วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 69 เล่มที่ 712 กันยายน – ธันวาคม 2567
https://www.mathassociation.or.th Email: MathThaiOrg@gmail.com

รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างของรูปสามเหลี่ยม

On The Rectangle Flanks of A Triangle

DOI: 10.14456/mj-math.2024.4

คมสัน ไชยกาล[1] อินทัช โพธิหล้า[2] และอรรณพ แก้วขาว[3,*]
[1,2,3] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี 20131

Komsan Chaiyakarn[1] Intouch Pothilar[2] and Annop Kaewkhao[3,*]
[1,2,3] Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, ChonBuri 20131

Email: [1]Komsan@gmail.com [2]Intouch@gmail.com [3]Tor_idin@buu.ac.th

วันที่รับบทความ : 23 เมษายน 2567 วันที่แก้ไขบทความ : 15 สิงหาคม 2567 วันที่ตอบรับบทความ : 13 ธันวาคม 2567

บทคัดย่อ

บทความนี้ จะแสดงว่า อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีค่าเท่ากับ 3 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และอัตราส่วนนี้มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$ เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ด้านอิสระมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาบ

คำสำคัญ: สี่เหลี่ยมขนาบข้าง

---

* ผู้เขียนหลัก

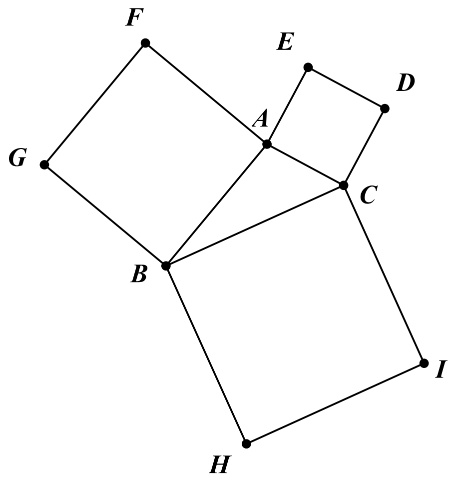
ABSTRACT

In this paper, we show that if the rectangle flanks of triangle are squares, then the ratio of the sum of the areas of the 2nd order rectangle flanks to the sum of the areas of the 1st order rectangle flanks is 3. On the other hand, the ratio equal to $\frac{3}{4}$ if the length of the free side is half of the length of the flank side.

Keywords: Rectangle flanks

1. บทนำ

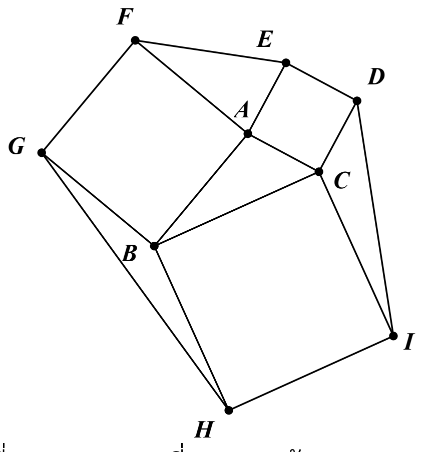
กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านร่วมกับ ΔABC ว่า **รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้าง (Rectangle flanks) อันดับที่ 1** ของ ΔABC



รูปที่ 1.1 รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้าง อันดับที่ 1 ของ ΔABC

จากรูปที่ 1.1 จะเห็นว่า $\square ACDE, \square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ของ ΔABC เรียกด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ของ ΔABC ที่เป็นด้านร่วมกับรูปสามเหลี่ยมว่า **ด้านขนาบ (Flank side)** และเรียกด้านที่ประชิดกับด้านขนาบว่า **ด้านอิสระ (Free side)**

เรียกรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ว่า **รูปสามเหลี่ยมขนาบข้าง (Triangle flank)** ของ ΔABC



รูปที่ 1.2 รูปสามเหลี่ยมขนาบข้างของ ΔABC

จากรูปที่ 1.2 จะได้ว่า $\Delta AEF, \Delta BGH$ และ ΔCID เป็นรูปสามเหลี่ยมขนาบข้างของ ΔABC

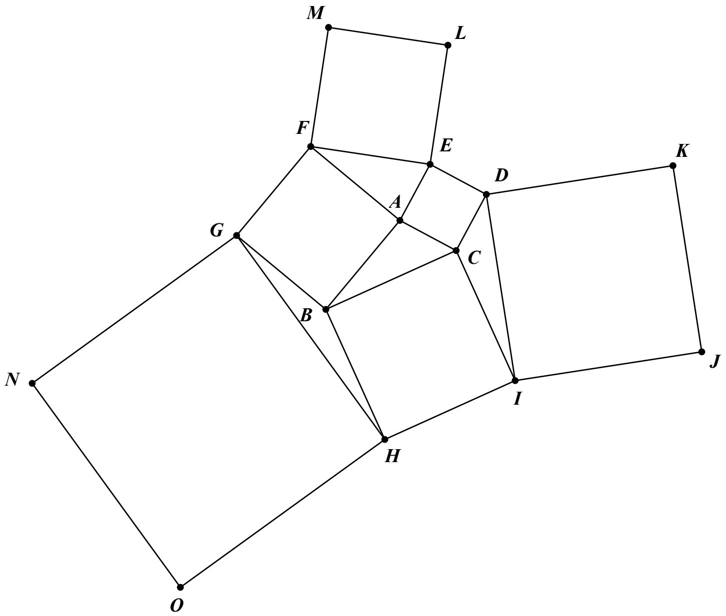
ในปี ค.ศ. 2005 Gilbey [1] ได้แสดงให้เห็นว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างของ ΔABC เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วรูปสามเหลี่ยมขนาบข้างของ ΔABC แต่ละรูปจะมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ ΔABC นั่นคือ $[AEF]=[BGH]=[CID]=[ABC]$

ในปี ค.ศ. 2018 Syawaludin และคณะ [2] ได้แสดงว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างของ ΔABC ทั้งสามรูปมีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาบ แล้วรูปสามเหลี่ยมขนาบข้างของ ΔABC ทั้งสามรูปจะมีพื้นที่เท่ากัน นั่นคือ $[AEF]=[BGH]=[CID]$

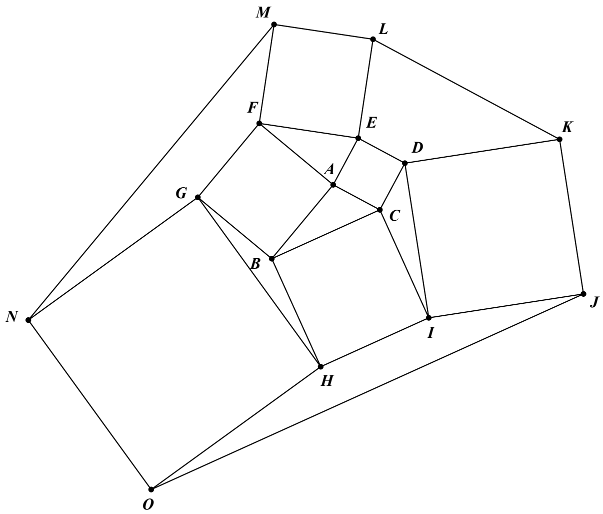
พิจารณารูปสามเหลี่ยมขนาบข้างของ ΔABC จะเรียก รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างของรูปสามเหลี่ยมขนาบข้างของ ΔABC ที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ของ ΔABC ว่า **รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2** ของ ΔABC

จากรูปที่ 1.3 จะเห็นว่า $\square FELM, \square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2 ของ ΔABC

Syawaludin และคณะ [2] ยังได้แสดงให้เห็นอีกด้วยว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างทั้งสองอันดับเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วรูปสี่เหลี่ยมที่เกิดจากรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2 เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งมีพื้นที่เท่ากัน และมีพื้นที่เป็น 5 เท่าของ ΔABC นั่นคือ $\square GFMN, \square IHOJ$ และ $\square EDKL$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และ $[GFMN]=[IHOJ]=[EDKL]=5[ABC]$ ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.3 รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2 ของ ΔABC



รูปที่ 1.4 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูของ Syawaludin และคณะ

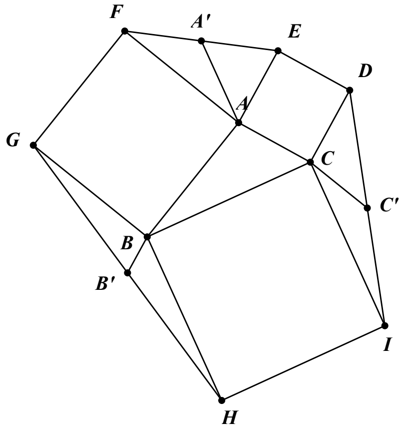
ในบทความนี้ เราสนใจความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และเมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านขนาบ

2. สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาบข้าง

ในหัวข้อนี้ จะแสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยเริ่มจากบทตั้งต่อไปนี้

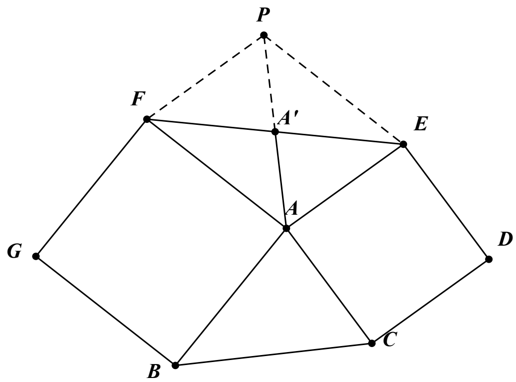
บทตั้ง 2.1 กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE, \square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ถ้า A', B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF, GH และ ID ตามลำดับ แล้ว $AA' = \dfrac{BC}{2}, BB' = \dfrac{AC}{2}$ และ $CC' = \dfrac{AB}{2}$



รูปที่ 2.1 ภาพประกอบบทตั้ง 2.1

บทพิสูจน์ ให้ P เป็นจุดที่ทำให้ $\square AEPF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ภาพประกอบการพิสูจน์บทตั้ง 2.1

เนื่องจาก A' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF ซึ่งเป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $AEPF$ จะได้ A' อยู่บนเส้นทแยงมุม AP และ $AA' = \frac{AP}{2}$

พิจารณาที่จุด A จะได้ $180^\circ = \angle FAE + \angle CAB = \left(\angle FAP + \angle PAE\right) + \angle CAB$

เนื่องจาก $\overline{PE} \,//\, \overline{FA}$ จะได้ $\angle FAP = \angle APE$ ดังนั้น $180^\circ = \angle APE + \angle PAE + \angle CAB$ นั่นคือ $\angle CAB = 180^\circ - \left(\angle APE + \angle PAE\right)$ ดังนั้น $\angle CAB = \angle AEP$

เนื่องจาก $AC = AE, \angle CAB = \angle AEP$ และ $AB = PE$ จะได้ $\Delta ABC \cong \Delta EPA$ ดังนั้น $AP = BC$ นั่นคือ $AA' = \frac{BC}{2}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $BB' = \frac{AC}{2}$ และ $CC' = \frac{AB}{2}$ □

ต่อไปจะแสดงว่า อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ของ ΔABC มีค่าเท่ากับ 3 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE, \square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 และมี $\square FELM, \square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างทุกรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้ว $\frac{[FELM]+[HGNO]+[DIJK]}{[ACDE]+[BAFG]+[CBHI]} = 3$

บทพิสูจน์ ให้ A', B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF, GH และ ID ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.3

โดยทฤษฎีบทของสจวร์ต (Stewart's theorem) และบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า

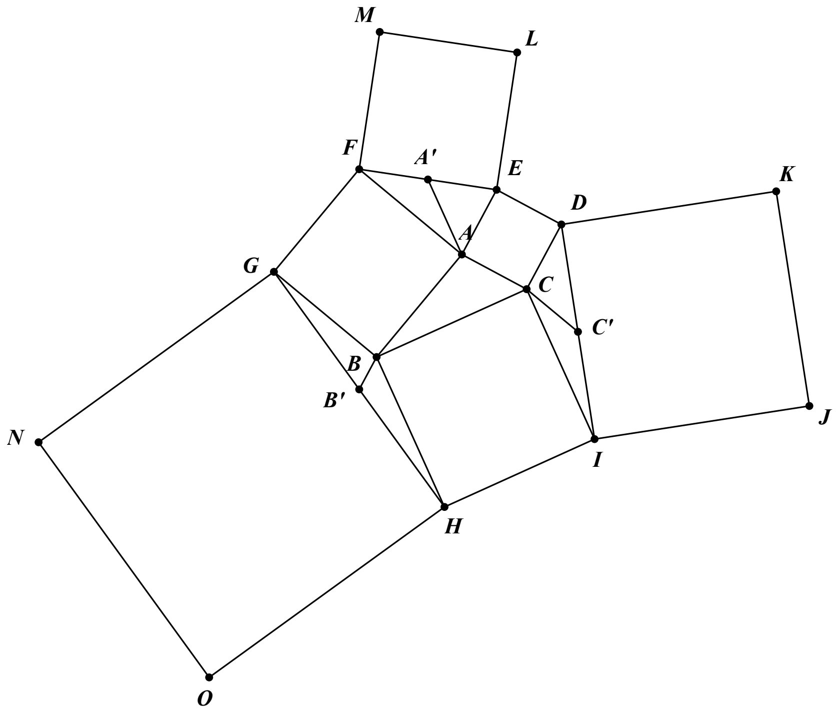
$$\left(AA'\right)^2 = \frac{1}{2}\left(AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2}\right)$$

นั่นคือ $\frac{BC^2}{4} = \frac{AC^2}{2} + \frac{AB^2}{2} - \frac{EF^2}{4}$ ดังนั้น $BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - EF^2$

นั่นคือ $EF^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $GH^2 = 2BA^2 + 2BC^2 - AC^2$ และ $DI^2 = 2CA^2 + 2CB^2 - AB^2$

ดังนั้น $\frac{[FELM]+[HGNO]+[DIJK]}{[ACDE]+[BAFG]+[CBHI]} = \frac{EF^2 + GH^2 + DI^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$



รูปที่ 2.3 ภาพประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2

$$= \frac{\left(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2\right) + \left(2BA^2 + 2BC^2 - AC^2\right) + \left(2CA^2 + 2CB^2 - AB^2\right)}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$$

$$= \frac{3AB^2 + 3AC^2 + 3BC^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$$

$$= 3$$

□

3. สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาบข้าง

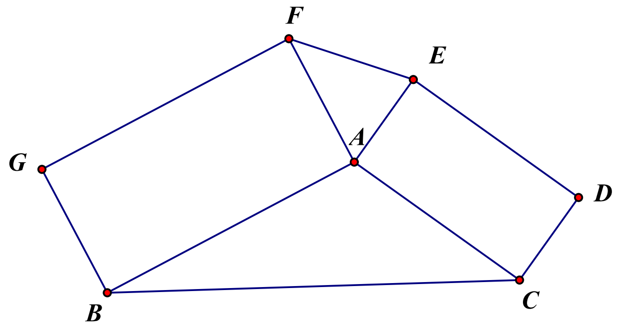
ในหัวข้อนี้ จะแสดงว่า เมื่อสี่เหลี่ยมขนาบข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาบแล้ว อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ของ ΔABC มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE, \square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 และมี $\square FELM, \square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 2

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างมีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาบ แล้ว

$$\frac{[FELM]+[HGNO]+[DIJK]}{[ACDE]+[BAFG]+[CBHI]}=\frac{3}{4}$$

บทพิสูจน์ พิจารณา ΔAEF ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ภาพประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1

โดยกฎของโคไซน์ จะได้ $EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2(AE)(AF)\cos(\angle FAE)$

นั่นคือ $EF^2 = AE^2 + AF^2 + 2(AE)(AF)\cos(\angle CAB)$

เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างมีด้านอิสระยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาบ จะได้ $AE = \dfrac{AC}{2}$ และ $AF = \dfrac{AB}{2}$ ดังนั้น

$$4EF^2 = AC^2 + AB^2 + 2(AC)(AB)\cos(\angle CAB) \qquad (1)$$

พิจารณา ΔABC โดยกฎของโคไซน์ จะได้

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos(\angle CAB) \qquad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $4EF^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$

นั่นคือ $EF^2 = \dfrac{AB^2}{2} + \dfrac{AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $GH^2 = \dfrac{BA^2}{2} + \dfrac{BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4}$ และ $DI^2 = \dfrac{CA^2}{2} + \dfrac{CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4}$

ดังนั้น

$$\frac{[FELM]+[HGNO]+[DIJK]}{[ACDE]+[BAFG]+[CBHI]} = \frac{EF^2 + GH^2 + DI^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{AB^2}{2} + \dfrac{AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}\right) + \left(\dfrac{BA^2}{2} + \dfrac{BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4}\right) + \left(\dfrac{CA^2}{2} + \dfrac{CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4}\right)}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$$

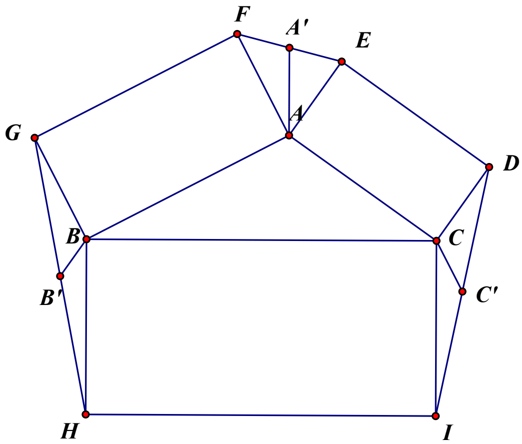
$$= \frac{\frac{3}{4}\left(AB^2 + AC^2 + BC^2\right)}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

นั่นคือ $\dfrac{[FELM]+[HGNO]+[DIJK]}{[ACDE]+[BAFG]+[CBHI]} = \dfrac{3}{4}$ □

จากการพิสูจน์ข้างต้น ยังสามารถหาความสัมพันธ์ของขนาดของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมขนาบข้างกับด้านของรูปสามเหลี่ยมตั้งต้นได้ ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.2 กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE, \square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาบข้างอันดับที่ 1 ซึ่งด้านอิสระยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาบ ถ้า A', B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF, GH และ ID ตามลำดับ แล้ว $AA' = \dfrac{BC}{4}, BB' = \dfrac{AC}{4}$ และ $CC' = \dfrac{AB}{4}$



รูปที่ 3.2 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.2

บทพิสูจน์ จากบทพิสูจน์ข้างต้น ได้ว่า $EF^2 = \dfrac{AB^2}{2} + \dfrac{AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$

เนื่องจาก $AE = \dfrac{AC}{2}$ และ $AF = \dfrac{AB}{2}$ จะได้

$$BC^2 = 8\left(AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2}\right) \tag{3}$$

พิจารณา ΔAEF โดยทฤษฎีบทของสจวร์ต จะได้ $\left(AA'\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(AE^2 + AF^2 - \dfrac{EF^2}{2}\right)$ หรือ

$$2\left(AA'\right)^2 = AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \tag{4}$$

จาก (3) และ (4) จะได้ $BC^2 = 16\left(AA'\right)^2$ นั่นคือ $AA' = \frac{BC}{4}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $BB' = \frac{AC}{4}$ และ $CC' = \frac{AB}{4}$ □

4. สรุป

จากข้างต้นพบว่า การศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ของรูปสามเหลี่ยมนั้นค่อนข้างเรียบง่ายและน่าสนใจ ซึ่งน่าพิจารณาต่อไปว่า ในกรณีที่ด้านอิสระและด้านขนานมีความสัมพันธ์กันเป็นอัตราส่วน k แล้วความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ของรูปสามเหลี่ยมนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าคงที่ k หรือไม่อย่างไร

เอกสารอ้างอิง

[1] Gilbey, J. (2005). Responding to Geoff Fauxs Challenge. *Mathematics Teaching*, *190*, p. 16

[2] Syawaludin, M. R., Mashadi, M. and Gemawati, S. (2018). Modification Cross' Theorem on Triangle with Congruence. *Pekanbaru Indonesia*, *4* (5), p. 40 - 44