



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 69 เล่มที่ 712 กันยายน – ธันวาคม 2567

<https://www.mathassociation.or.th>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ปัญหาการแบ่งแผ่นไม้

The Plank Partition Problem

DOI: 10.14456/mj-math.2024.1

วรเชษฐ์ สมมะณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ เชียงใหม่ 50300

Worachead Sommanee

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Chiangmai Rajabhat University, Chiangmai 50300

Email: worachead_som@cmru.ac.th

วันที่รับบทความ : 12 พฤศจิกายน 2565 วันที่แก้ไขบทความ : 1 สิงหาคม 2566 วันที่ตอบรับบทความ : 13 ธันวาคม 2567

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เราจะพิสูจน์วิธีการแบ่งแผ่นไม้ออกเป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน โดยแผ่นไม้มีความกว้าง a หน่วย และความยาวมากกว่า $\sqrt{m^2 - a^2}$ หน่วย เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่า a และ k หาร m ลงตัว โดยใช้เพียงไม้บรรทัดและอุปกรณ์สำหรับการตัด ซึ่งเป็นการประยุกต์ใช้ความรู้ทางเรขาคณิตช่วยในการแก้ปัญหาย่างง่าย

คำสำคัญ: เส้นขนาน ความคล้าย

ABSTRACT

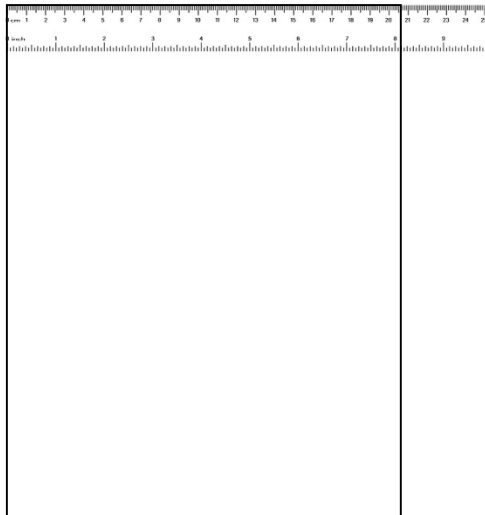
In this paper, we prove the method for a partition of a plank to be the same k parts where a width of the plank is a units and its length is greater than $\sqrt{m^2 - a^2}$ units when m is the least positive integer such that $m > a$ and m is divided by k , by

using a ruler and an equipment for cutting. This is an application of a geometrical knowledge to solve the problem easily.

Keywords: Parallel, Similarity

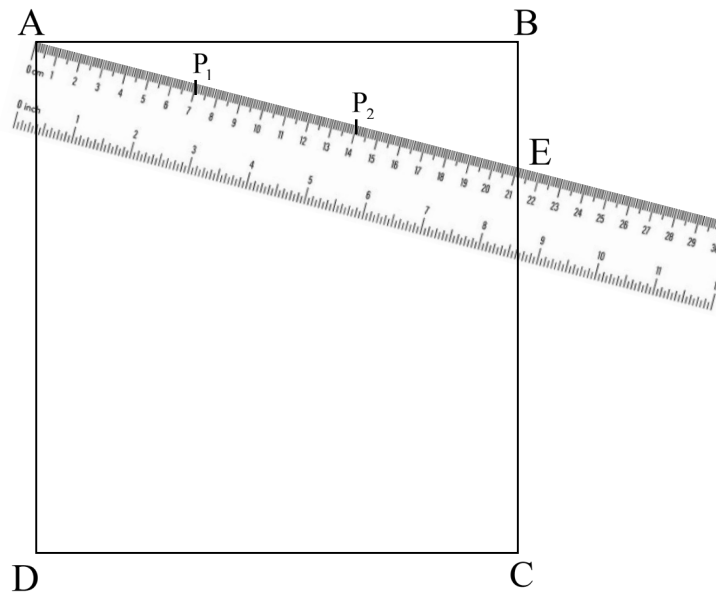
1. บทนำ

บ่อยครั้งผู้ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์มักจะเกิดคำถามว่า “เรียนคณิตศาสตร์ไปเพื่ออะไร” เพราะไม่ได้นำไปใช้ในชีวิตจริง ปัญหาต่อไปนี้ผู้เขียนได้เห็นจากคลิปวิดีโอของอัน บ้านทองกวาว [2] ที่นำเสนอวิธีแบ่งช่องเท่า ๆ กัน ไม่ต้องใช้เครื่องคิดเลข ซึ่งเป็นเรื่องราวของช่างไม้คนหนึ่ง ที่ต้องการแบ่งแผ่นไม้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน โดยใช้เพียงไม้บรรทัดและอุปกรณ์สำหรับการตัด ซึ่งแผ่นไม้ดังกล่าวมีความกว้างมากกว่า 20 เซนติเมตร แต่ไม่เกิน 21 เซนติเมตร

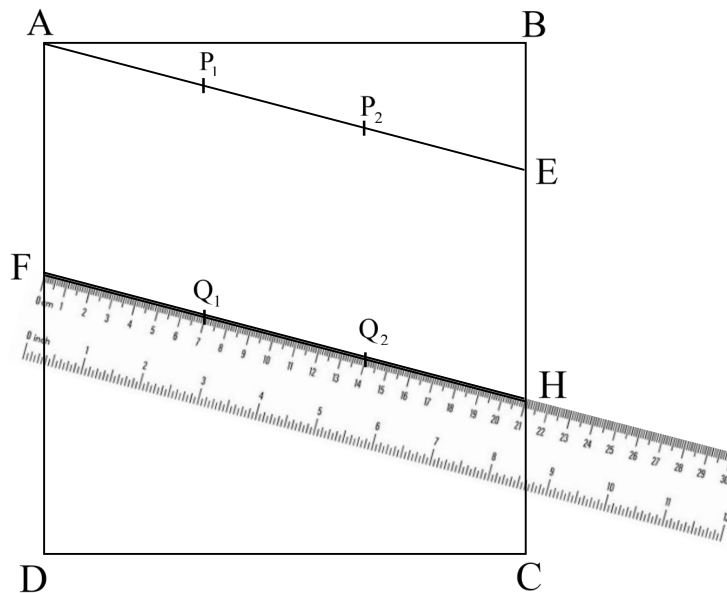


ทั้งนี้ หากแผ่นไม้มีความกว้าง 20.57 เซนติเมตร โดยปกติถ้าใช้เครื่องคิดเลขหาร 20.57 ด้วย 3 จะได้ผลลัพธ์ประมาณ 6.8566 เซนติเมตร ซึ่งไม่สามารถกำหนดระยะดังกล่าวที่แน่นอนบนไม้บรรทัดได้ ช่างไม้จึงแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยวิธีการดังต่อไปนี้

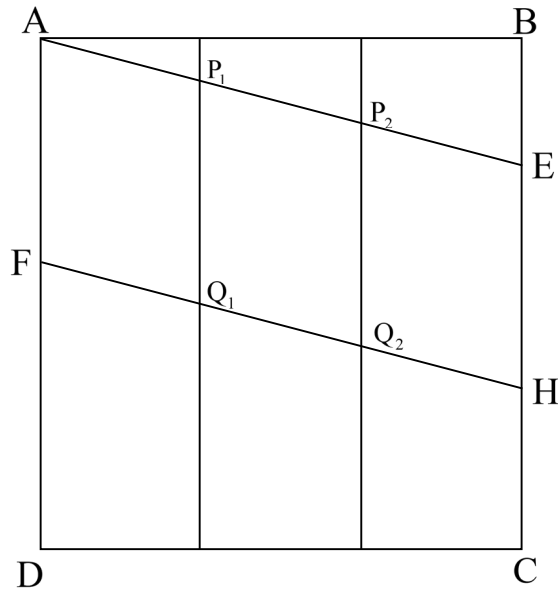
ขั้นที่ 1 ใช้ไม้บรรทัดที่มีความยาวอย่างน้อย 21 เซนติเมตร เอียงจากจุด A ให้ไปตัดกับด้าน BC ที่จุด E โดยที่ความยาวจากจุด A ไปยังจุด E เป็น 21 เซนติเมตร พอติ ดังรูป ดังนั้นเราจะสามารถแบ่งส่วนของเส้นตรง AE บนไม้บรรทัดเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน ได้พอติ ที่จุด P_1 และ P_2 โดยที่จุด P_1 เป็นจุดที่ระยะ 7 เซนติเมตร และจุด P_2 เป็นจุดที่ระยะ 14 เซนติเมตร ตามลำดับ ทำเครื่องหมายที่จุด P_1 และ P_2



ขั้นที่ 2 เลือกจุดจุดหนึ่งบนด้าน AD เรียกจุดนั้นว่าจุด F ดำเนินการเช่นเดียวกันกับขั้นที่ 1 ที่จุด F โดยเอียงไม้บรรทัดจากจุด F ให้ไปตัดกับด้าน BC ที่จุด H โดยที่ FH ความยาว 21 เซนติเมตร ดังรูป แบ่งส่วนของเส้นตรง FH ที่จุด Q_1 และ Q_2 โดยที่จุด Q_1 เป็นจุดที่ระยะ 7 เซนติเมตร และจุด Q_2 เป็นจุดที่ระยะ 14 เซนติเมตร ตามลำดับให้ทำเครื่องหมายที่จุด Q_1 และ Q_2



ขั้นที่ 3 ลากเส้นตรงผ่านจุด P_1 และ Q_1 และเส้นตรงผ่านจุด P_2 และ Q_2



ขั้นที่ 4 ใช้อุปกรณ์สำหรับการตัด ตัดตามแนวเส้นตรง P_1Q_1 และ P_2Q_2

ซึ่งช่างไม้ได้สรุปว่า แผ่นไม้ทั้ง 3 แผ่นจะมีขนาดที่เท่ากัน ตามต้องการ

ในหัวข้อต่อไป จะแสดงการพิสูจน์ เพื่อตรวจสอบวิธีดังกล่าวว่า สามารถแบ่งแผ่นไม้ให้มีขนาดเท่า ๆ กันได้ จริงหรือไม่ พร้อมทั้งขยายปัญหาการแบ่งแผ่นไม้เป็นกรณีทั่วไป

2. การพิสูจน์

ในการพิสูจน์ อาศัยความรู้ทางเรขาคณิต ในเรื่องต่อไปนี้ เส้นขนาน เส้นตั้งฉาก การเท่ากัน ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม และสามเหลี่ยมคล้าย

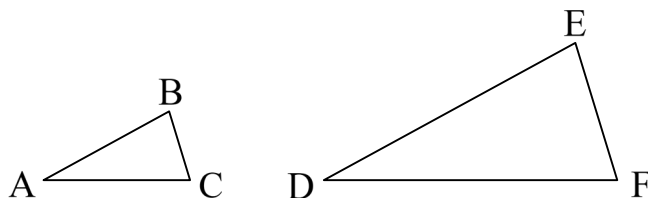
บทนิยาม 2.1 [1] รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันทั้งสองด้าน

บทนิยาม 2.2 [1] รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีสี่มุมฉาก

บทนิยาม 2.3 [1] ระยะห่างระหว่างเส้นกับจุดที่ไม่อยู่ในเส้นนั้น คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง ที่ลากจากจุดนั้นไปตั้งฉากกับเส้นตรงดังกล่าว

บทนิยาม 2.4 [1] รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ มุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และความยาวด้านที่สมนัยกันเท่ากัน

บทนิยาม 2.5 [1] รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน ก็ต่อเมื่อ มุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และ อัตราส่วนของความยาวด้านที่สมนัยกันเท่ากัน



จากรูป ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม DEF จะเขียนแทนด้วย $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ดังนั้น $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ก็ต่อเมื่อ 1. $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ และ $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$

$$2. \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

สัจพจน์ 2.1 [1] ถ้าเส้นขนานสองเส้นมีเส้นตัดขวาง แล้ว มุมที่สมนัยกันแต่ละคู่ย่อมมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.2 [1] (มุม-มุม-ด้าน) สำหรับ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ กำหนดให้ $AB = DE$, $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$ และ $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$ แล้ว $\triangle ABC$ เท่ากันทุกประการกับ $\triangle DEF$

ทฤษฎีบท 2.3 [1] ถ้ามุมที่สมนัยกันสองมุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดเท่ากัน แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะคล้ายกัน

ทฤษฎีบท 2.4 [1] ถ้าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกับเส้นเดียวกัน แล้ว เส้นตรงสองเส้นนั้นจะขนานกัน

ทฤษฎีบท 2.5 [1] ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดขวางเส้นขนานคู่หนึ่ง แล้ว มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางรวมกันเป็น 180 องศา

ทฤษฎีบท 2.6 [1] ถ้าด้านสองด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งขนานกันและมีความยาวเท่ากัน แล้ว รูปสี่เหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบท 2.7 [1] ณ จุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเส้นหนึ่ง จะมีเส้นตรงผ่านจุดนั้นที่ขนานกับเส้นตรงดังกล่าวเพียงเส้นเดียว

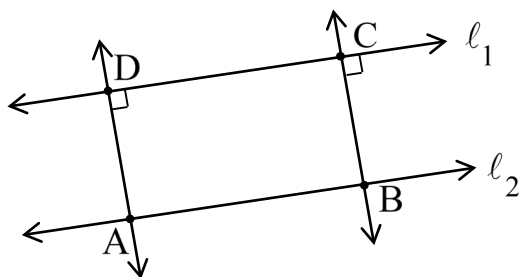
ทฤษฎีบท 2.8 [1] ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมมีความยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.9 [1] มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นใด ๆ โดยที่จุด A และจุด B เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง l_2 ถ้าระยะห่างระหว่างเส้นตรง l_1 กับจุด A และระยะห่างระหว่างเส้นตรง l_1 กับจุด B เท่ากัน แล้ว l_1 ขนานกับ l_2 (เขียนแทนด้วย $l_1 \parallel l_2$)

บทพิสูจน์ สมมติให้ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง l_1 กับจุด A และระยะห่างระหว่างเส้นตรง l_1 กับจุด B เท่ากัน

โดยบทนิยาม 2.3 จะได้ว่า ส่วนของเส้นตรง AD และส่วนของเส้นตรง BC ตั้งฉากกับเส้นตรง l_1 และ $AD = BC$ เมื่อจุด D และจุด C เป็นจุดที่ลากจากจุด A และจุด B มาตั้งฉากกับเส้นตรง l_1 ตามลำดับ



เนื่องจาก $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง l_1 โดยทฤษฎีบท 2.4 ได้ว่า $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ดังนั้นรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีด้าน AD ขนานกับด้าน BC และ $AD = BC$ โดยทฤษฎีบท 2.6 ได้ว่ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้น ด้าน AB และด้าน DC ขนานกัน เพราะฉะนั้น $l_1 \parallel l_2$ □

กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ มีความกว้าง a หน่วย

กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่า a ซึ่งหารด้วย k ลงตัว และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ มีความยาวมากกว่า $\sqrt{m^2 - a^2}$ หน่วย

ถัดไปจะพิสูจน์ว่า สามารถแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ ออกเป็น k ส่วนที่มีขนาดเท่า ๆ กันได้ โดยใช้วิธีการที่ได้กล่าวไว้ในบทนำ

บทพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด A ไปตัดกับด้าน BC ที่จุด E โดยที่ $AE = m$ แบ่งส่วนของเส้น AE เป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน ที่จุด $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_{k-1}E = \frac{m}{k}$$

และได้ว่า

$$AP_2 = \frac{2m}{k}, AP_3 = \frac{3m}{k}, \dots, AP_i = \frac{i \times m}{k}, \dots, AP_{k-1} = \frac{(k-1) \times m}{k}$$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, k-1$

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $BE = \sqrt{m^2 - a^2}$ ดังนั้น $BC > \sqrt{m^2 - a^2}$

ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ให้ขนานกับด้าน AB ตัดด้าน BC ที่จุด G (สามารถทำได้โดยทฤษฎีบท 2.7) ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม ABGF เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้ว่า $AB = FG$ (โดยทฤษฎีบท 2.8)

เนื่องจาก $\widehat{DAB} = 90^\circ = \widehat{ABC}$ จึงได้ว่า $\widehat{AFG} = 90^\circ = \widehat{BGF}$ (โดยทฤษฎีบท 2.9) และได้ว่า $\widehat{FGC} = 90^\circ = \widehat{DFG}$

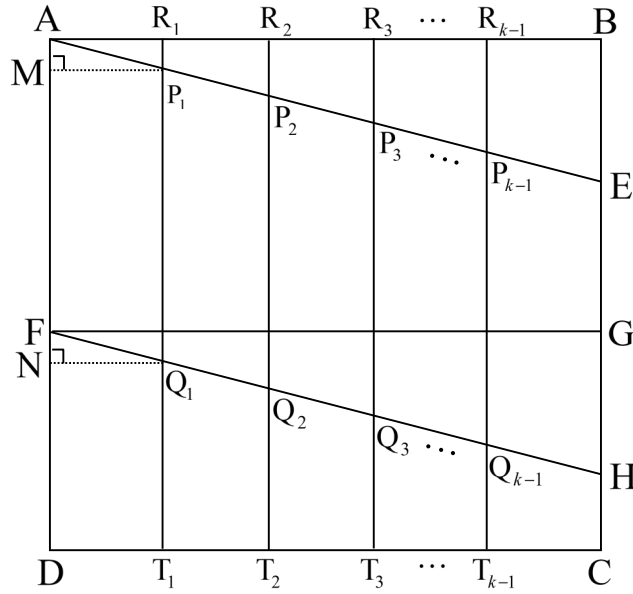
ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ให้ขนานกับด้าน AE ตัดด้าน BC ที่จุด H

จาก $\overline{BC}$ เป็นเส้นตัดขวางของ $\overline{AE}$ และ $\overline{FH}$ ซึ่ง $\overline{AE} \parallel \overline{FH}$ ดังนั้น $\widehat{AEB} = \widehat{FHG}$ (โดยสัจพจน์ 2.1) จาก $AB = FG$, $\widehat{ABE} = \widehat{FGH}$ และ $\widehat{AEB} = \widehat{FHG}$ จะได้ $\triangle ABE$ เท่ากันทุกประการกับ $\triangle FGH$ (โดยทฤษฎีบท 2.2) จาก $\widehat{EAB} = \widehat{HFG}$ และ $FH = AE = m$ ดังนั้นสามารถแบ่งส่วนของเส้นตรง FH ออกเป็น k ส่วนเท่า ๆ กันได้ที่จุด $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$FQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_{k-1}H = \frac{m}{k}$$

ให้ R_i และ T_i เป็นจุดตัดของเส้นตรง P_iQ_i กับส่วนของเส้นตรง AB และ DC ตามลำดับ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, k-1$

ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด P_1 และ Q_1 ไปตั้งฉากกับด้าน AD ที่จุด M และจุด N ตามลำดับ ดังรูป



พิจารณารูป $\triangle AMP_1$ และ $\triangle FNQ_1$ จาก $\widehat{DAB} = \widehat{DFG}$ และ $\widehat{EAB} = \widehat{HFG}$ ดังนั้น $\widehat{DAE} = \widehat{DFH}$

เนื่องจาก $\widehat{MAP_1} = \widehat{DAE} = \widehat{DFH} = \widehat{FNQ_1}$, $\widehat{AMP_1} = 90^\circ = \widehat{FNQ_1}$ และ $AP_1 = FQ_1$ จะได้ $\triangle AMP_1$ และ $\triangle FNQ_1$ เท่ากันทุกประการ (โดยทฤษฎีบท 2.2) ดังนั้น $MP_1 = NQ_1$ ซึ่ง MP_1 และ NQ_1 เป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง $\overline{AD}$ กับจุด P_1 และ Q_1 ตามลำดับ โดยทฤษฎีบท 2.10 จะได้ว่า $\overline{AD} \parallel \overline{R_1T_1}$

จาก $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัดขวางของ $\overline{AD}$ และ $\overline{R_1T_1}$ โดยที่ $\widehat{DAB} = 90^\circ$ ดังนั้น $\widehat{AR_1P_1} = 90^\circ$ (โดยทฤษฎีบท 2.5) ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\overline{AD} \parallel \overline{R_iT_i}$ และ $\widehat{AR_iP_i} = 90^\circ$ สำหรับ $i = 2, 3, \dots, k-1$

พิจารณารูป $\triangle AR_iP_i$ และ $\triangle ABE$ เนื่องจาก $\widehat{P_iAR_i} = \widehat{EAB}$ และ $\widehat{AR_iP_i} = 90^\circ = \widehat{ABE}$ ดังนั้น $\triangle AR_iP_i \sim \triangle ABE$ (โดยทฤษฎีบท 2.3) และได้ว่า $\frac{AR_i}{a} = \frac{AP_i}{AE} = \frac{m}{k} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{k}$ หรือ $AR_i = \frac{a}{k}$ ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\triangle AR_iP_i \sim \triangle ABE$ สำหรับ $i = 2, 3, \dots, k-1$ ดังนั้น

$$\frac{AR_i}{a} = \frac{AP_i}{AE} = \left(\frac{i \times m}{k} \right) \times \frac{1}{m} = \frac{i}{k} \quad \text{นั่นคือ} \quad AR_i = \frac{i \times a}{k} \quad \text{สำหรับ} \quad i = 2, 3, \dots, k-1$$

$$\text{จาก } AR_2 = AR_1 + R_1R_2 \text{ จะได้ } R_1R_2 = AR_2 - AR_1 = \frac{2a}{k} - \frac{a}{k} = \frac{a}{k}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$R_i R_{i+1} = AR_{i+1} - AR_i = \frac{(i+1)a}{k} - \frac{i \times a}{k} = \frac{a}{k}$$

สำหรับ $i = 2, 3, \dots, k-2$

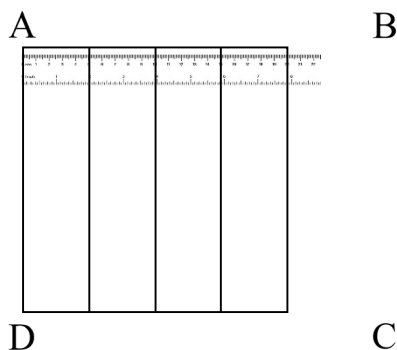
จาก $a = AB = AR_{k-1} + R_{k-1}B$ จะได้ว่า

$$R_{k-1}B = a - AR_{k-1} = a - \frac{(k-1)a}{k} = \frac{a}{k}$$

ดังนั้น $AR_1 = R_1 R_2 = R_2 R_3 = \dots = R_{k-1}B = \frac{a}{k}$

จึงสรุปได้ว่า แผ่นไม้แต่ละส่วนมีขนาดเท่ากัน □

หมายเหตุ ในการพิสูจน์นี้ จะยกเว้นกรณี $a = m$ เพราะถ้า $a = m$ สามารถแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังกล่าวเป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน ได้เลย เช่น แผ่นไม้มีความกว้าง 20 เซนติเมตร ต้องการแบ่งเป็น 4 ส่วน เท่า ๆ กัน สามารถแบ่งให้แต่ละส่วนยาว 5 เซนติเมตร บนด้าน AB และ DC โดยใช้ไม้บรรทัดได้ ดังรูป



3. สรุป

การแบ่งแผ่นไม้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง a หน่วย ออกเป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน ด้วยวิธีตามขั้นที่ 1 – ขั้นที่ 4 ในบทนำ สามารถทำได้จริง เมื่อแผ่นไม้มีความยาวมากกว่า $\sqrt{m^2 - a^2}$ หน่วย โดย m เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่า a ซึ่งหารด้วย k ลงตัว ดังนั้น ปัญหานี้จึงเป็นตัวอย่างของการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง ซึ่งผู้ที่ประสบปัญหาเช่นเดียวกันสามารถนำวิธีการดังกล่าวไปใช้ได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] พวงทอง พร้อมไท. (2547). *เรขาคณิต*. มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่.
Promthi, P. (2004). *Geometry*. Chiangmai Rajabhat University.
- [2] อ้น บ้านทองกวาว. (2565, 27 ตุลาคม). *วิธีแบ่งช่องเท่า ๆ กัน ไม่ต้องใช้เครื่องคิดเลข* [วิดีโอ].
https://www.tiktok.com/@btk_channel/video/7159041977584012571?_r=1&_t=8o vqY9lUp77
Aon Baanthongkwao. (2022, 27 October). *How to Divide The Squares Equally without Using A Calculator* [video].
https://www.tiktok.com/@btk_channel/video/7159041977584012571?_r=1&_t=8o vqY9lUp77