



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 68 เล่มที่ 710 พฤษภาคม – สิงหาคม 2566

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

เกมลูกเต๋าสอกกั๊กกติกาเพิ่มเติม

Hog Dice Game with Additional Rules

DOI: 10.14456/mj-math.2023.3

คุณชัญ ศรีสมบุญเวช¹ ชัญญา เล็กเจริญศรี² ณหทัย ฤกษ์ฤทัยรัตน์^{3,*} และศิริสุดา อินสกุล⁴

^{1, 2, 3, 4} ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร 10110

Kunatch Sirisomboonwech¹ Chanya Lekjaroensri² Nahathai Rerkruthairat^{3,*} and

Sirisuda Insakul⁴

^{1, 2, 3, 4} Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Bangkok 10110

Email: ¹kunatch.siri@swu.ac.th ²chanya.noon@swu.ac.th ³nahathai@swu.ac.th

⁴sirisuda.toey@swu.ac.th

วันที่รับบทความ : 12 มีนาคม 2566

วันที่แก้ไขบทความ : 20 พฤษภาคม 2566

วันที่ตอบรับบทความ : 1 สิงหาคม 2566

บทคัดย่อ

เกมลูกเต๋าสอกเป็นเกมลูกเต๋่าที่เล่นกันอย่างแพร่หลายโดยเฉพาะในห้องเรียนที่เริ่มเรียนเรื่องความน่าจะเป็น สำหรับงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยศึกษาการเล่นเกมลูกเต๋าสอกที่มีการเพิ่มกติกา 2 รูปแบบ รูปแบบแรกคือ การเพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน ให้ฝ่ายที่ทอดลูกเต๋่าทุกลูกขึ้นแต้มเดียวกันทั้งหมดในรอบนั้น จะเรียกเกมที่มีกติกานี้ว่า เกมลูกเต๋าสอกหน้าซำ อีกรูปแบบหนึ่งคือการเพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน ให้ฝ่ายที่มีผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋่าทุกลูกเป็นจำนวนเฉพาะ

* ผู้เขียนหลัก

ในรอบนั้น จะเรียกเกมที่มีกติกาที่ว่า เกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ การเพิ่มกติกาของผู้วิจัย ทั้ง 2 รูปแบบ ได้ผลสรุปเช่นเดียวกันคือ การทอดลูกเต๋ารอบละ 2 ลูก จะทำให้ผู้เล่นได้ค่าคาดหวังของคะแนนในแต่ละรอบสูงสุด

คำสำคัญ: เกมลูกเต๋าสอก ค่าคาดหวัง การทำให้เหมาะสมที่สุด

ABSTRACT

Hog dice game is a popular game of dice, especially in the classroom starting to study probability. In this research, we studied the hog dice game with two additional rules. The first type is to add 20 extra points for the player that rolls all the dice to get the same number of dice in that round. We will call the game with this rule the same-faced hog dice game. Another variation is to add 20 extra points to the player whose sum of points on all dice is a prime number in that round. This game is called the hog dice game with prime sum. The research showed that both types of games have the same conclusion, that is, rolling 2 dice will give the player the highest expected value of the score in each round.

Keywords: Hog Dice Game, Expectation, Optimization

1. บทนำ

เกมลูกเต๋าศอก (Pig Dice game) ถูกอธิบายอย่างเป็นทางการครั้งแรกโดย John Scarne ในปี ค.ศ. 1945 [4] วิธีการเล่นเกมลูกเต๋าศอก คือ ผู้เล่นสองฝ่ายผลัดกันทอดลูกเต๋าก่อนหนึ่งลูกในแต่ละรอบ ถ้าผู้เล่นทอดลูกเต๋าคืนแต้มหนึ่ง คะแนนในรอบนั้นจะกลายเป็นศูนย์ทันที แต่ถ้าลูกเต๋าคืนแต้มอื่น แตมนั้นจะถูกเก็บเป็นคะแนนสะสม สำหรับแต่ละรอบเมื่อทั้งสองฝ่ายทอดลูกเต๋าลแล้ว จะนำคะแนนสะสมมาเปรียบเทียบกัน ผู้เล่นฝ่ายที่มีคะแนนสะสมตามที่กำหนดจะเป็นผู้ชนะในเกมนั้น หากทั้งสองฝ่ายมีคะแนนสะสมตามที่กำหนดในรอบเดียวกัน ฝ่ายที่มีคะแนนสะสมมากกว่าจะเป็นฝ่ายชนะ แต่หากทั้งสองฝ่ายมีคะแนนสะสมเท่ากันจะทำการแข่งขันไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมีฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งมีคะแนนมากกว่า และฝ่ายนั้นจะเป็นผู้ชนะเกม

เกมลูกเต๋าก็ได้ถูกดัดแปลงไปอีกหลายรูปแบบ ([1], [3]) หนึ่งในนั้นคือ เกมลูกเต๋าสอก (Hog Dice Game) ซึ่งในแต่ละรอบผู้เล่นสามารถเลือกจำนวนลูกเต๋ได้อย่างอิสระ กฎกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าสอก [2] มีรายละเอียดดังนี้

1. ผู้เล่นแต่ละฝ่ายผลัดกันทอดลูกเต๋า โดยเลือกลูกเต๋ากี่ลูกก็ได้ตั้งแต่หนึ่งลูกจนถึงจำนวนลูกเต๋าทันทีที่มีอยู่ (คณะผู้วิจัยแนะนำให้ผู้เล่นเต๋าน้อยสิบลูกสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย)
2. จำนวนลูกเต๋ากี่ลูกที่แต่ละฝ่ายเลือกอาจแตกต่างกันไปในแต่ละรอบ
3. หากฝ่ายใดทอดลูกเต๋าลงแล้วมีลูกเต๋าน้อยหนึ่งลูกขึ้นแต้มหนึ่ง จะได้คะแนนในรอบนั้นเป็นศูนย์ แต่หากไม่มีลูกเต๋าลงได้ขึ้นแต้มหนึ่ง จะได้คะแนนในรอบนั้นเป็นผลรวมของแต้มที่แสดงบนหน้าลูกเต๋ารอบนั้น
4. คะแนนในแต่ละรอบจะถูกนำมารวมกันเป็นคะแนนสะสมทั้งหมด และบันทึกไว้เป็นคะแนนสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย
5. ในแต่ละรอบ เมื่อทั้งสองฝ่ายทอดลูกเต๋าลงแล้ว จะนำคะแนนสะสมมาเปรียบเทียบกับฝ่ายที่คะแนนสะสมถึงหรือเกิน 100 คะแนน จะชนะเกม หากมีมากกว่าหนึ่งฝ่ายที่คะแนนถึงหรือเกิน 100 คะแนนในรอบเดียวกัน ฝ่ายที่มีคะแนนสะสมสูงสุดจะชนะเกม และหากมีฝ่ายที่มีคะแนนสะสมสูงสุดมากกว่าหนึ่งฝ่าย จะทำการแข่งขันไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมีฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งมีคะแนนมากกว่าและฝ่ายนั้นจะเป็นผู้ชนะเกม

ตารางที่ 1.1 แสดงตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าสอกของทีม A และทีม B ซึ่งทีม B เป็นฝ่ายชนะเมื่อสิ้นสุดการเล่นรอบที่ 8 โดยได้คะแนนเกิน 100 คะแนนเพียงทีมเดียว

งานวิจัยเรื่อง The Pedagogy and Probability of The Dice Game Hog [2] ได้แสดงให้เห็นว่า การทอดลูกเต๋าสอบในแต่ละรอบในเกมลูกเต๋าสอกจะต้องทอดลูกเต๋ากี่ลูก 5 หรือ 6 ลูก จึงจะได้ค่าคาดหวังของคะแนนสูงสุด สำหรับงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยศึกษาการเพิ่มกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าสอกที่ไม่ซับซ้อนและสามารถนำไปจัดกิจกรรมพัฒนาทักษะการคิดคำนวณ วิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาได้ คณะผู้วิจัยเพิ่มกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าสอกข้างต้น 2 รูปแบบ คือ

รูปแบบที่ 1 เพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน ให้ฝ่ายที่ทอดลูกเต๋าทูลูกขึ้นแต้มเดียวกันทั้งหมดในรอบนั้น โดยมีเงื่อนไขว่า ผู้เล่นจะได้คะแนนเพิ่มนี้ เมื่อทอดลูกเต๋ามากกว่า 1 ลูก และแต้มบนหน้าลูกเต๋ามีแต้มหนึ่ง เราจะเรียกเกมที่มีกติกานี้ว่า เกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ

ตารางที่ 1.1 ตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าสอกของทีม A และ ทีม B

รอบที่	แต้มบนหน้า ลูกเต๋ของทีม A	คะแนนรวม ในรอบนั้นของ ทีม A	คะแนน สะสมของ ทีม A	แต้มบนหน้า ลูกเต๋ของทีม B	คะแนนรวม ในรอบนั้นของ ทีม B	คะแนน สะสมของ ทีม B
1	1, 5, 6	0	0	4, 5	9	9
2	4, 4, 5	13	13	2, 3, 4, 5	14	23
3	3, 3	6	19	1	0	23
4	2, 2, 3, 4	11	30	2, 3, 3, 5, 6	19	42
5	6	6	36	5, 5	10	52
6	2, 2, 2, 4, 5	15	51	1, 1	0	52
7	5, 5, 5	15	66	2, 3, 4, 5, 6, 6	26	78
8	1, 3, 3, 5, 6, 6, 6	0	66	2, 2, 3, 3, 4, 4, 6	24	102

รูปแบบที่ 2 เพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน ให้ฝ่ายที่มีผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทูกลูกเป็นจำนวนเฉพาะในรอบนั้น โดยมีเงื่อนไขว่า ผู้เล่นจะได้คะแนนเพิ่มเมื่อทอดลูกเต๋ามากกว่า 1 ลูก และไม่มีลูกเต๋าลูกใดขึ้นแต้มหนึ่ง ซึ่งเราจะเรียกกติกาใหม่นี้ว่า เกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ

ในงานวิจัยนี้จะหาจำนวนลูกเต๋าคือควรทอดในแต่ละรอบ เพื่อให้ได้ค่าคาดหวังของคะแนนสูงสุดสำหรับการเล่นเกมทั้ง 2 รูปแบบ

2. เกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ

จากกติกาเดิมของเกมลูกเต๋าสอกที่ให้ผู้เล่นเลือกจำนวนลูกเต๋าในแต่ละรอบแตกต่างกันได้ คณะผู้วิจัยได้เพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน จากคะแนนที่ได้จากผลรวมแต้มบนลูกเต๋า เมื่อลูกเต๋าทูกลูกขึ้นแต้มเดียวกันทั้งหมด จะทำให้จำนวนลูกเต๋าที่ผู้เล่นควรใช้ยังคงเป็น 5 หรือ 6 ลูก เท่าเดิมหรือไม่ คณะผู้วิจัยได้กำหนดกติกาของเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ ดังนี้

1. ผู้เล่นแต่ละฝ่ายผลัดกันทอดลูกเต๋า โดยเลือกลูกเต๋ากี่ลูกก็ได้ตั้งแต่หนึ่งลูกจนถึงจำนวนลูกเต๋าทันทีที่มีอยู่ (คณะผู้วิจัยแนะนำให้มีลูกเต๋าอย่างน้อยสิบลูกสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย)
2. จำนวนลูกเต๋าที่แต่ละฝ่ายเลือกอาจแตกต่างกันไปในแต่ละรอบ

3. หากฝ่ายใดทอดลูกเต๋าแล้วมีลูกเต๋ายกอย่างน้อยหนึ่งลูกขึ้นแต้มหนึ่ง คะแนนในรอบนั้นจะเป็นศูนย์ แต่หากไม่มีลูกเต๋าลูกใดขึ้นแต้มหนึ่ง คะแนนในรอบนั้นจะเท่ากับผลรวมของแต้มที่แสดงบนหน้าลูกเต๋ารอบนั้น สำหรับฝ่ายที่ทอดลูกเต๋าทดทุกลูกขึ้นแต้มเดียวกันทั้งหมดและแต้มบนหน้าลูกเต๋ามาไม่ซ้ำแต้มหนึ่ง ฝ่ายนั้นจะได้รับคะแนนพิเศษ 20 คะแนนในรอบนั้นจากคะแนนที่ได้จากผลรวมแต้มบนลูกเต๋า โดยมีเงื่อนไขว่า ผู้เล่นจะได้คะแนนพิเศษนี้ เมื่อทอดลูกเต๋ามากกว่า 1 ลูก

4. คะแนนในแต่ละรอบจะถูกนำมารวมกันเป็นคะแนนสะสม และบันทึกไว้เป็นคะแนนสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย

5. สำหรับแต่ละรอบ เมื่อทั้งสองฝ่ายทอดลูกเต๋าลงแล้ว จะนำคะแนนสะสมมาเปรียบเทียบกับฝ่ายที่คะแนนสะสมถึงหรือเกิน 100 คะแนน จะชนะเกม หากมีมากกว่าหนึ่งฝ่ายที่คะแนนถึงหรือเกิน 100 คะแนนในรอบเดียวกัน ฝ่ายที่มีคะแนนสะสมสูงสุด จะชนะเกม แต่หากมีฝ่ายที่มีคะแนนสะสมสูงสุดมากกว่าหนึ่งฝ่าย จะทำการแข่งขันไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมีฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งมีคะแนนมากกว่า และฝ่ายนั้นจะเป็นผู้ชนะเกม

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าสองหน้าห้าของทีม A และ ทีม B

รอบที่	แต้มบนหน้าลูกเต๋าของทีม A	คะแนนรวมในรอบนั้นของทีม A	คะแนนสะสมของทีม A	แต้มบนหน้าลูกเต๋าของทีม B	คะแนนรวมในรอบนั้นของทีม B	คะแนนสะสมของทีม B
1	1, 5, 6	0	0	4, 5	9	9
2	4, 4, 5	13	13	2, 3, 4, 5	14	23
3	3, 3	26	39	1	0	23
4	2, 2, 3, 4	11	50	2, 3, 3, 5, 6	19	42
5	6	6	56	5, 5	30	72
6	2, 2, 2, 4, 5	15	71	1, 1	0	72
7	5, 5, 5	35	106	2, 3, 4, 5, 6, 6	26	98

ตารางที่ 2.1 แสดงตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าสองหน้าห้าของทีม A และทีม B โดยนำผลการทอดลูกเต๋ามาจากตารางที่ 1.1 ซึ่งเป็นตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าสองหน้าห้ามาคิดคะแนนตามกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าสองหน้าห้า พบว่าทีม A จะเป็นฝ่ายชนะเมื่อสิ้นสุดการเล่นรอบที่ 7

ก่อนที่จะหาจำนวนลูกเต๋าสอกที่ผู้เล่นควรทอดในแต่ละรอบ เพื่อให้ได้ค่าคาดหวังของคะแนนสูงสุด เราจะพิจารณาคะแนนที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ ซึ่งแสดงดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 ตารางแสดงคะแนนการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ

แต้มบนหน้าของ ลูกเต๋าลูกที่ 1 \ แต้มบนหน้าของ ลูกเต๋าลูกที่ 2	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	24	5	6	7	8
3	0	5	26	7	8	9
4	0	6	7	28	9	10
5	0	7	8	9	30	11
6	0	8	9	10	11	32

จากตารางที่ 2.2 จะเห็นว่า ผู้เล่นจะได้รับคะแนนเพิ่มพิเศษใน 5 กรณีเท่านั้น คือ กรณีที่ลูกเต๋าสองลูกขึ้นแต้ม 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ทั้งคู่ โดยที่ค่าเฉลี่ยของคะแนนที่ไม่ขึ้นแต้มหนึ่งจากการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ เท่ากับ

$$\frac{\left(\begin{aligned} &(2+2)+(2+3)+(2+4)+(2+5)+(2+6)+(3+2)+(3+3)+(3+4)+(3+5)+(3+6) \\ &+(4+2)+(4+3)+(4+4)+(4+5)+(4+6)+(5+2)+(5+3)+(5+4)+(5+5)+(5+6) \\ &+(6+2)+(6+3)+(6+4)+(6+5)+(6+6)+(20+20+20+20+20) \end{aligned} \right)}{5^2} = \frac{300}{25} = 12$$

และค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมด เท่ากับ $\frac{300}{6^2} = 8.3$ ยิ่งไปกว่านั้น ไม่ว่าผู้เล่นจะเลือกทอดลูกเต๋าสองลูกเท่าใด ผู้เล่นจะยังคงได้รับคะแนนเพิ่มพิเศษใน 5 กรณีเช่นเดิมเท่านั้น คือ กรณีที่ลูกเต๋าสองลูกขึ้นแต้ม 2, 3, 4, 5 หรือ 6

ต่อไปเราจะพิสูจน์บทตั้ง 2.1 เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าคาดหวังของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าสองลูกจำนวน n ลูกหนึ่งครั้ง ซึ่งจะแสดงการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 2.2

บทตั้ง 2.1 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ Z_n แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้ง ในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ จะได้ว่า

$$E[Z_n | Z_n \neq 0] = nE[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^n}$$

บทพิสูจน์ สังเกตว่า

$$E[Z_n | Z_n \neq 0] = \frac{1}{5^n} \left[100 + \sum_{x_1=2}^6 \cdots \sum_{x_n=2}^6 (x_1 + \cdots + x_n) \right]$$

เมื่อ x_i แทนแต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ i และ $n \geq 2$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} E[Z_2 | Z_2 \neq 0] &= \frac{1}{5^2} \left[100 + \sum_{x_1=2}^6 \sum_{x_2=2}^6 (x_1 + x_2) \right] \\ &= \frac{1}{5^2} \left[100 + \sum_{x_1=2}^6 (x_1 + 2) + \sum_{x_1=2}^6 (x_1 + 3) + \cdots + \sum_{x_1=2}^6 (x_1 + 6) \right] \\ &= \frac{1}{5^2} \left[100 + 5(2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 5 \sum_{x_1=2}^6 x_1 \right] \\ &= 2 \left(\frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6}{5} \right) + \frac{100}{5^2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $E[Z_1 | Z_1 \neq 0] = \frac{2+3+4+5+6}{5}$ จึงได้ว่า

$$E[Z_2 | Z_2 \neq 0] = 2E[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^2}$$

ให้ $l \in \mathbb{N}$ และ $l \geq 2$ สมมติว่า $E[Z_l | Z_l \neq 0] = lE[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^l}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} E[Z_{l+1} | Z_{l+1} \neq 0] &= \frac{1}{5^{l+1}} \left[100 + \sum_{x_1=2}^6 \cdots \sum_{x_{l+1}=2}^6 (x_1 + \cdots + x_{l+1}) \right] \\ &= \frac{1}{5^{l+1}} \left[100 + \sum_{x_1=2}^6 \cdots \sum_{x_l=2}^6 (x_1 + x_2 + \cdots + x_l + 2) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{x_1=2}^6 \cdots \sum_{x_l=2}^6 (x_1 + x_2 + \cdots + x_l + 6) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{5^{l+1}} \left[100 + 5^l(2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 5 \sum_{x_1=2}^6 \dots \sum_{x_l=2}^6 (x_1 + \dots + x_l) \right] \\
 &= \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6}{5} + \frac{1}{5^l} \sum_{x_1=2}^6 \dots \sum_{x_l=2}^6 (x_1 + \dots + x_l) + \frac{100}{5^{l+1}} \\
 &= E[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \left[\frac{1}{5^l} \sum_{x_1=2}^6 \dots \sum_{x_l=2}^6 (x_1 + \dots + x_l) + \frac{100}{5^l} \right] - \frac{100}{5^l} + \frac{100}{5^{l+1}} \\
 &= E[Z_1 | Z_1 \neq 0] + E[Z_l | Z_l \neq 0] - \frac{100}{5^l} + \frac{100}{5^{l+1}} \\
 &= E[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \left(lE[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^l} \right) - \frac{100}{5^l} + \frac{100}{5^{l+1}} \\
 &= (l+1)E[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^{l+1}}
 \end{aligned}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ได้ว่า

$$E[Z_n | Z_n \neq 0] = nE[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^n}$$

สำหรับทุก $n \geq 2$

□

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ Z_n แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋าคู่ n ลูก
หนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ จะได้ว่า

$$E(Z_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{100}{5^n}\right)$$

และ $E(Z_n)$ เป็นลำดับลด เมื่อ $n > 5$

บทพิสูจน์ โดยบทตั้ง 2.1 และ $E[Z_1 | Z_1 \neq 0] = 4$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 E(Z_n) &= E[Z_n | Z_n = 0] \cdot P(Z_n = 0) + E[Z_n | Z_n \neq 0] \cdot P(Z_n \neq 0) \\
 &= 0 + \left(nE[Z_1 | Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^n} \right) \left(\frac{5}{6}\right)^n \\
 &= \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{100}{5^n}\right)
 \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $n > 5$ จะได้ว่า $4n > \frac{5}{6}(4n + 4)$

เนื่องจาก $\frac{100}{5^n} > \frac{5}{6} \left(\frac{100}{5^{n+1}}\right)$ ดังนั้น สำหรับ $n > 5$ จะได้ว่า

$$4n + \frac{100}{5^n} > \frac{5}{6} \left(4n + 4 + \frac{100}{5^{n+1}} \right)$$

เพราะฉะนั้น

$$\left(\frac{5}{6} \right)^n \left(4n + \frac{100}{5^n} \right) > \left(\frac{5}{6} \right)^{n+1} \left(4(n+1) + \frac{100}{5^{n+1}} \right)$$

จึงได้ว่า $E(Z_n)$ เป็นลำดับลด เมื่อ $n > 5$

□

กรณี $n = 1$ ค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมดในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำเท่ากับ ค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมดในเกมลูกเต๋าสอก ซึ่งเท่ากับ $\frac{2+3+4+5+6}{6} = 3.3$ และจากทฤษฎีบท 2.2 เมื่อพิจารณาการทอดลูกเต๋ากำหนดจำนวน 2 ถึง 30 ลูกในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ ค่าคาดหวังของคะแนนจากการทอดลูกเต๋านี้ในหนึ่งครั้งเป็นดังตารางที่ 2.3

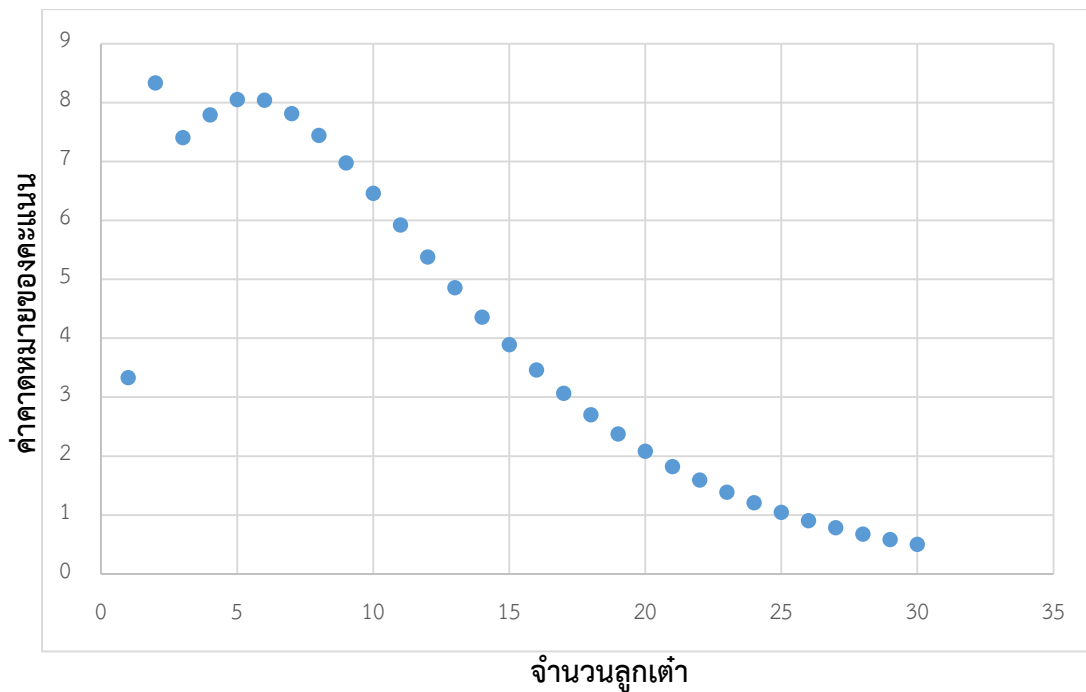
กราฟของค่าคาดหวังของคะแนนจากการทอดลูกเต๋ากำหนดจำนวน 1 ถึง 30 ลูกในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำแสดงดังรูปที่ 2.1 จากรูปที่ 2.1 จะเห็นว่าการทอดลูกเต๋ากำหนดจำนวน 2 ลูกในแต่ละรอบจะมีค่าคาดหวังของคะแนนมากที่สุด รองลงมาคือการทอดลูกเต๋ากำหนดจำนวน 3 - 8 ลูกในแต่ละรอบ ซึ่งจำนวนลูกเต๋านี้ในช่วงนี้จะยังทำให้ค่าคาดหวังของคะแนนค่อนข้างมาก และถ้าจำนวนลูกเต๋ามากกว่า 6 ลูกจะเห็นได้ชัดว่าค่าคาดหวังของคะแนนลดลงเรื่อย ๆ

3. เกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ

สำหรับเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ จะใช้กติกาพื้นฐานเดียวกันกับเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ ยกเว้นกติกาข้อ 3. จะมีเงื่อนไขในการให้คะแนนเพิ่มพิเศษต่างกัน คือ ในเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ จะให้คะแนนเพิ่มพิเศษ 20 คะแนน จากคะแนนที่ได้จากผลรวมแต้มบนลูกเต๋านี้ เมื่อผลรวมของคะแนนบนหน้าลูกเต๋าทอดลูกเป็นจำนวนเฉพาะ โดยมีเงื่อนไขว่า ผู้เล่นจะได้คะแนนเพิ่มพิเศษนี้ เมื่อทอดลูกเต๋ามากกว่า 1 ลูก ตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะของสองทีมแสดงดังตารางที่ 3.1 เมื่อนำผลการทอดลูกเต๋ามาจากตารางที่ 1.1 มาคิดคะแนนตามกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ จะได้ว่าทีม A จะเป็นฝ่ายชนะ เมื่อสิ้นสุดการเล่นรอบที่ 7

ตารางที่ 2.3 แสดงค่าคาดหวังของคะแนนในเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำ

จำนวนลูกเต๋า (n)	ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารั้ง แต้มหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งลูก เท่ากับ $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$	ความน่าจะเป็นที่ไม่มี ลูกเต๋ารั้งใดขึ้นแต้มหนึ่ง เท่ากับ $\left(\frac{5}{6}\right)^n$	ค่าคาดหวังของคะแนน เท่ากับ $\left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{100}{5^n}\right)$ เมื่อ $n \geq 2$
1	0.16667	0.83333	3.33300
2	0.30556	0.69444	8.33333
3	0.42130	0.57870	7.40741
4	0.51775	0.48225	7.79321
5	0.59812	0.40188	8.05041
6	0.66510	0.33490	8.03969
7	0.72092	0.27908	7.81464
8	0.76743	0.23257	7.44224
9	0.80619	0.19381	6.97705
10	0.83849	0.16151	6.46022
11	0.86541	0.13459	5.92187
12	0.88784	0.11216	5.38352
13	0.90654	0.09346	4.86012
14	0.92211	0.07789	4.36165
15	0.93509	0.06491	3.89433
16	0.94591	0.05409	3.46163
17	0.95493	0.04507	3.06498
18	0.96244	0.03756	2.70439
19	0.96870	0.03130	2.37887
20	0.97392	0.02608	2.08672
21	0.97826	0.02174	1.82588
22	0.98189	0.01811	1.59403
23	0.98491	0.01509	1.38873
24	0.98742	0.01258	1.20760
25	0.98952	0.01048	1.04826
26	0.99126	0.00874	0.90849
27	0.99272	0.00728	0.78619
28	0.99393	0.00607	0.67943
29	0.99494	0.00506	0.58641
30	0.99579	0.00421	0.50553



รูปที่ 2.1 กราฟของค่าคาดหวังของคะแนนจากการทอดลูกเต๋ารายจำนวนหนึ่งถึงสามสิบลูกหนึ่งครั้ง

ตารางที่ 3.1 ตัวอย่างการเล่นเกมนูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะของทีม A และ ทีม B

รอบที่	แต้มบนหน้า ลูกเต๋ารายของทีม A	คะแนนรวม ในรอบนั้น ของทีม A	คะแนน สะสมของ ทีม A	แต้มบนหน้า ลูกเต๋ารายของทีม B	คะแนนรวม ในรอบนั้น ของทีม B	คะแนน สะสมของ ทีม B
1	1, 5, 6	0	0	4, 5	9	9
2	4, 4, 5	33	33	2, 3, 4, 5	14	23
3	3, 3	6	39	1	0	23
4	2, 2, 3, 4	31	70	2, 3, 3, 5, 6	39	62
5	6	6	76	5, 5	10	72
6	2, 2, 2, 4, 5	15	91	1, 1	0	72
7	5, 5, 5	15	106	2, 3, 4, 5, 6, 6	26	98

ต่อไปเราจะพิจารณาคะแนนที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ เพื่อเป็นแนวทางในการหาค่าคาดหวังของคะแนนในรูปทั่วไป

ตารางที่ 3.2 ตารางแสดงคะแนนการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ

แต้มบนหน้าของ ลูกเต๋าลูกที่ 1 \ แต้มบนหน้าของ ลูกเต๋าลูกที่ 2	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	4	25	6	27	8
3	0	25	6	27	8	9
4	0	6	27	8	9	10
5	0	27	8	9	10	31
6	0	8	9	10	31	12

จากตารางที่ 3.2 จะเห็นว่า จำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มในการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ เท่ากับ 8 วิธี คือ (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (5, 6) และ (6, 5) โดยค่าเฉลี่ยของคะแนนที่ไม่เกิดแต้มหนึ่งจากการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ เท่ากับ

$$\frac{\left(\begin{array}{l} (2+2)+(2+3)+(2+4)+(2+5)+(2+6)+(3+2)+(3+3)+(3+4)+(3+5)+(3+6) \\ +(4+2)+(4+3)+(4+4)+(4+5)+(4+6)+(5+2)+(5+3)+(5+4)+(5+5)+(5+6) \\ +(6+2)+(6+3)+(6+4)+(6+5)+(6+6)+(20+20+20+20+20+20+20+20) \end{array} \right)}{5^2} = \frac{360}{25} = 14.4$$

และค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมดเท่ากับ $\frac{360}{6^2} = 10$

ต่อไปเราจะหาค่าคาดหวังของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าน n ลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ เมื่อทราบว่าคะแนนนี้ไม่เท่ากับศูนย์ เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าคาดหวังของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าน n ลูกหนึ่งครั้ง ซึ่งจะแสดงการพิสูจน์ใน บทตั้ง 3.1 และทฤษฎีบท 3.2 ตามลำดับ

บทตั้ง 3.1 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ Z_n^* แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้ง ในเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ และ k_n แทนจำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มของลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$E[Z_n^* | Z_n^* \neq 0] = nE[Z_1^* | Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_n}{5^n}$$

บทพิสูจน์ ให้ x_i แทนแต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ i

สังเกตว่า สำหรับจำนวนนับ m ซึ่ง $m \geq 2$

$$E[Z_m^* | Z_m^* \neq 0] = \frac{1}{5^m} \left[20k_m + \sum_{x_1=2}^6 \cdots \sum_{x_m=2}^6 (x_1 + \cdots + x_m) \right]$$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในบทตั้ง 2.1 และ $E[Z_1^* | Z_1^* \neq 0] = E[Z_1 | Z_1 \neq 0]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[Z_2^* | Z_2^* \neq 0] &= \frac{1}{5^2} \left[(20)(8) + \sum_{x_1=2}^6 \sum_{x_2=2}^6 (x_1 + x_2) \right] \\ &= 2E[Z_1^* | Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_2}{5^2} \end{aligned}$$

ให้ $l \in \mathbb{N}$ และ $l \geq 2$ สมมติว่า $E[Z_l^* | Z_l^* \neq 0] = lE[Z_1^* | Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_l}{5^l}$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในบทตั้ง 2.1 ได้ว่า

$$E[Z_{l+1}^* | Z_{l+1}^* \neq 0] = (l+1)E[Z_1^* | Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_{l+1}}{5^{l+1}}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า

$$E[Z_n^* | Z_n^* \neq 0] = nE[Z_1^* | Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_n}{5^n}$$

สำหรับทุก $n \geq 2$ □

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ Z_n^* แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ และ k_n แทนจำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มของลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$E(Z_n^*) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{20k_n}{5^n}\right)$$

บทพิสูจน์ โดยบทตั้ง 3.1 และ $E[Z_1^* | Z_1^* \neq 0] = E[Z_1 | Z_1 \neq 0] = 4$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(Z_n^*) &= E[Z_n^* | Z_n^* = 0]P(Z_n^* = 0) + E[Z_n^* | Z_n^* \neq 0]P(Z_n^* \neq 0) \\ &= 0 + \left(nE[Z_1^* | Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_n}{5^n}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{20k_n}{5^n}\right) \end{aligned}$$

□

สังเกตว่า การหาจำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มของการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ เมื่อ $n \geq 2$ สมนัยกับการหาผลรวมของจำนวนผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

โดยที่ x_i แทนแต้มของลูกเต๋าลูกที่ i และ p แทนจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $2 < p < 6n$

ดังนั้น สำหรับแต่ละ p สามารถหาจำนวนผลเฉลยของสมการข้างต้นได้ โดยใช้หลักการไม้เท้าและดวงดาว (stars and bars) เช่น กรณี $n = 4$ และ $p = 19$ จะหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ เมื่อ $2 \leq x_i \leq 6$ และ $i = 1, 2, 3, 4$ ได้ดังนี้

$$\text{ให้ } y_i = x_i - 2 \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{จะได้ว่า } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11 \text{ เมื่อ } 0 \leq y_i \leq 4$$

ให้ U แทนเซตของคำตอบของสมการ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ เมื่อ $y_i \geq 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, 4$

$$\text{ให้ } A_i = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in U \mid y_i \geq 5\} \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, 3, 4$$

โดยหลักการไม้เท้าและดวงดาว จะได้

$$S_1 := |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = (4) \binom{6 + (4 - 1)}{6} = (4) \binom{9}{6} = 336$$

$$\begin{aligned} S_2 &:= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ &= (6) \binom{1 + (4 - 1)}{1} = (6) \binom{4}{1} = 6 = 24 \end{aligned}$$

$$S_3 := |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

$$\text{และ } |U| = \binom{11 + (4 - 1)}{11} = \binom{14}{11} = 364$$

โดยหลักการเพิ่มเข้าตัดออก จะได้จำนวนผลเฉลยที่ต้องการเท่ากับ $|U| - S_1 + S_2 - S_3 = 52$

สำหรับกรณีอื่น ๆ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน ค่าของ k_n และค่าของ $E(Z_n^*)$ เมื่อ $n = 2, 3, \dots, 10$ เป็นดังตารางที่ 3.2 และ 3.3 ตามลำดับ

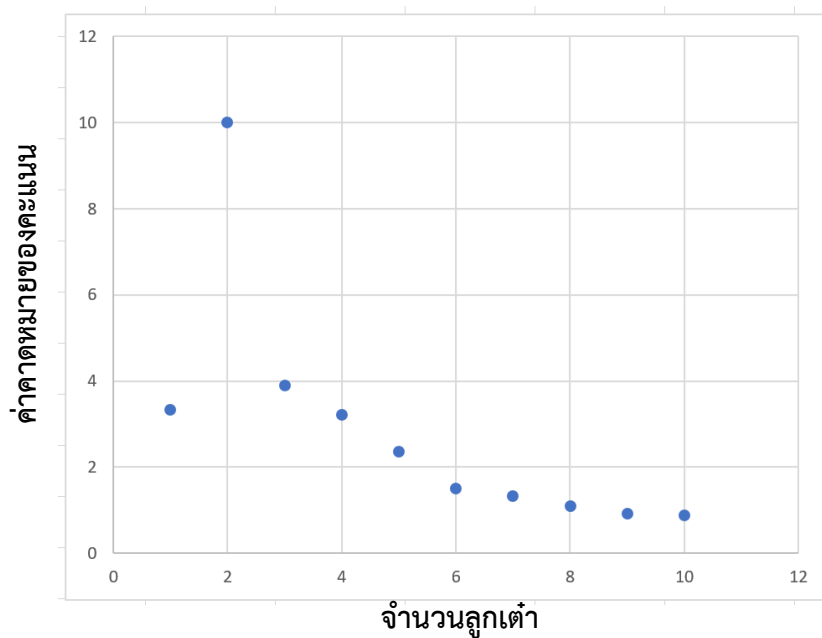
ตารางที่ 3.2 ค่าของ k_n เมื่อ $n = 2, 3, \dots, 10$

จำนวน ลูกเต๋า (n)	จำนวนเฉพาะที่เป็นไปได้ (p)															k_n
	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	
2	2	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8
3	-	3	18	18	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	42
4	-	-	20	52	80	52	4	-	-	-	-	-	-	-	-	208
5	-	-	5	35	255	365	255	5	-	-	-	-	-	-	-	920
6	-	-	-	6	246	666	1686	666	246	-	-	-	-	-	-	3516
7	-	-	-	-	84	455	3535	7875	6055	455	7	-	-	-	-	18466
8	-	-	-	-	8	120	3144	29400	37080	18320	3144	784	8	-	-	92008
9	-	-	-	-	-	9	1278	48879	93600	175725	93600	48879	6030	9	-	468009
10	-	-	-	-	-	-	220	41470	118360	693450	837100	693450	264220	10890	10	2659170

ตารางที่ 3.3 ค่า $E(Z_n^*)$ เมื่อ $n = 2, 3, \dots, 10$

จำนวนลูกเต๋ (n)	ค่าคาดหวังของคะแนนเท่ากับ $\left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{20k_n}{5^n}\right)$
2	10
3	3.889
4	3.201
5	2.366
6	1.507
7	1.319
8	1.096
9	0.929
10	0.880

กราฟของค่าคาดหวังของคะแนนจากการทอดลูกเต๋ารายจำนวนหนึ่งถึงสิบลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ แสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 กราฟของค่าคาดหวังของคะแนนจากการทอดลูกเต๋ารายจำนวนหนึ่งถึงสิบลูกหนึ่งครั้ง

รูปที่ 3.1 แสดงให้เห็นว่ากลยุทธ์ที่ดีที่สุดที่ใช้ในการเล่นเกบลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ คือ การทอดลูกเต๋าทิ้งถึงห้าลูกในแต่ละครั้ง ซึ่งจะได้ค่าคาดหวังของคะแนนค่อนข้างสูง

4. กรณีทั่วไป

จากเกบลูกเต๋าสอกหน้าห้าและเกบลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ กรณีคะแนนเพิ่มพิเศษเท่ากับ m คะแนน สามารถพิสูจน์ได้โดยเปลี่ยนคะแนนจาก 20 คะแนนเป็น m คะแนน และได้ทฤษฎีบทขยายของทฤษฎีบทที่ 2.2 และ 3.2 เป็นทฤษฎีบท 4.1 และ 4.2 ตามลำดับ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ $Z_{n,m}$ แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋าน n ลูกหนึ่งครั้งและมีคะแนนเพิ่มพิเศษ m คะแนน ในเกบลูกเต๋าสอกหน้าห้า จะได้ว่า

$$E(Z_{n,m}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{5m}{5^n}\right)$$

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ $Z_{n,m}^*$ แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋าน n ลูกหนึ่งครั้งและมีคะแนนเพิ่มพิเศษ m คะแนน ในเกบลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ และ k_n แทนจำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มจากการทอดลูกเต๋าน n ลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$E(Z_{n,m}^*) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{mk_n}{5^n}\right)$$

ผู้สนใจสามารถหาจำนวนลูกเต๋าคือควรทอดในแต่ละรอบ เพื่อให้ได้ค่าคาดหวังของคะแนนในแต่ละรอบสูงสุดได้ โดยการเขียนกราฟของ $E(Z_{n,m})$ และ $E(Z_{n,m}^*)$ ซึ่งอาจได้ข้อสรุปแตกต่างจากการมีคะแนนเพิ่มพิเศษ 20 คะแนนในบางค่า m

5. ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่าการเล่นเกบลูกเต๋าสอกหน้าห้าและเกบลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะได้ผลสรุปเช่นเดียวกันคือ การทอดลูกเต๋ารอบละสองลูก จะทำให้ผู้เล่นได้ค่าคาดหวังของคะแนนในแต่ละรอบสูงสุด อย่างไรก็ตามสำหรับการเล่นเกมในสถานการณ์จริง การที่ผู้เล่นจะตัดสินใจเลือกจำนวนลูกเต๋าคือควรทอดแต่ละรอบนั้นจะต้องพิจารณาคะแนนสะสมของผู้เล่นทุกฝ่ายในแต่ละรอบประกอบกันด้วย เนื่องจากการทอดลูกเต๋ามากขึ้นจะทำให้ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าคืนแต้มหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งลูกมากขึ้นด้วย นั่นคือเมื่อจำนวนลูกเต๋ามากขึ้น โอกาสที่ผู้เล่นจะได้คะแนนเป็นศูนย์ในรอบนั้นก็ยิ่งมากขึ้นด้วย

เนื่องจากกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าสอกหน้าซ้ำและเกมลูกเต๋าสอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะไม่ซ้ำซ้อน ผู้อ่านอาจนำไปจัดกิจกรรมเพื่อทบทวนความรู้เรื่องการบวกจำนวนเต็มหรือส่งเสริมการเรียนรู้เรื่องจำนวนเฉพาะในระดับประถมศึกษา สำหรับการจัดกิจกรรมให้เหมาะสมกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ผู้อ่านอาจศึกษาการเปลี่ยนกติกาการให้คะแนนเพิ่มพิเศษจากค่าคงที่ที่ 20 คะแนนเพียงค่าเดียวเป็นการให้คะแนนเพิ่มพิเศษเป็นค่าคงที่มากกว่าหนึ่งค่าหรือเพิ่มตามตามจำนวนลูกเต๋าสอก เช่น 10^n หรือ n^2

เอกสารอ้างอิง

- [1] Bohsn, J. F. and Schultz, J. L. (1996). Revisiting and Extending The Hog Game. *The Mathematics Teacher*, 89 (9), p. 728 – 733.
- [2] Larry, F. and Fred, M. (2003). The Pedagogy and Probability of The Dice Game Hog. *Journal of Statistics Education*, 11 (2), DOI : 10.1080/10691898.2003.11910708.
- [3] Neller, T. W. and Clifton G. M. P. (2004). Optimal Play of The Dice Game Pig. *The UMAP Journal*, 25 (1), p. 25 – 47.
- [4] Scarne, J. (1945). *Scarne on Dice*. Harrisburg, Pennsylvania: Military Service Publishing Co.