วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การพิสูจน์เชิงการจัดของเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับผลรวมตรีโกณมิติกำลัง

A Combinatorial Proof of An Identity Involving Trigonometric Power Sums

DOI: 10.14456/mj-math.2022.8

รัชนัย ไข่แก้ว[1] และ ขนิษฐา แน่นอุดร[2,*]
[1]คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี กรุงเทพมหานคร 10600
[2]คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี กรุงเทพมหานคร 10600

Rachanai Kaikeaw[1] and Khanithar Naenudorn[2,*]
[1]Faculty of Science and Technology, Dhonburi Rajabhat University, Bangkok 10600
[2]Faculty of Education, Dhonburi Rajabhat University, Bangkok 10600

Email: [1]rachanai.k@dru.ac.th [2]khanithar.n@dru.ac.th

วันที่รับบทความ : 18 มีนาคม 2565 วันที่แก้ไขบทความ : 18 สิงหาคม 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 19 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

ให้ n, m, d, r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n, m, d \geq 1$ บทความนี้นำเสนอการพิสูจน์เชิงการจัดเพื่อแสดงว่า

* ผู้เขียนหลัก

$$\sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right)$$
$$= -m^n + d \sum_{k=\left\lceil \frac{n-r}{d} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{mn-r}{d} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1}$$

โดยนับจำนวนผลเฉลยของสมภาค $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod{d}$ เมื่อ $1 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le m$

คำสำคัญ: ผลรวมตรีโกณมิติกำลัง อนุกรมตรีโกณมิติ การพิสูจน์เชิงการจัด หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก ฟังก์ชันก่อกำเนิด

ABSTRACT

Let n, m, d, r be integers where $n, m, d \ge 1$. In this paper, we use a combinatorial proof to show that

$$\sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right)$$
$$= -m^n + d \sum_{k=\left\lceil \frac{n-r}{d} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{mn-r}{d} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1}$$

by counting the number of solutions to the congruence $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod{d}$ where $1 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le m$.

Keywords: Trigonometric power sums, Trigonometric series, Combinatorial proof, Inclusion-Exclusion principle, Generating functions

1. บทนำ

ผลรวมจำกัดของฟังก์ชันตรีโกณมิติกำลัง ปรากฏอยู่ในหลากหลายทฤษฎีทางฟิสิกส์ จากผลงานของ Dowker [6 – 8] ที่ศึกษาเกี่ยวกับปรากฏการณ์คาซิมีร์ (casimir effect) และทฤษฎีสตริง (string theory) เขาได้หารูปแบบชัดแจ้งของผลรวมต่อไปนี้

$$C_{2n}(q,r) = \sum_{p=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2rp\pi}{q}\right) \csc^{2n}\left(\frac{p\pi}{q}\right)$$

สำหรับจำนวนเต็ม n, q, r ซึ่ง $n \ge 1, q \ge 2$ และ $0 \le r < q$

ผลงานของ Dowker ทำให้สูตรหรือเอกลักษณ์เกี่ยวกับผลรวมที่มีลักษณะดังกล่าวได้รับความสนใจมากยิ่งขึ้นจากนักคณิตศาสตร์และนักวิจัยหลายท่าน

ในปี ค.ศ. 1999 Chu และ Marini [4] ได้สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิด เพื่อหารูปแบบชัดแจ้งของอนุกรมตรีโกณมิติที่แตกต่างกันได้ 24 ประเภท เช่น

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sec^{2p}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n\sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{p+k}\binom{p-1+kn}{2p-1}\sum_{j=k}^{2p-1}\binom{2p}{j+1}$$

สำหรับจำนวนคี่บวก n และจำนวนเต็มบวก p

ในปี ค.ศ. 2002 Berndt และ Yeap [3] ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบในการพิสูจน์ทฤษฎีบทความสัมพันธ์กัน (reciprocity theorems) สำหรับผลรวมตรีโกณมิติ ทฤษฎีบทของพวกเขาเป็นกรณีทั่วไปสำหรับสูตรผลรวมที่น่าสนใจมากมาย เช่น

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot^{4}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-13)}{45}$$

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2012 Merca [11] ใช้เทคนิคการแบ่งอนุกรมหลายส่วน (series multisection) เพื่อพิสูจน์เอกลักษณ์เกี่ยวกับผลรวมโคไซน์กำลัง เช่น

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} \cos^{2p}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{n}{2^{2p+1}}\sum_{k=-\left\lfloor\frac{p}{n}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{p}{n}\right\rfloor}\binom{2p}{p+kn}$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ p

และในปี ค.ศ. 2020 He [9] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติอันดับสูงและฟังก์ชันซีตา ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นการปรับปรุงและพัฒนาผลงานของหลาย ๆ ท่านที่ผ่านมา

จะเห็นว่ามีการใช้วิธีการที่หลากหลายในการพิสูจน์เอกลักษณ์เกี่ยวกับผลรวมตรีโกณมิติ ซึ่งพบว่าสูตรที่ค้นพบบางส่วนมีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ทวินาม เพราะฉะนั้นวิธีการอีกวิธีหนึ่งที่สามารถนำมาพิสูจน์เอกลักษณ์ในลักษณะดังกล่าวได้คือ การพิสูจน์เชิงการจัด ซึ่ง กิตติกร นาคประสิทธิ์ ได้ให้ความหมายการพิสูจน์เชิงการจัดไว้ว่า

“การพิสูจน์เชิงการจัด คือ วิธีพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยนับสิ่งที่เลือกสรรมาด้วยวิธีการนับที่แตกต่างกัน และเนื่องจากว่าสิ่งที่นับเป็นสิ่งเดียวกัน ดังนั้นการนับด้วยวิธีการที่แตกต่างกันทั้งสองแบบย่อมจะได้จำนวนที่เท่ากัน” [1]

ปัญหาเกี่ยวกับการนับโดยทั่วไปมักมีผลเฉลยในรูปสัมประสิทธิ์ทวินาม แต่ถ้าเปลี่ยนวิธีการนับใหม่ ปัญหาเดียวกันอาจจะมีผลเฉลยในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งผลเฉลยทั้งสองแบบสามารถเชื่อมโยงกันได้โดยอาศัยหลักของการพิสูจน์เชิงการจัด ทางคณะผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะสร้างเอกลักษณ์ตรีโกณมิติจากปัญหาการนับบางประการ โดยในบทความนี้ เราจะนับจำนวนผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod d \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le m$$

เมื่อ n, m, d, r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n, m, d \ge 1$ ซึ่งทำให้ได้เอกลักษณ์

$$\sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) = -m^n + d \sum_{k=\left\lceil \frac{n-r}{d} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{mn-r}{d} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1}$$

(กรณี $d = 1$ ผลรวมทางด้านซ้ายของสมการจะมีค่าเป็น 0)

2. ความรู้พื้นฐาน

ตลอดบทความนี้ กำหนดให้ n, m, d, r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n, m, d \ge 1$ และให้ w แทนรากที่ d ตัวแรกของ 1 กล่าวคือ

$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{d}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{d}\right)$$

โดยที่ i แทน หน่วยจินตภาพ (*imaginary unit*)

นอกจากนี้ หากไม่กำหนดเป็นอย่างอื่น ให้ถือว่าตัวแปรและค่าคงที่ต่าง ๆ เป็นจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบทหลักของบทความนี้เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการนับจำนวนผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod d \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le m$$

เมื่อ $n, m, d \ge 1$ โดยการนับสองวิธีที่ต่างกัน วิธีแรกคือการนับโดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก และวิธีที่สองคือการนับโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

สำหรับการนับโดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก จะอาศัยความรู้พื้นฐานต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ทฤษฎีบทดาวและเส้นแบ่ง (Stars and Bars Theorem) [5]
ให้ k เป็นค่าคงที่ และ U แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \text{ โดยที่ } x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

จะได้ว่า

$$|U| = \binom{k+n-1}{n-1}$$

ทฤษฎีบท 2.2 หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก (Inclusion-Exclusion Principle) [2]
ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_j \leq n} \left| A_{l_1} \cap A_{l_2} \cap \cdots \cap A_{l_j} \right|$$

สำหรับการนับโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด จะอาศัยความรู้พื้นฐานต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3 ให้ $\{a_j\}_{j\geq 0}$ เป็นลำดับบน $\mathbb{C}$ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $\{a_j\}_{j\geq 0}$ คือ อนุกรม

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

ทฤษฎีบท 2.4 ทฤษฎีบทของเดอร์มัวร์ (De Moivre’s Theorem) [10]
สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ และทุก j จะได้ว่า

$$(\cos x + i \sin x)^j = \cos(jx) + i \sin(jx)$$

3. การนับจำนวนผลเฉลย โดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก

บทตั้ง 3.1 ให้ k และ $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ เป็นค่าคงที่ และ A แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \text{ โดยที่ } x_1 \geq a_1, x_2 \geq a_2, \ldots, x_n \geq a_n$$

จะได้ว่า

$$|A| = \binom{k+n-1-a_1-a_2-\cdots-a_n}{n-1}$$

บทตั้ง 3.2 ให้ k เป็นค่าคงที่ และ V แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \text{ โดยที่ } 0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq m-1$$

จะได้ว่า

$$|V| = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{k - mj + n - 1}{n - 1}$$

บทตั้งทั้งสองสามารถพิสูจน์ได้จากทฤษฎีบท 2.1 และ 2.2 ซึ่งผู้เขียนขอละการพิสูจน์ไว้

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod d \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le m$$

จะได้ว่า

$$|S| = \sum_{k=\left\lceil \frac{n-r}{d} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{mn-r}{d} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk + r - mj - 1}{n - 1}$$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก j ให้ V_j แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = j \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le m$$

จะได้ว่า

$$S = \bigcup_{\substack{j \equiv r \pmod d \\ n \le j \le mn}} V_j$$

เนื่องจาก $V_j \cap V_l = \emptyset$ สำหรับทุก j, l ซึ่ง $j \ne l$ ดังนั้น

$$|S| = \sum_{\substack{j \equiv r \pmod d \\ n \le j \le mn}} |V_j|$$

โดยนิยามของสมภาค ฟังก์ชันพื้น และฟังก์ชันเพดาน จะได้ว่า

$$\sum_{\substack{j \equiv r \pmod d \\ n \le j \le mn}} |V_j| = \sum_{k=\left\lceil \frac{n-r}{d} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{mn-r}{d} \right\rfloor} |V_{dk+r}|$$

ดังนั้น

$$|S| = \sum_{k=\left\lceil \frac{n-r}{d} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{mn-r}{d} \right\rfloor} |V_{dk+r}| \tag{3.1}$$

สำหรับแต่ละ k จาก V_{dk+r} แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = dk + r \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le m$$

ทำการเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, \dots, y_n = x_n - 1$ จะได้ว่า

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = dk + r - n \text{ โดยที่ } 0 \le y_1, y_2, \dots, y_n \le m - 1$$

จากบทตั้ง 3.2 จะได้

$$|V_{dk+r}| = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk + r - mj - 1}{n - 1} \tag{3.2}$$

แทน (3.2) ลงใน (3.1) จะได้

$$|S| = \sum_{k=\left\lceil \frac{n-r}{d} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{mn-r}{d} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk + r - mj - 1}{n - 1}$$

□

ตัวอย่าง 3.1 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0 \pmod 5 \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, x_3 \le 4$$

แทนค่า $n = 3, m = 4, d = 5, r = 0$ ในทฤษฎีบท 3.3 จะได้

$$|S| = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{5k-3}{4} \right\rfloor} (-1)^j \binom{3}{j} \binom{5k - 4j - 1}{2} = \binom{3}{0}\binom{4}{2} + \binom{3}{0}\binom{9}{2} - \binom{3}{1}\binom{5}{2} = 12$$

ทั้งนี้หากแจงนับโดยตรง พบว่าเซตผลเฉลยของสมภาคนี้ คือ

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,4,4), \\ (3,1,1), (3,3,4), (3,4,3), (4,2,4), (4,3,3), (4,4,2) \end{Bmatrix}$$

ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็น $|S| = 12$ ตัว สอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.3 ข้างต้น

ตัวอย่าง 3.2 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 2 \pmod 4 \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 3$$

แทนค่า $n = 4, m = 3, d = 4, r = 2$ ในทฤษฎีบท 3.3 จะได้

$$|S| = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{4k-2}{3} \right\rfloor} (-1)^j \binom{4}{j} \binom{4k - 3j + 1}{3} = \binom{4}{0}\binom{5}{3} + \binom{4}{0}\binom{9}{3} - \binom{4}{1}\binom{6}{3} + \binom{4}{2}\binom{3}{3} = 20$$

ทั้งนี้หากแจงนับโดยตรง พบว่าเซตผลเฉลยของสมภาคนี้ คือ

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,1,3,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1), \\ (1,3,1,1), (1,3,3,3), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1), \\ (2,2,3,3), (2,3,2,3), (2,3,3,2), (3,1,1,1), (3,1,3,3), \\ (3,2,2,3), (3,2,3,2), (3,3,1,3), (3,3,2,2), (3,3,3,1) \end{Bmatrix}$$

ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็น $|S| = 20$ ตัว สอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.3 ข้างต้น

4. การนับจำนวนผลเฉลย โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

ในหัวข้อนี้ เราจะนับจำนวนผลเฉลยของสมภาคเดียวกับในทฤษฎีบท 3.3 แต่เปลี่ยนวิธีการนับใหม่โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด ก่อนอื่นจะเริ่มจากบทตั้งที่ต้องใช้ ดังนี้

บทตั้ง 4.1 สำหรับทุก j ให้ a_j แทนจำนวนผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = j \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le m$$

จะได้ว่า $F(z) = (z + z^2 + \cdots + z^m)^n$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $\{a_j\}_{j\ge 0}$ กล่าวคือ

$$(z + z^2 + \cdots + z^m)^n = \sum_{j=n}^{mn} a_j z^j$$

บทพิสูจน์

เมื่อกระจาย $F(z) = (z + z^2 + \cdots + z^m)^n$ จะพบว่า สัมประสิทธิ์ของ z^j คือ จำนวนของพจน์ $z^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$ ทั้งหมด ซึ่ง $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = j$ โดยที่ $1 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le m$ □

บทตั้ง 4.2 สำหรับทุก j

(ก) ถ้า $j \equiv r (\mathrm{mod}\ d)$ แล้ว

$$\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = 1$$

(ข) ถ้า $j \not\equiv r (\mathrm{mod}\ d)$ แล้ว

$$\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = 0$$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก j

(ก) ถ้า $j \equiv r (\mathrm{mod}\ d)$ จะได้ว่า $w^{j-r} = 1$ ดังนั้น

$$\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} 1^k = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} 1 = 1$$

(ข) ถ้า $j \not\equiv r(\mathrm{mod}\, d)$ จะได้ว่า $w^{j-r} \neq 1$ ดังนั้น

$$\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = \frac{1}{d}\cdot\frac{w^{(j-r)d}-1}{w^{j-r}-1}$$

จาก $w^{(j-r)d} = 1$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{d}\cdot\frac{w^{(j-r)d}-1}{w^{j-r}-1} = \frac{1}{d}\cdot\frac{1-1}{w^{j-r}-1} = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = 0$$

$\square$

บทตั้ง 4.3 สำหรับทุก k ซึ่ง $1 \leq k \leq d-1$ จะได้ว่า

$$\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk} = w^{\frac{(m-1)k}{2}} \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\csc\left(\frac{k\pi}{d}\right)$$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก k ซึ่ง $1 \leq k \leq d-1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
w^{mk}-1 &= \cos\left(\frac{2mk\pi}{d}\right) + i\sin\left(\frac{2mk\pi}{d}\right) - 1 \\
&= \cos\left(\frac{2mk\pi}{d}\right) - 1 + 2i\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\cos\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \\
&= -2\sin^2\left(\frac{mk\pi}{d}\right) + 2i\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\cos\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \\
&= -2\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\left(\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) - i\cos\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\right) \\
&= -2\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\left(\cos\left(\frac{(2mk-d)\pi}{2d}\right) + i\sin\left(\frac{(2mk-d)\pi}{2d}\right)\right) \\
&= -2\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) w^{\frac{2mk-d}{4}}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$w^k - 1 = -2\sin\left(\frac{k\pi}{d}\right) w^{\frac{2k-d}{4}}$$

จาก $w^k \neq 1$ ดังนั้น

$$\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk} = \frac{w^{mk}-1}{w^k-1} = \frac{-2\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) w^{\frac{2mk-d}{4}}}{-2\sin\left(\frac{k\pi}{d}\right) w^{\frac{2k-d}{4}}} = w^{\frac{(m-1)k}{2}} \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\csc\left(\frac{k\pi}{d}\right)$$

$\square$

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod d \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le m$$

จะได้ว่า

$$|S| = \frac{1}{d}\left(m^n + \sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right)\right)$$

บทพิสูจน์

สำหรับทุก j ให้ V_j แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = j \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le m$$

และให้ $a_j = |V_j|$

ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3 จะได้

$$|S| = \sum_{\substack{j \equiv r \pmod d \\ n \le j \le mn}} |V_j| = \sum_{\substack{j \equiv r \pmod d \\ n \le j \le mn}} a_j$$

จากบทตั้ง 4.2 และการสลับลำดับการบวก จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \equiv r \pmod d \\ n \le j \le mn}} a_j &= \sum_{j=n}^{mn}\left(\frac{a_j}{d}\sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k}\right) \\ &= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\left(w^{-rk}\sum_{j=n}^{mn} a_j w^{kj}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$|S| = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\left(w^{-rk}\sum_{j=n}^{mn} a_j w^{kj}\right) \tag{4.1}$$

จากบทตั้ง 4.1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $\{a_j\}_{j \ge 0}$ คือ

$$F(z) = (z + z^2 + \cdots + z^m)^n = \sum_{j=n}^{mn} a_j z^j$$

ทั้งนี้สามารถเขียน $F(z)$ ได้อีกรูปแบบคือ

$$F(z) = (z + z^2 + \cdots + z^m)^n = z^n\left(\sum_{j=0}^{m-1} z^j\right)^n$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{j=n}^{mn} a_j z^j = z^n \left(\sum_{j=0}^{m-1} z^j\right)^n$$

แทน z ด้วย w^k ลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\sum_{j=n}^{mn} a_j w^{kj} = w^{nk} \left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk}\right)^n \tag{4.2}$$

จาก (4.1) และ (4.2) จะได้

$$|S| = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\left(w^{(n-r)k}\left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk}\right)^n\right) \tag{4.3}$$

พิจารณาพจน์ที่ k ในผลรวมข้างต้น

<u>กรณี</u> $k = 0$ จะได้ว่า

$$w^{(n-r)k}\left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk}\right)^n = \left(\sum_{j=0}^{m-1} 1\right)^n = m^n \tag{4.4}$$

<u>กรณี</u> $1 \le k \le d-1$ โดยบทตั้ง 4.3 จะได้

$$\begin{aligned} w^{(n-r)k}\left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk}\right)^n &= w^{(n-r)k}\left(w^{\frac{(m-1)k}{2}}\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\csc\left(\frac{k\pi}{d}\right)\right)^n \\ &= w^{\frac{(mn+n-2r)k}{2}}\sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

จาก (4.3), (4.4) และ (4.5) ได้ว่า

$$|S| = \frac{1}{d}\left(m^n + \sum_{k=1}^{d-1} w^{\frac{(mn+n-2r)k}{2}}\sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right)\right) \tag{4.6}$$

จากส่วนจริงของ $w^{\frac{(mn+n-2r)k}{2}}$ คือ $\cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right)$ และจาก $|S|$ เป็นจำนวนของผลเฉลยซึ่งเป็นจำนวนจริง ดังนั้นเมื่อพิจารณาส่วนจริงของ (4.6) จะได้

$$|S| = \frac{1}{d}\left(m^n + \sum_{k=1}^{d-1}\cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right)\sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right)\right)$$

□

ตัวอย่าง 4.1 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 5) \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, x_3 \le 4$$

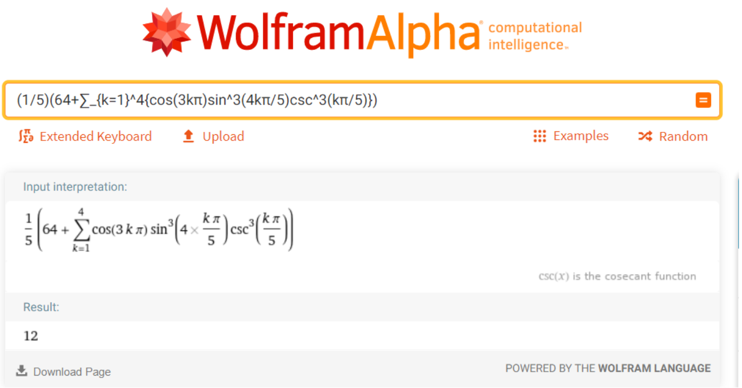
แทนค่า $n = 3, m = 4, d = 5, r = 0$ ในทฤษฎีบท 4.4 และใช้ Wolfram alpha ช่วยคำนวณ จะได้

$$|S| = \frac{1}{5}\left(64 + \sum_{k=1}^{4} \cos(3k\pi)\sin^3\left(\frac{4k\pi}{5}\right)\csc^3\left(\frac{k\pi}{5}\right)\right) = 12$$

ทั้งนี้หากแจงนับโดยตรง พบว่าเซตผลเฉลยของสมภาคนี้ คือ

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,4,4), \\ (3,1,1), (3,3,4), (3,4,3), (4,2,4), (4,3,3), (4,4,2) \end{Bmatrix}$$

ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็น $|S| = 12$ ตัว สอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีบท 4.4 ข้างต้น



รูปที่ 4.1 ผลการคำนวณโดย Wolfram Alpha กรณี $n = 3, m = 4, d = 5, r = 0$

ตัวอย่าง 4.2 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \text{ โดยที่ } 1 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 3$$

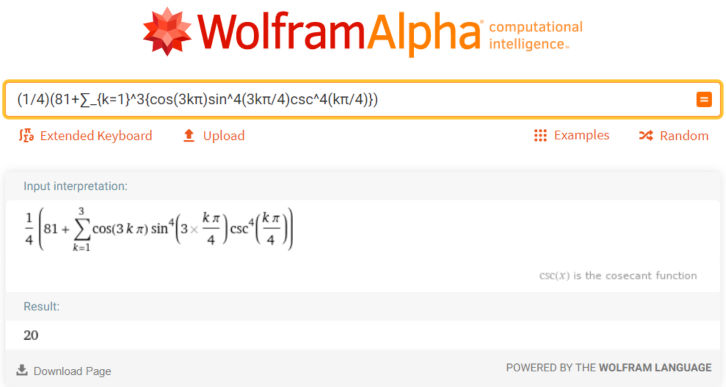
แทนค่า $n = 4, m = 3, d = 4, r = 2$ ในทฤษฎีบท 4.4 และใช้ Wolfram alpha ช่วยคำนวณ จะได้

$$|S| = \frac{1}{4}\left(81 + \sum_{k=1}^{3} \cos(3k\pi)\sin^4\left(\frac{3k\pi}{4}\right)\csc^4\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right) = 20$$

ทั้งนี้หากแจงนับโดยตรง พบว่าเซตผลเฉลยของสมภาคนี้ คือ

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,1,3,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1), \\ (1,3,1,1), (1,3,3,3), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1), \\ (2,2,3,3), (2,3,2,3), (2,3,3,2), (3,1,1,1), (3,1,3,3), \\ (3,2,2,3), (3,2,3,2), (3,3,1,3), (3,3,2,2), (3,3,3,1) \end{Bmatrix}$$

ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็น $|S| = 20$ ตัว สอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีบท 4.4 ข้างต้น



รูปที่ 4.2 ผลการคำนวณโดย Wolfram Alpha กรณี $n=4, m=3, d=4, r=2$

5. เอกลักษณ์เกี่ยวข้องกับผลรวมตรีโกณมิติกำลัง

ทฤษฎีบท 3.3 และทฤษฎีบท 4.4 เป็นการนับจำนวนสมาชิกของเซตเดียวกัน จึงสามารถสรุปได้ว่าผลที่ได้จากทั้งสองทฤษฎีบทมีค่าเท่ากันโดยอาศัยการพิสูจน์เชิงการจัด และเมื่อจัดรูปสมการจะได้เอกลักษณ์เกี่ยวกับผลรวมตรีโกณมิติกำลัง ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.1

$$\sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right)$$

$$= -m^n + d \sum_{k=\left\lceil \frac{n-r}{d} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{mn-r}{d} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1}$$

โดยทั่วไป การคำนวณค่าของสัมประสิทธิ์ทวินาม ทำได้ง่ายกว่าการคำนวณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนั้นทฤษฎีบท 5.1 นี้จะช่วยให้หาค่าชัดแจ้งของอนุกรมตรีโกณมิติกำลังบางรูปแบบได้ง่ายขึ้น นอกจากนี้ ยังสามารถสร้างเอกลักษณ์ตรีโกณมิติรูปแบบต่าง ๆ ได้เพิ่มเติม โดยการแทนค่าของตัวแปร n, m, d, r ในทฤษฎีบท 5.1 นี้ เช่น

1) เมื่อแทนค่า $n = 4m,\ d = 2m,\ r = 0$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=0}^{m-1} \csc^{4m}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2m}\right) = -m^{4m} + 2m \sum_{k=2}^{2m} \sum_{j=0}^{2k-4} (-1)^j \binom{4m}{j} \binom{2mk-mj-1}{4m-1}$$

2) เมื่อแทนค่า $n = 4, m = 5, d = 11, r = 6$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=1}^{10} (-1)^{k-1} \cos\left(\frac{k\pi}{11}\right) \sin^4\left(\frac{5k\pi}{11}\right) \csc^4\left(\frac{k\pi}{11}\right) = 295$$

3) เมื่อแทนค่า $n = 7, m = 3, d = 7, r = 0$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=1}^{6} \sin^7\left(\frac{3k\pi}{7}\right) \csc^7\left(\frac{k\pi}{7}\right) = 578$$

4) เมื่อแทนค่า $n = 5, m = 10, d = 12, r = 21$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=1}^{11} \cos^6\left(\frac{k\pi}{12}\right) = \frac{11}{4}$$

5) เมื่อแทนค่า $n = 29, m = 2, d = 5, r = -2$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=1}^{4} \cos^{30}\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \frac{1860498}{2^{29}}$$

6. สรุป

ในบทความนี้ ได้หาสูตรการนับจำนวนผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod{d} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

เมื่อ n, m, d, r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n, m, d \geq 1$ โดยใช้การนับสองวิธีที่ต่างกัน คือ

1. การนับโดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก ได้ผลลัพธ์เป็นดังทฤษฎีบท 3.3
2. การนับโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด ได้ผลลัพธ์เป็นดังทฤษฎีบท 4.4

ซึ่งผลลัพธ์จากการนับทั้งสองวิธีนี้เชื่อมโยงเข้าหากันด้วยหลักของการพิสูจน์เชิงการจัด ทำให้ได้เอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับผลรวมฟังก์ชันตรีโกณมิติกำลัง นั่นคือ ทฤษฎีบท 5.1 ซึ่งช่วยให้หาค่าชัดแจ้งของอนุกรมตรีโกณมิติกำลังบางรูปแบบได้ง่ายขึ้น รวมทั้งยังสามารถนำไปใช้ในการสร้างเอกลักษณ์ตรีโกณมิติเพิ่มเติมได้

เอกสารอ้างอิง

[1] กิตติกร นาคประสิทธิ์. (2548). การพิสูจน์เชิงการจัด. *นิตยสารคณิตศาสตร์มายแมทส์*, 1 (11), น. 22 – 25.

Nakprasit, K. (2005). Combinatorial Proof. *My Maths: The Magazine of Mathematics*, 1 (11), p. 22 – 25.

[2] Beeler, R. A. (2015). *How to Count: An Introduction to Combinatorics and Its Applications.* New York: Springer.

[3] Berndt, B. C. and Yeap, B. P. (2002). Explicit Evaluations and Reciprocity Theorems for Finite Trigonometric Sums. *Advances in Applied Mathematics,* 29 (3), p. 358 – 385.

[4] Chu, W. and Marini, A. (1999). Partial Fraction and Trigonometric Identities. *Advances in Applied Mathematics,* 23, p. 115 – 175.

[5] Chuan-Chong, C. and Khee-Meng, K. (1992). *Principles and Technique in Combinatorics*. Singapore: World Scientific Publishing.

[6] Dowker, J. S. (1987). Casimir Effect Around A Cone. *Physical Review D,* 36 (10), p. 3095 – 3101.

[7] Dowker, J. S. (1989). Heat Kernel Expansion on A Generalized Cone. *Journal of Mathematical Physics*, 30 (4), p. 770 – 773.

[8] Dowker, J. S. (1992). On Verlinde's Formula for The Dimensions of Vector Bundles on Moduli Spaces. *Journal of Physics A: Mathematical and General,* 25 (9), p. 2641 – 2648.

[9] He, Y. (2020). Explicit Expressions for Finite Trigonometric Sums. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 484 (1), Article 123702.

[10] Lial, M. L., Hornsby, J., Schneider, D. I. and Daniels, C. J. (2017). *College Algebra & Trigonometry* (6th ed.). London: Pearson Education.

[11] Merca, M. (2012). A Note on Cosine Power Sums. *Journal of Integer Sequences,* 15 (5), Article 12.5.3.