วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา 68 เล่มที่ 711 กันยายน – ธันวาคม 2566

https://www.mathassociation.or.th Email: MathThaiOrg@gmail.com

เกมคณิตศาสตร์: ทหารรักษาเมือง

Mathematical Game: City Guard

DOI: 10.14456/mj-math.2023.5

สุธน ตาดี

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี 15000

Suton Tadee

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,

Thepsatri Rajabhat University, Lopburi 15000

Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th

วันที่รับบทความ : 26 กุมภาพันธ์ 2566 วันที่แก้ไขบทความ : 20 พฤษภาคม 2566 วันที่ตอบรับบทความ : 24 พฤศจิกายน 2566

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้นำเสนอเกมคณิตศาสตร์ โดยเกมดังกล่าวจะเรียกว่า ทหารรักษาเมือง ซึ่งเป็นเกมที่ช่วยพัฒนาทักษะและกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์

คำสำคัญ: เกมคณิตศาสตร์

ABSTRACT

In this article, we present a mathematical game. The game is called City Guard. This is a game that helps develop mathematical skills and thinking processes.

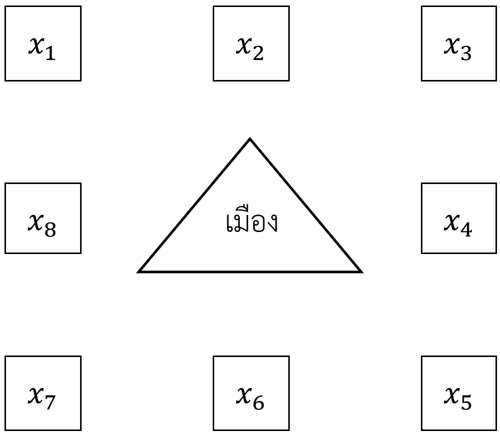
Keywords: Mathematical game

1. บทนำ

เป็นที่ยอมรับกันว่า การเล่นเกมคณิตศาสตร์นั้น มีผลทำให้เกิดการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาการคิดอย่างมีเหตุมีผล และเป็นการกระตุ้นการเรียนรู้ของผู้เล่น [1, 3] ด้วยเหตุนี้จึงมีผู้คิดค้นเกมคณิตศาสตร์มากมาย [2, 4] ในบทความนี้ ผู้วิจัยได้คิดค้นและนำเสนอเกมคณิตศาสตร์หนึ่งเกม ซึ่งเรียกว่า ทหารรักษาเมือง (City Guard) ซึ่งเกมนี้จะเล่นเพียงคนเดียวหรือเป็นกลุ่มก็ได้ โดยบุคคลใดหรือกลุ่มใดได้คำตอบก่อน จะถือว่าเป็นผู้ชนะ ซึ่งหลังจากที่ผู้วิจัยได้นำเกมดังกล่าวทดลองใช้ พบว่าเกมทหารรักษาเมืองนี้เหมาะกับนักเรียนทุกระดับชั้น โดยความยากง่ายของเกมขึ้นกับสถานการณ์ของปัญหาที่กำหนดในการเล่น

2. กติกาการเล่น

ในเมืองหนึ่ง มีการจัดทหารเพื่อป้องกันเมือง โดยกำหนดให้ทหารอยู่ประจำการในป้อมที่ล้อมรอบเมืองทั้งแปดทิศ ดังรูป



รูปที่ 2.1 แผนผังเมืองและป้อมทหารทั้งแปดทิศ

กำหนดสัญลักษณ์

1) ให้ x_i แทน จำนวนทหารที่อยู่ในป้อมที่ i เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

2) ให้ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ แทน รูปแบบการจัดทหารรักษาเมือง

ข้อตกลง

ถ้าพิจารณารูปแบบการจัดทหารรักษาเมือง $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ ตามรูปที่ 2.1 ในทิศตามหรือทวนเข็มนาฬิกา แล้วได้ชุดเดียวกัน ถือว่าเป็นรูปแบบเดียวกัน เช่น

$(6,1,2,4,3,5,1,2) = (2,4,3,5,1,2,6,1) = (6,2,1,5,3,4,2,1) = (1,5,3,4,2,1,6,2)$

ยุทธวิธี ในการจัดรูปแบบทหารรักษาเมือง มีดังนี้

1) ทุกป้อมจะต้องมีทหารอย่างน้อย 1 คน

2) ทุกด้านจะต้องมีทหารอยู่ประจำการทั้ง 3 ป้อม รวมกันได้ 9 คน

ดังนั้น จากรูปที่ 2.1 จะได้ว่า

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \tag{1}$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 9 \tag{2}$$

$$x_5 + x_6 + x_7 = 9 \tag{3}$$

$$x_7 + x_8 + x_1 = 9 \tag{4}$$

หากเป็นไปตามยุทธวิธีข้างต้น พบว่า เป็นการใช้จำนวนทหารที่น้อยที่สุด เพื่อป้องกันเมืองในแต่ละด้าน โดยศัตรูจะไม่สามารถโจมตีเข้ามาในเมืองได้ ดังนั้นในการจัดรูปแบบทหารรักษาเมืองทุกครั้งจะต้องเป็นไปตามยุทธวิธีนี้

ก่อนเริ่มเล่นเกมให้ $x_i = 3$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ซึ่งเป็นไปตามยุทธวิธีที่กำหนด และใช้ทหารรักษาเมืองทั้งหมด 24 คน

หลังจากนั้นพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ โดยผู้เล่นจะต้องคิดวิธีการแก้ไขปัญหาตามสถานการณ์นั้น ๆ และผู้ที่แก้ไขปัญหาหรือหารูปแบบการจัดทหารรักษาเมืองได้ก่อน ถือว่าเป็นผู้ชนะ

3. สถานการณ์ปัญหา พร้อมแนวคิด

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหา พร้อมแนวคิด เพื่อให้ครูผู้สอนสามารถนำไปปรับใช้ให้เหมาะสมกับนักเรียนในชั้นเรียนต่อไป

สถานการณ์ปัญหา 3.1 ถ้ามีทหาร 2 คน จาก 24 คน ไม่สบาย ทำให้ไม่สามารถปฏิบัติหน้าที่ได้ ดังนั้น เหลือทหารอยู่ 22 คน เรายังคงสามารถจัดทหารได้ตามยุทธวิธีข้างต้นได้หรือไม่ ถ้าได้ จัดทหารได้กี่รูปแบบ และมีรูปแบบอะไรบ้าง

แนวคิด

จากยุทธวิธีในหัวข้อ 2 ทั้ง 2 ข้อ จะได้ว่า $1 \leq x_i \leq 7$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ และจากที่มีทหารอยู่ 22 คน ดังนั้น $\sum_{i=1}^{8} x_i = 22$

จาก (1) และ (3) จะได้ว่า

$$x_4 + x_8 = 4 \tag{5}$$

และจาก (2) และ (4) จะได้ว่า

$$x_2 + x_6 = 4 \tag{6}$$

จาก (5) และ (6) และข้อตกลง เป็นการเพียงพอที่จะพิจารณาเฉพาะในกรณีต่อไปนี้

<u>กรณี 1</u> $x_2 = 1$, $x_6 = 3$, $x_4 = 1$, $x_8 = 3$

ถ้า $x_1 = 1$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 7$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 1$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 5$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1,1,7,1,1,3,5,3)$

ถ้า $x_1 = 2$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 6$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 2$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 4$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (2,1,6,1,2,3,4,3)$

ถ้า $x_1 = 3$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 5$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 3$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 3$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (3,1,5,1,3,3,3,3)$

ถ้า $x_1 = 4$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 4$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 4$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 2$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (4,1,4,1,4,3,2,3)$

ถ้า $x_1 = 5$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 3$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 5$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 1$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (5,1,3,1,5,3,1,3)$

ถ้า $x_1 = 6$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 2$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 6$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $x_1 = 7$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 1$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 7$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

<u>กรณี 2</u> $x_2 = 1$, $x_6 = 3$, $x_4 = 2$, $x_8 = 2$

ถ้า $x_1 = 1$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 7$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $x_1 = 2$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 6$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 1$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 5$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (2, 1, 6, 2, 1, 3, 5, 2)$

ถ้า $x_1 = 3$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 5$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 2$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 4$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (3, 1, 5, 2, 2, 3, 4, 2)$

ถ้า $x_1 = 4$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 4$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 3$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 3$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (4, 1, 4, 2, 3, 3, 3, 2)$

ถ้า $x_1 = 5$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 3$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 4$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 2$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (5, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 2) = (3, 1, 5, 2, 2, 3, 4, 2)$

ถ้า $x_1 = 6$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 2$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 5$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 1$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (6, 1, 2, 2, 5, 3, 1, 2) = (2, 1, 6, 2, 1, 3, 5, 2)$

ถ้า $x_1 = 7$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 1$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 6$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

<u>กรณี 3</u> $x_2 = 2$, $x_6 = 2$, $x_4 = 2$, $x_8 = 2$

ถ้า $x_1 = 1$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 6$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 1$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 6$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1, 2, 6, 2, 1, 2, 6, 2)$

ถ้า $x_1 = 2$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 5$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 2$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 5$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (2, 2, 5, 2, 2, 2, 5, 2)$

ถ้า $x_1 = 3$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 4$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 3$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 4$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (3, 2, 4, 2, 3, 2, 4, 2)$

ถ้า $x_1 = 4$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 3$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 4$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 3$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (4, 2, 3, 2, 4, 2, 3, 2) = (3, 2, 4, 2, 3, 2, 4, 2)$

ถ้า $x_1 = 5$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 2$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 5$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 2$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (5, 2, 2, 2, 5, 2, 2, 2) = (2, 2, 5, 2, 2, 2, 5, 2)$

ถ้า $x_1 = 6$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 1$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 6$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 1$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (6, 2, 1, 2, 6, 2, 1, 2) = (1, 2, 6, 2, 1, 2, 6, 2)$

ถ้า $x_1 = 7$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น สามารถจัดทหารได้ทั้งหมด 11 รูปแบบ ดังนี้

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1, 1, 7, 1, 1, 3, 5, 3), (2, 1, 6, 1, 2, 3, 4, 3),$
$(3, 1, 5, 1, 3, 3, 3, 3), (4, 1, 4, 1, 4, 3, 2, 3), (5, 1, 3, 1, 5, 3, 1, 3), (2, 1, 6, 2, 1, 3, 5, 2),$
$(3, 1, 5, 2, 2, 3, 4, 2), (4, 1, 4, 2, 3, 3, 3, 2), (1, 2, 6, 2, 1, 2, 6, 2), (2, 2, 5, 2, 2, 2, 5, 2),$
$(3, 2, 4, 2, 3, 2, 4, 2)$

สถานการณ์ปัญหา 3.2 จำนวนทหารน้อยที่สุดที่สามารถจัดได้ตามยุทธวิธีข้างต้นคือเท่าใด เพราะเหตุใด และจัดทหารได้กี่รูปแบบ

แนวคิด

จาก (1) และ (3) จะได้ว่า $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 = 18$ และจากยุทธวิธีที่ 1 จะได้ว่า x_4 และ x_8 ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ คือ $x_4 = x_8 = 1$ เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{8} x_i = 20$ นั่นคือ จำนวนทหารน้อยที่สุดที่สามารถจัดได้ตามยุทธวิธี เท่ากับ 20 คน ในทำนองเดียวกัน จาก (2) และ (4) จะได้ว่า $x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 + x_1 = 18$ ดังนั้น $x_2 = x_6 = 1$ และจากยุทธวิธีทั้ง 2 จะได้ว่า $1 \leq x_i \leq 7$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ เพราะฉะนั้นสามารถแยกพิจารณาได้ดังนี้

ถ้า $x_1 = 1$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 7$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 1$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 7$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1, 1, 7, 1, 1, 1, 7, 1)$

ถ้า $x_1 = 2$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 6$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 2$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 6$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1)$

ถ้า $x_1 = 3$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 5$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 3$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 5$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1)$

ถ้า $x_1 = 4$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 4$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 4$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 4$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1)$

ถ้า $x_1 = 5$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 3$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 5$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 3$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1) = (3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1)$

ถ้า $x_1 = 6$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 2$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 6$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 2$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (6,1,2,1,6,1,2,1) = (2,1,6,1,2,1,6,1)$

ถ้า $x_1 = 7$ จาก (1) จะได้ว่า $x_3 = 1$ และจาก (2) จะได้ว่า $x_5 = 7$ และจาก (3) จะได้ว่า $x_7 = 1$ เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (7,1,1,1,7,1,1,1) = (1,1,7,1,1,1,7,1)$

ดังนั้น จำนวนทหารน้อยที่สุดที่สามารถจัดได้ตามยุทธวิธี เท่ากับ 20 คน และจัดได้ทั้งหมด 4 รูปแบบ คือ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1,1,7,1,1,1,7,1), (2,1,6,1,2,1,6,1),$ $(3,1,5,1,3,1,5,1)$ และ $(4,1,4,1,4,1,4,1)$

สถานการณ์ปัญหา 3.3 ถ้าเพิ่มทหารอีก 2 คน จากเดิม 24 คน (มีทหารทั้งหมด 26 คน) เรายังคงสามารถจัดทหารได้ตามยุทธวิธีข้างต้นได้หรือไม่ ถ้าได้ จัดทหารได้กี่รูปแบบ และมีรูปแบบอะไรบ้าง

แนวคิด

จากยุทธวิธีทั้ง 2 จะได้ว่า $1 \leq x_i \leq 7$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ และจากที่มีทหารทั้งหมดอยู่ 26 คน จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{8} x_i = 26$

จาก (1) และ (3) จะได้ว่า $x_4 + x_8 = 8$ และจาก (2) และ (4) จะได้ว่า $x_2 + x_6 = 8$ พิจารณาในทำนองเดียวกับสถานการณ์ปัญหา 3.1 จะได้ว่า สามารถจัดทหารได้ทั้งหมด 16 รูปแบบ ดังนี้
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (7,1,1,7,1,7,1,1), (5,2,2,6,1,6,2,2),$
$(6,2,1,6,2,6,1,2), (3,3,3,5,1,5,3,3), (4,3,2,5,2,5,2,3), (5,3,1,5,3,5,1,3),$
$(1,4,4,4,1,4,4,4), (2,4,3,4,2,4,3,4), (6,1,2,6,1,7,1,2), (5,1,3,5,1,7,1,3),$
$(4,1,4,4,1,7,1,4), (4,2,3,5,1,6,2,3), (5,2,2,5,2,6,1,3), (3,2,4,4,1,6,2,4),$
$(2,3,4,4,1,5,3,4)$ และ $(3,3,3,4,2,5,2,4)$

สถานการณ์ปัญหา 3.4 จำนวนทหารมากที่สุดที่สามารถจัดได้ตามยุทธวิธีข้างต้นคือเท่าใด เพราะเหตุใด และจัดทหารได้กี่รูปแบบ

แนวคิด

จาก (1) และ (3) จะได้ว่า $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 = 18$ และจากยุทธวิธีทั้ง 2 จะได้ว่า $1 \leq x_i \leq 7$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ดังนั้น x_4 และ x_8 ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้คือ $x_4 = x_8 = 7$ เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{8} x_i = 32$ นั่นคือ จำนวนทหารมากที่สุดที่สามารถจัดได้ตามยุทธวิธี เท่ากับ 32 คน

จาก (2) และ $x_4 = 7$ จะได้ว่า $x_3 = x_5 = 1$ และจาก (4) และ $x_8 = 7$ จะได้ว่า $x_1 = x_7 = 1$ และจาก (1) และ (3) จะได้ว่า $x_2 = 7$ และ $x_6 = 7$ ตามลำดับ เพราะฉะนั้นสามารถจัดทหารได้เพียง 1 รูปแบบ คือ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1, 7, 1, 7, 1, 7, 1, 7)$

4. บทสรุปเกมทหารรักษาเมือง

ในการเล่มเกมทหารรักษาเมืองแต่ละครั้ง อาจกำหนดจำนวนทหารรักษาเมืองเท่ากับ n คน โดยที่ $20 \leq n \leq 32$ ได้ ซึ่งรูปแบบการจัดทหารรักษาเมืองทั้งหมดที่เป็นไปได้ในแต่ละ n เป็นดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 รูปแบบการจัดทหารรักษาเมืองเป็นไปได้ในแต่ละ n โดยที่ $20 \leq n \leq 32$

จำนวนทหาร (n)	**รูปแบบการจัดทหารรักษาเมือง ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$)**
20	$(1,1,7,1,1,1,7,1), (2,1,6,1,2,1,6,1), (3,1,5,1,3,1,5,1),$ $(4,1,4,1,4,1,4,1)$
21	$(2,1,6,2,1,2,6,1), (3,1,5,2,2,2,5,1), (4,1,4,2,3,2,4,1),$ $(5,1,3,2,4,2,3,1), (6,1,2,2,5,2,2,1), (7,1,1,2,6,2,1,1)$
22	$(1,1,7,1,1,3,5,3), (2,1,6,1,2,3,4,3), (3,1,5,1,3,3,3,3),$ $(4,1,4,1,4,3,2,3), (5,1,3,1,5,3,1,3), (2,1,6,2,1,3,5,2),$ $(3,1,5,2,2,3,4,2), (4,1,4,2,3,3,3,2), (1,2,6,2,1,2,6,2),$ $(2,2,5,2,2,2,5,2), (3,2,4,2,3,2,4,2)$
23	$(4,1,4,4,1,4,4,1), (5,1,3,4,2,4,3,1), (6,1,2,4,3,4,2,1),$ $(7,1,1,4,4,4,1,1), (2,2,5,3,1,3,5,2), (3,2,4,3,2,3,4,2),$ $(4,2,3,3,3,3,3,2), (5,2,2,3,4,3,2,2), (6,2,1,3,5,3,1,2),$ $(3,1,5,3,1,4,4,2), (4,1,4,3,2,4,3,2), (5,1,3,3,3,4,2,2),$ $(6,1,2,3,4,4,1,2)$
24	$(5,1,3,5,1,5,3,1), (6,1,2,5,2,5,2,1), (7,1,1,5,3,5,1,1),$ $(3,2,4,4,1,4,4,2), (4,2,3,4,2,4,3,2), (5,2,2,4,3,4,2,2),$ $(6,2,1,4,4,4,1,2), (1,3,5,3,1,3,5,3), (2,3,4,3,2,3,4,3),$ $(3,3,3,3,3,3,3,3), (4,1,4,4,1,5,3,2), (5,1,3,4,2,5,2,2),$ $(6,1,2,4,3,5,1,2), (3,1,5,3,1,5,3,3), (4,1,4,3,2,5,2,3),$ $(2,2,5,3,1,4,4,3), (3,2,4,3,2,4,3,3)$
25	$(6,1,2,6,1,6,2,1), (7,1,1,6,2,6,1,1), (4,2,3,5,1,5,3,2),$ $(5,2,2,5,2,5,2,2), (6,2,1,5,3,5,1,2), (2,3,4,4,1,4,4,3),$ $(3,3,3,4,2,4,3,3), (4,3,2,4,3,4,2,3), (5,3,1,4,4,4,1,3),$ $(5,1,3,5,1,6,2,2), (6,1,2,5,2,6,1,2), (4,1,4,4,1,6,2,3),$ $(5,1,3,4,2,6,1,3), (3,2,4,4,1,5,3,3), (4,2,3,4,2,5,2,3),$ $(5,2,2,4,3,5,1,3)$

จำนวนทหาร (n)	รูปแบบการจัดทหารรักษาเมือง $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$
26	$(7,1,1,7,1,7,1,1), (5,2,2,6,1,6,2,2), (6,2,1,6,2,6,1,2), (3,3,3,5,1,5,3,3), (4,3,2,5,2,5,2,3), (5,3,1,5,3,5,1,3), (1,4,4,4,1,4,4,4), (2,4,3,4,2,4,3,4), (6,1,2,6,1,7,1,2), (5,1,3,5,1,7,1,3), (4,1,4,4,1,7,1,4), (4,2,3,5,1,6,2,3), (5,2,2,5,2,6,1,3), (3,2,4,4,1,6,2,4), (2,3,4,4,1,5,3,4), (3,3,3,4,2,5,2,4)$
27	$(6,2,1,7,1,7,1,2), (4,3,2,6,1,6,2,3), (5,3,1,6,2,6,1,3), (2,4,3,5,1,5,3,4), (3,4,2,5,2,5,2,4), (4,4,1,5,3,5,1,4), (5,2,2,6,1,7,1,3), (4,2,3,5,1,7,1,4), (3,3,3,5,1,6,2,4), (4,3,2,5,2,6,1,4)$
28	$(5,3,1,7,1,7,1,3), (3,4,2,6,1,6,2,4), (4,4,1,6,2,6,1,4), (1,5,3,5,1,5,3,5), (2,5,2,5,2,5,2,5), (4,3,2,6,1,7,1,4), (3,3,3,5,1,7,1,5), (2,4,3,5,1,6,2,5)$
29	$(4,4,1,7,1,7,1,4), (2,5,2,6,1,6,2,5), (3,5,1,6,2,6,1,5), (3,4,2,6,1,7,1,5)$
30	$(3,5,1,7,1,7,1,5), (1,6,2,6,1,6,2,6), (2,5,2,6,1,7,1,6)$
31	$(2,6,1,7,1,7,1,6)$
32	$(1,7,1,7,1,7,1,7)$

นอกจากนี้ เพื่อให้เกิดความหลากหลาย สามารถปรับกติกาหรือยุทธวิธีในการเล่นเกมนี้ได้ เช่น เปลี่ยนจำนวนทหารรวมในทุกด้านซึ่งต้องประจำการอยู่ทั้ง 3 ป้อม จาก 9 เป็นจำนวนอื่น หรือเพิ่มจำนวนป้อมหรือเปลี่ยนการจัดเรียงป้อมล้อมเมืองในรูปแบบอื่น

เอกสารอ้างอิง

[1] Chizary, F. and Farhangi, A. (2017). Efficiency of Educational Games on Mathematics Learning of Students at Second Grade of Primary School. *Journal of History Culture and Art Research*, 6 (1), p. 232 – 240.

[2] Ferreira, J.L. (2020). *Game Theory: An Applied Introduction*. London: Red Globe Press.

[3] Mani, A. (2015). Maths Games: An Effective Pedagogical Tool to Enhance Learning. *Scholarly Journal of Scientific Research and Essay*, 4 (5), p. 74 – 76.

[4] Zaslavsky, C. (1998). *Math Games & Activities from Around the World*. Chicago: Chicago Review Press.