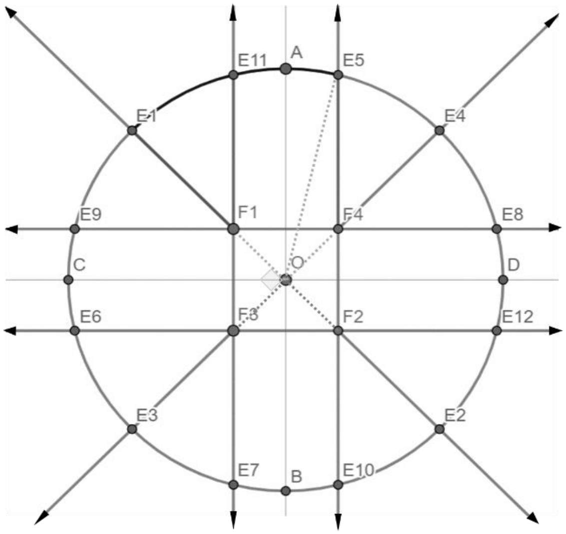
ขั้นที่ 9 ลาก $\overleftrightarrow{E_5E_{10}}, \overleftrightarrow{E_6E_{12}}, \overleftrightarrow{E_7E_{11}}$ และ $\overleftrightarrow{E_8E_9}$ โดยให้จุดตัดกันคือจุด F_2, F_3, F_1 และ F_4 ตามลำดับ

ขั้นที่ 10 ลากรังสี $\overrightarrow{F_1E_1}, \overrightarrow{F_2E_2}, \overrightarrow{F_3E_3}, \overrightarrow{F_4E_4}$

จะได้ว่า ตารางราศีจักรที่มีจุด E_i เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$ ตามขั้นตอนการสร้างข้างต้นนี้จะแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดออกเป็น 12 ส่วนโค้งที่มีความยาวเท่ากัน ดังรูปที่ 3.1

บทพิสูจน์ จากขั้นตอนการสร้างขั้นที่ 4 จะได้ว่า $\angle E_1OE_4$ เป็นมุมฉาก และจากขั้นที่ 5 จะได้ว่า $E_1E_5 = AO = E_5O = E_1O$ ทำให้สรุปได้ว่า ΔE_1OE_5 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า นั่นคือ $\overline{E_1O}$ ทำมุม 60° กับ $\overline{E_5O}$ ดังนั้น $\overline{E_4O}$ ทำมุม 30° กับ $\overline{E_5O}$ และจาก $\overline{E_1O}$ ทำมุม 30° กับ $\overline{E_{11}O}$ ดังนั้น $\overline{E_5O}$ ทำมุม 30° กับ $\overline{E_{11}O}$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\angle E_1OE_{11} = \angle E_{11}OE_5 = \angle E_5OE_4 = \cdots = \angle E_9OE_1 = 30^\circ$$



รูปที่ 3.1 การสร้างตาราง T เมื่อกำหนดขนาดของวงกลม

นั่นคือ มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม O ถูกแบ่งออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังนั้น กลุ่มจุด E_i เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$ แบ่งเส้นรอบวงของวงกลม O ที่กำหนด ออกเป็น 12 ส่วนโค้งที่มีความยาวเท่ากันด้วย □

4. ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

การสร้างตารางราศีจักรในกระดานโหร โดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียน ร่วมกับความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตในระดับชั้นมัธยมศึกษาในการพิสูจน์นี้ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า นักเรียน หรือบุคคลทั่วไป สามารถอ่านและเข้าใจได้โดยง่าย ซึ่งถือเป็นตัวอย่างหนึ่งที่จะทำให้ผู้อ่านเห็นการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสิ่งรอบตัว

นอกจากนี้ผู้เขียนยังมีความสนใจว่า จะสามารถสร้างตารางราศีจักรในกระดานโหร โดยยึดหลักตามนัยยะการเสมอภาคของราศีทั้ง 12 ราศี ผ่านปริมาณทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น พื้นที่ภายนอกบริเวณสี่เหลี่ยมจัตุรัสกึ่งกลางทั้ง 12 ส่วน ให้มีขนาดเท่ากัน โดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียนได้หรือไม่

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาบทความ สำหรับความคิดเห็นและข้อเสนอแนะอันมีค่าและเป็นประโยชน์ต่อบทความฉบับนี้ บทความนี้ได้รับทุนสนับสนุนการค้นคว้าวิจัย ประเภททุนวิจัย

เพื่อส่งเสริมศิลปวัฒนธรรมและภูมิปัญญาไทย มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ตามสัญญาเลขที่ TUTS 2/2564

เอกสารอ้างอิง

[1] มติชน. (2563). *การศึกษา*. เข้าถึงเมื่อวันที่ 24 ธันวาคม 2563 จาก https://www.matichon.co.th/education/news_2275242
Matichon. (2020). *Education*. Retrieved December 24, 2020, from https://www.matichon.co.th/education/news_2275242

[2] Baker, C. and Phongpaichit, P. (2014). Protection and Power in Siam: From Khun Chang Khun Phaen to The Buddha Amulet. *CSEAS Journal, Southeast Asian Studies*, 2 (2), p. 1 – 19.

[3] Beeson, M. (2012). *Logic of Ruler and Compass Constructions* in How The World Computes, p. 46 – 55. Heidelberg: Springer.

[4] Kellison, A., Bickford, M. and Constable, R. (2019). Implementing Euclid's Straightedge and Compass Constructions in Type Theory. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 85, p. 175 – 192.

[5] Křížek, M., Luca, F. and Somer, L. (2001). *The Proof of Gauss's Theorem* in 17 Lectures on Fermat Numbers from Number Theory to Geometry, p. 187 – 192. New York, NY: Springer.

[6] Martin, G. E. (1997). *Geometric Constructions*. New York, NY: Springer.

[7] Schreck, P. (2019). On The Mechanization of Straightedge and Compass Constructions. *Journal of Systems Science and Complexity,* 32, p. 124 – 149.