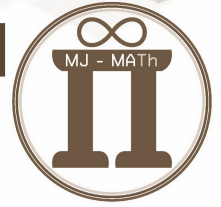




วารสารคณิตศาสตร์ MJ - MATH



โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Math Journal by the Mathematical Association of Thailand

www.MathThai.Org Email: MathThaiOrg@gmail.com

ISSN: 0858-4788

ปริมา ๖๒ ฉบับที่ ๖๙๒ ประจำเดือน พฤษภาคม - สิงหาคม ๒๕๖๐ Volume 62 Number 692 May – August 2017

บทความวิชาการ Academic Article

- ฟังก์ชันเมทริกซ์กับการประยุกต์ในคณิตศาสตร์การเงิน 1
Matrix Function with Application in Financial Mathematics
วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ
- อสมการแอร์ดีช-มอร์ดล 19
Erdos-Mordell Inequality
ภาคินี ชิตสกุล

บทความวิจัย Research Article

- การใช้ตัวแบบเชิงเส้นวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าเบี้ยประกันภัยรถยนต์ 31
Using Generalized Linear Models to Estimate Pure Premium for Motor Insurance
ชนกนาค สุขประยูร ดวงพร พัฒนบัณฑิต ภัทรพงศ์ สกลวโรภาส และ อุไรวรรณ เจริญกิตติกุล
- จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 39
Isosceles Triangular Numbers
สมพงศ์ จิตต์มั่น ก้าพล อวชัย และ พุทธิชัย ดันลา
- อิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์ของการจัดการเรียนรู้ ด้วยรูปแบบ SSCSE 51
และแบบการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่อง สถิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
Main and Interaction Effects of Learning Provision by SSCSE Model
and Learning Style for Mathematics Achievement Applications on “Statistics” of Mathayomsuksa 6 Students
เมธาสีทธิ์ ธัญรัตนศรีสกุล

บทความทั่วไป General Article

- ความงามทางคณิตศาสตร์กับสะเต็มศึกษา: Sierpinski Triangle 69
Aesthetic in Mathematics along with STEM Education: Sierpinski Triangle
ปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปทุมวัน กทม. 10330

ISSN: 0858-4788 Math Journal by



the Mathematical Association of Thailand Under the Patronage of His Majesty the King

Faculty of Science, Chulalongkorn University, Pathumwan, Bangkok 10330

Tel./Fax. +66 2252 7980

<http://MathThai.Org>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ที่ปรึกษา ผศ.ดร.รจิต วัฒนสินธุ์ นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย

หัวหน้ากองบรรณาธิการ (Editor-in-Chief)

รศ.ดร.ฉัฐไชย์ สีนาวงศ์ กรรมการบริหาร สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

กองบรรณาธิการบริหาร

ผศ.ดร.นิศากร สังวาระนที มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ผศ.ดร.ศศิพันธ์ นิตยประภา มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

ผศ.ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ดร.สิริทิพย์ เวศินรัตน์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม

อาจารย์ อลงกต สุวรรณมณี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

อาจารย์ ชิตวันพัทน์ วีระสัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

น.ส.ชญาณ์นันท์ นวพรอนันต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

น.ส.ลลิตา เลิศสมิตพร สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH ISSN: 0858-4788

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Math Journal by the Mathematical Association of Thailand

ปริมา ๖๒ ฉบับที่ ๖๙๒ ประจำเดือน พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๐

Volume 62 Number 692 May – August 2017

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ.พญาไท ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 02-252-7980

พิมพ์ที่ หจก. มิน เซอร์วิส ซัพพลาย 29/98 หมู่ 3 ถนนสุขุมวิท

แขวงลำผักชี เขตหนองจอก กทม. 10530 โทรศัพท์ 02-326-4124

**** ตราสัญลักษณ์วารสาร MJ-MATH ออกแบบโดย รศ.ดร.ฉัฐไชย์ สีนาวงศ์**

สร้างสรรค์ภาพโดย นายจิราวัฒน์ ดอกไม้ศรีจันทร์ และ น.ส.จุฑารัตน์ จันชัยภูมิ



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปทุมวัน กทม. 10330

ISSN: 0858-4788 Math Journal by



the **Mathematical Association of Thailand** Under the Patronage of His Majesty the King

Faculty of Science, Chulalongkorn University, Pathumwan, Bangkok 10330

Tel./Fax. +66 2252 7980

<http://MathThai.Org>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

ศ.ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ.ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
รศ.ดร.อิมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ.ดร.สิริพร ทิพย์คง	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
รศ.ดร.นพพร แหยมแสง	มหาวิทยาลัยรามคำแหง

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

ศ.ดร.กฤษณะ เนียมมณี	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ศ.ดร.ชนารักษ์ ชีระมโนคง	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ศ.ดร.ภูมิฐาน รังกุลนุวัฒน์	มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย
ศ.ดร.ไพศาล นาคมหาชาลาสินธุ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ.ดร.พรฤดี เนติโสภาคกุล	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
รศ.ดร.กาญจน์ภา อมรัชกุล	สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
รศ.ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
รศ.ดร.สุรินทร์ ปัทมวรคุณ	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
รศ.ดร.ชานนท์ จันทรา	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
รศ.ดร.เสนอ คุณประเสริฐ	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
รศ.ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ผศ.ดร.สุวรรณา รัตมีขวัญ	มหาวิทยาลัยบูรพา
ผศ.ดร.จักรกฤษณ์ เสน่ห์ นมะหุต	มหาวิทยาลัยนเรศวร
ผศ.ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว	มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์
ผศ.ดร.มาลินี ชัยยะ	มหาวิทยาลัยศิลปากร
ผศ.ดร.ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์	มหาวิทยาลัยขอนแก่น / นายกสมาคมคณิตศาสตร์ศึกษา
คุณ พิเชฐ เจียรมนิทีวิน	นายกสมาคมนักคณิตศาสตร์ประจักษ์แห่งประเทศไทย



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปทุมวัน กทม. 10330

ISSN: 0858-4788 Math Journal by

the Mathematical Association of Thailand Under the Patronage of His Majesty the King

Faculty of Science, Chulalongkorn University, Pathumwan, Bangkok 10330

Tel./Fax. +66 2252 7980

<http://MathThai.Org>

Email: MathThaiOrg@gmail.com



กติกาคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อตีพิมพ์

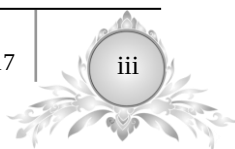
วารสารคณิตศาสตร์ เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ ที่จัดทำขึ้นโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เพื่อเปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นภาษาไทยหรือภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารฯ

ทั้งนี้ บทความต้องมีเนื้อหาทางด้านคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในทุกสาขาที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง เช่น วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ บริหารธุรกิจทุกแขนง ทฤษฎีการและสิ่งแวดล้อม การแพทย์และการสาธารณสุข เป็นต้น
กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Centre) อย่างเคร่งครัด ดังนั้นจึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการ โดยแสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1: กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	Math Journal (MJ-MATH) by the Mathematical Association of Thailand
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ คือ ฉบับที่ 1 (มกราคม–เมษายน) ฉบับที่ 2 (พฤษภาคม–สิงหาคม) และฉบับที่ 3 (กันยายน–ธันวาคม)



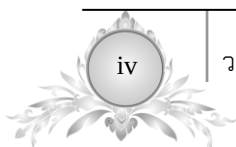


ตารางที่ 1: (ต่อ)

ขอบเขตของบทความที่จะรับตีพิมพ์ในวารสาร	จะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่างๆ เช่น • วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรมศาสตร์ • วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี • เศรษฐศาสตร์ การเงินและการประกันภัย • บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์และซัพพลายเชน • ประชากรศาสตร์ ทรัพยากรและสิ่งแวดล้อม • การแพทย์และการสาธารณสุข • มนุษยศาสตร์ สังคมศาสตร์ ประวัติศาสตร์และโบราณคดี • สาขาอื่นๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง
การพิจารณาถ้อยแถลงบทความของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ต้องได้รับการพิจารณาถ้อยแถลงจากผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้อง โดยผู้ทรงคุณวุฒิไม่มีส่วนได้เสียกับผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จากผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
อื่นๆ	บทความที่จะลงตีพิมพ์จะต้องเป็นบทความที่ไม่เคยได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่หรืออยู่ระหว่างการพิจารณาถ้อยแถลงตีพิมพ์ในวารสารอื่นๆ

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสาร

ผู้ประสงค์ส่งบทความ กรุณาดาวน์โหลดไฟล์ Template.dotx จาก Website ของวารสารที่ <http://Journal.MathThai.Org> และปฏิบัติตามคำแนะนำใน Template อย่างเคร่งครัด จากนั้น อัปโหลดบทความที่เป็นไฟล์ชนิด Microsoft Word พร้อมทั้งแนบแบบฟอร์มการส่งบทความ ขึ้นที่ระบบการส่งบทความ (Online Journal Systems: OJS) ทางหน้า Website ของวารสาร หรือส่งทางอีเมลมาที่ MathThaiOrg@gmail.com





วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 62(692) May–Aug, 2017

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org>MathThaiOrg@gmail.com

ฟังก์ชันเมทริกซ์กับการประยุกต์ในคณิตศาสตร์การเงิน

Matrix Function with Application in
Financial Mathematics

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

Wichai Witayakiattilerd

Department of Mathematics and Statistics,
Faculty of Science and Technology, Thammasat University,
Paholyothin Road, Klong Luang, Rangsit, Pathumthani, 12121, ThailandEmail: wichai@mathstat.sci.tu.ac.th

บทคัดย่อ

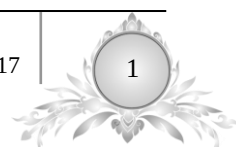
บทความนี้นำเสนอแนวความคิดการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ โดยเริ่มจากการนิยามฟังก์ชันกำลังของเมทริกซ์หลังจากนั้นได้ขยายแนวความคิดไปยังการนิยามฟังก์ชันใดๆของเมทริกซ์ และได้ยกตัวอย่างการคำนวณค่าเพื่อให้เข้าใจนิยามได้อย่างชัดเจน นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงการประยุกต์ฟังก์ชันเมทริกซ์ในคณิตศาสตร์การเงินอีกด้วย

คำสำคัญ: ฟังก์ชันเมทริกซ์ เมทริกซ์แปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ รูปแบบบัญญัติจอร์แดน ฟังก์ชันกำลังของเมทริกซ์ ฟังก์ชันอดิศัยของเมทริกซ์

ABSTRACT

This article presents a concept to define a function of matrix. Start by defining a power function of matrix is then expanded to the concept of the definition of any function of matrix. Some calculating-examples are provided to clearly understand. An application to financial mathematics is shown.

Keywords: Function of Matrix, Diagonalizable Matrix, Jordan Canonical Form, Power Function of Matrix, Transcendental Function of Matrix





1. บทนำ

วัตถุประสงค์ของบทความนี้เพื่อถ่ายทอดแนวคิดอย่างง่ายในการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ โดยขยายแนวคิดจากการนิยามฟังก์ชันสเกลาร์ นำไปสู่การนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์จากฟังก์ชันที่ถูกขยาย หลังจากนั้นขยายแนวคิดไปยังการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ใดๆโดยผ่านรูปแบบบัญญัติจอร์แดน

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันของตัวแปรเดียวเหนือสนาม F (เซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ หรือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$) เพื่อความสะดวกจะกำหนดให้ F เป็น $\mathbb{C}$ นั่นคือพิจารณาฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ $\mathbb{C}$ ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f:D_f \rightarrow \mathbb{C}$ เมื่อ $D_f \subseteq \mathbb{C}$ แทนโดเมนของ f หรืออาจจะเขียนในรูปการส่งค่า $x \mapsto f(x)$ นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณา f เป็นการส่งค่าจากปริภูมิเมทริกซ์บน $\mathbb{C}$ ขนาด 1×1 ไปยังปริภูมิของเมทริกซ์บน $\mathbb{C}$ ขนาด 1×1 ได้อีกด้วย นั่นคือ $f([x]) = [f(x)]$

กำหนดให้ $\mathbb{C}^{n \times n}$ เป็นปริภูมิเมทริกซ์บน $\mathbb{C}$ ขนาด $n \times n$ ปัญหาหนึ่งที่น่าสนใจ คือ จะนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ซึ่งส่งค่าจาก $\mathbb{C}^{n \times n}$ ไปยัง $\mathbb{C}^{n \times n}$ อย่างไร นั่นคือ ถ้าให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ และ $f:D_f \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ เมื่อ $D_f \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$ แล้วจะนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ $f(A)$ อย่างไร เช่น ควรจะนิยาม e^A , $\sin A$ และ $\cos A$ อย่างไร

2. ความรู้เบื้องต้นในพีชคณิตเชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นในพีชคณิตเชิงเส้นซึ่งใช้ในการนิยามและคำนวณค่าของฟังก์ชันเมทริกซ์

กำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A เรียก เซต $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ว่า สเปกตรัม (Spectrum) ของเมทริกซ์ A และเรียก $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$ ว่า รัศมีเชิงสเปกตรัม (Spectral radius) ของเมทริกซ์ A

2.1 เมทริกซ์แปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ และมีค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด กำหนดให้ $E_{\lambda_k}(A)$ แทนปริภูมิเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สัมพันธ์กับ $\lambda_k, k=1, \dots, m$ และ มิติของ $E_{\lambda_k}(A)$ เขียนแทนด้วย $\dim E_{\lambda_k}(A)$ ซึ่งจะกล่าวว่า เมทริกซ์ A แปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ (Diagonalizable matrix) ถ้ามี

เมทริกซ์ไม่เอกฐาน S ซึ่ง

$$S^{-1}AS = D \quad (1)$$

เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม หรือกล่าวได้ว่าเมทริกซ์ A คล้ายกับ เมทริกซ์ D นั้นเอง สมบัติการแปลงให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้จะช่วยทำให้สามารถคำนวณค่าต่างๆเมทริกซ์ A ได้ง่ายขึ้น เช่น การหาดีเทอร์มิแนนต์ การหาเมทริกซ์อินเวอร์ส หรือ การคำนวณค่าอื่นๆที่เกี่ยวกับเมทริกซ์ เป็นต้น โดยเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ เป็นตามทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 [1] กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ จะได้ว่า $\sum_{k=1}^m \dim E_{\lambda_k}(A) = n$ ก็ต่อเมื่อ A แปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

จากเงื่อนไข $\sum_{k=1}^m \dim E_{\lambda_k}(A) = n$ ในทฤษฎีบท 1 ทำให้ทราบว่าปริภูมิ

ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A คือ $\text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เมื่อ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (อาจมีบางค่าที่ซ้ำกันได้) ตามลำดับ เมทริกซ์ไม่เอกฐาน S ที่ทำให้ $S^{-1}AS = D$ โดยที่

$$D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม สามารถ}$$

กำหนดให้เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีแต่ละคอลัมน์เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $x_1, x_2, \dots, x_n$ นั่นคือ $S = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ผลที่ตามมาคือ สามารถเขียนเมทริกซ์ A ในรูป $A = SDS^{-1}$ ซึ่งทำให้สามารถคำนวณค่าต่างๆของเมทริกซ์ A ได้ง่ายและสะดวกขึ้น อาทิ

$$\det A = \det SDS^{-1} = \det D \text{ และ } A^{-1} = (SDS^{-1})^{-1} = SD^{-1}S^{-1} \quad (2)$$



2.2 รูปแบบบัญญัติจอร์แดน

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา หาก $\dim E_\lambda(A) < m$ เมทริกซ์ A จะไม่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ อย่างไรก็ตามสำหรับเมทริกซ์ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ใดๆ จะสามารถแปลงให้อยู่ในรูปใกล้เคียงกับเมทริกซ์ทแยงมุม ที่เรียกว่า รูปแบบบัญญัติจอร์แดน (Jordan canonical form) ได้เสมอ

ทฤษฎีบท 2 [1] กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ และให้ $\sum_{\lambda} \dim E_\lambda(A) = s$ จะมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ซึ่ง

$$Q^{-1}AQ = J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_s\} = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix} \quad (3)$$

โดยที่แต่ละเมทริกซ์ $J_k \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$ เรียกว่า บล็อกจอร์แดน (Jordan block) ซึ่ง

เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมในรูป $J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}$ และสมนัยกับเวกเตอร์

ฐานของ $E_{\lambda_k}(A)$ สำหรับค่าลักษณะเฉพาะ λ_k ของเมทริกซ์ A

พิจารณาเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 1$ และมีปริภูมิ

ของเวกเตอร์ คือ $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ ทำให้ได้ว่า $\sum_{k=1}^m \dim E_{\lambda_k}(A) = 2 < 3$

ดังนั้นเมทริกซ์ A ไม่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ อย่างไรก็ตามโดยทฤษฎีบท 2 สามารถแปลงเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติจอร์แดนได้คำถามที่น่าสนใจคือ จะหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ได้อย่างไรในเมื่อ



$\sum_{k=1}^m \dim E_{\lambda_k}(A) < n$ นั้นแสดงว่าจำนวนเวกเตอร์ฐานของปริภูมิเวกเตอร์

ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A น้อยกว่า n ดังนั้น จึงไม่สามารถสร้างเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ซึ่งแต่ละคอลัมน์ประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั้งหมดแต่สามารถสร้างได้เพียงบางคอลัมน์เท่านั้น โดยคอลัมน์ที่เหลือจะเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไป (Generalized eigenvectors) ของเมทริกซ์ A ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3 เรียกเวกเตอร์ไม่ใช่ศูนย์ x ว่า **เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไป** ของเมทริกซ์ A ระดับชั้น k ที่สมนัยกับค่าลักษณะ λ ถ้า

$$(A - \lambda I)^k x = 0 \quad \text{และ} \quad (A - \lambda I)^{k-1} x \neq 0 \quad (4)$$

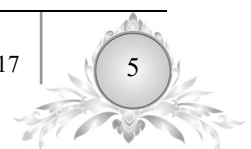
จะเห็นว่ากรณีที่ $k=1$ ในบทนิยาม 3 ก็คือนิยามของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะปกติ นั่นเอง ให้ x เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของเมทริกซ์ A ระดับชั้น k ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ นิยาม

$$x_1 = (A - \lambda I)^{k-1} x \quad \text{และ} \quad x_i = (A - \lambda I)^{k-i} x \quad \text{สำหรับ} \quad i = 2, \dots, k \quad (5)$$

จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $i = 2, 3, \dots, k$, $(A - \lambda I)^i x_i = (A - \lambda I)^k x = 0$ และ $(A - \lambda I)^{i-1} x_i = (A - \lambda I)^{k-1} x \neq 0$ ดังนั้นเวกเตอร์ $x_i = (A - \lambda I)^{k-i} x$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของเมทริกซ์ A ระดับชั้น i

บทนิยาม 4 เรียกเซตของเวกเตอร์ $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ที่นิยามตาม (5) ว่า **โซ่ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไป** ของเมทริกซ์ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ

โซ่ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปที่นิยามตาม (5) จะมีสมบัติเป็นอิสระเชิงเส้น และยูเนียนทั้งหมดของโซ่ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปจะเป็นอิสระเชิงเส้นและแผ่ทั่ว (Span) ปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของเมทริกซ์ A และสำหรับเมทริกซ์ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ใดๆ สามารถสร้างเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ได้โดยกำหนดให้เป็นเมทริกซ์ซึ่งแต่ละคอลัมน์เป็นฐานของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของเมทริกซ์ A





ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ จงเขียนเมทริกซ์ A ในรูป

QJQ^{-1} เมื่อ Q เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_s\}$ โดยที่ $J_k \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$ เป็นบล็อกจอร์แดน

วิธีทำ เราได้หาค่าลักษณะเฉพาะและปริภูมิเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A มาแล้ว ซึ่งได้ค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 1$ และมีปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

คือ $\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ดังนั้นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน $\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ จะเป็น

เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของ $\lambda = 1$ ที่มีค่าระดับชั้นเป็น 1 ซึ่งก่อกำเนิดโซ่ $\{x\}$ ต่อไปจะหาค่าระดับชั้นอื่นที่เป็นไปได้ของค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 1$ โดยพิจารณา

$$(A - I)^k = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -3 & -6 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}^k \quad \text{สำหรับบางจำนวนนับ } k \text{ ดังนี้}$$

$$\text{ซึ่งพบว่า } (A - I) \neq 0 \text{ และ } (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -3 & -6 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}^2 = 0$$

ดังนั้น ค่าระดับชั้นที่เป็นไปได้สูงสุดของค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 1$ คือค่าระดับชั้น 2 สำหรับกรณีนี้ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะทั่วไปของค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 1$ จะก่อกำเนิดโซ่ $\{y_1, y_2\}$ โดยที่ y_1 และ y_2 สอดคล้องเงื่อนไข (5) นั่นคือ สอดคล้องกับสมการ

$$y_1 = (A - I)y \neq 0$$

และ $y_2 = y$ เมื่อ $(A - I)^2 y = 0$

จะเห็นว่าจากสมการ $(A - I)^2 y = 0$ จะได้ y เป็นเวกเตอร์ใดๆที่ไม่ใช่เวกเตอร์ 0 นั่นคือสามารถเลือก $y \neq 0$ และทำให้ $(A - I)y \neq 0$

$$\text{ในที่นี้ เลือก } y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } (A - I)y = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -3 & -6 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0$$



ดังนั้นได้ โซ่ $\{y_1, y_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ซึ่งทำให้ยูเนียนทั้งหมดของโซ่ของเวกเตอร์

ลักษณะเฉพาะทั่วไปคือ $\{x, y_1, y_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

กำหนดให้ $Q = [x, y_1, y_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ และ

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

เมื่อ $J = \text{diag}\{J_1, J_2\}$ โดยที่ $J_1 = [1]$ และ $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นบล็อกจอร์แดน

นั้นคือสามารถเขียนเมทริกซ์ A ได้ในรูป $A = QJQ^{-1}$ □

3. ฟังก์ชันเมทริกซ์

กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ หากกล่าวถึงฟังก์ชันเมทริกซ์ของเมทริกซ์ A อาจมีแนวทางในการนิยามได้หลากหลาย อาทิ

- การนิยามฟังก์ชันของ A แบบรายสมาชิก เช่น $e^A = [e^{a_{ij}}]_{n \times n}$
- การนิยามฟังก์ชันของ A ไปยัง $\mathbb{C}^{m \times r}$ เช่น

$$f\left(\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

- การนิยามฟังก์ชันของ A ไปยัง $F(\mathbb{R} \text{ หรือ } \mathbb{C})$ เช่น $f(A) = \|A\|$

แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ $f(A)$ ที่มีความเป็นทั่วไปจากฟังก์ชันสเกลาร์ $f(x)$ โดย $f(A)$ ยังเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกับเมทริกซ์ A โดยก่อนอื่นจะกล่าวถึงฟังก์ชันเมทริกซ์โดยใช้แนวความคิดของฟังก์ชันที่ถูกขยายมาจากฟังก์ชันสเกลาร์ของตัวแปรเดียว



3.1 ฟังก์ชันที่ถูกขยาย

บทนิยาม 5 กำหนดให้ $f: D_f \rightarrow \mathbb{C} (D_f \subseteq \mathbb{C})$ เป็นฟังก์ชัน

เรียก $f: D_f^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ ว่า ฟังก์ชันที่ถูกขยาย

จากบทนิยาม 5 ทำให้ทราบว่าแนวทางหนึ่งในการนิยามฟังก์ชันก้ำของเมทริกซ์คือการนิยามในรูปฟังก์ชันที่ถูกขยาย เช่น

- ฟังก์ชัน $f(x) = 5x$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{C}$ มีฟังก์ชันที่ถูกขยาย คือ $f(A) = 5A$ สำหรับทุกๆ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{C}$ มีฟังก์ชันที่ถูกขยาย คือ $f(A) = A^2$ สำหรับทุกๆ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

3.1.1 ฟังก์ชันกำลังของเมทริกซ์

กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก ฟังก์ชันกำลังของเมทริกซ์ f จะนิยามจากฟังก์ชันที่ถูกขยายมาจาก $f(x) = x^m$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{C}$ นั่นคือ ฟังก์ชันกำลัง f ของเมทริกซ์นิยามโดย

$$f(A) = A^m \text{ สำหรับทุกๆ } A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (6)$$

โดยที่ $A^m = AA^{m-1}$ เมื่อ $A(0) = I$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ โดยใช้แนวความคิดเดียวกัน ฟังก์ชันกำลัง A^{-m} นิยามได้โดย

$$A^{-m} = (A^m)^{-1} \text{ สำหรับทุกๆ } A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ ซึ่ง } A^m \text{ มีอินเวอร์ส} \quad (7)$$

3.1.2 ฟังก์ชันพหุนามของเมทริกซ์

กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนามในตัวแปร x กำลัง n นั่นคือ

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (8)$$

สำหรับบางสเกลาร์ $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ โดยที่ $a_n \neq 0$ ดังนั้นสามารถนิยามพหุนามจากฟังก์ชันที่ถูกขยาย ดังนี้

$$p(A) := a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I, \text{ สำหรับทุกๆ } A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (9)$$

ข้อสังเกตประการหนึ่งคือ ถ้า $p(\lambda)$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว จะได้ $p(A) = 0$ เรียกสมบัตินี้ว่า กฎของเคย์เลย์



3.1.3 ฟังก์ชันเชิงเศษส่วนของเมทริกซ์

กำหนดให้ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนามและ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เป็นฟังก์ชัน

เชิงเศษส่วน สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $q(x) \neq 0$ สามารถนิยามฟังก์ชันเชิงเศษส่วนของเมทริกซ์ได้โดย

$$f(A) = (q(A))^{-1} p(A) \text{ สำหรับทุกๆ } A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ ซึ่ง } (q(A))^{-1} \text{ มีค่า} \quad (10)$$

แนวความคิดของการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชันที่ถูกขยายดูเหมือนจะสมเหตุสมผลและไม่ยุ่งยาก อย่างไรก็ตามถ้าฟังก์ชันสเกลาร์นั้นเป็นฟังก์ชันอดิศัย ปัญหาคือ ฟังก์ชันเมทริกซ์จากฟังก์ชันที่ถูกขยายเหล่านั้น จะมีความหมายและคำนวณค่าอย่างไร เช่น ฟังก์ชัน e^A , $\sin A$ และ $\cos A$

3.2 นิยามของฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านรูปแบบบัญญัติจอร์แดน

กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะจำนวน m ค่าที่แตกต่างกันทั้งหมดคือ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ และ n_i เป็นอันดับของบล็อกจอร์แดนที่ใหญ่ที่สุดที่บรรจุ λ_i

บทนิยาม 6 จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนสเปกตรัมของ A ถ้า

$$f^{(j)}(\lambda_i), j = 0, 1, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, m \text{ มีค่า} \quad (11)$$

และเรียกค่าใน (11) ว่า ค่าของฟังก์ชันบนสเปกตรัมของ A

บทนิยาม 7 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ใดๆซึ่ง $A = QJQ^{-1}$ เมื่อ

$J = \text{diag}\{J_1, \dots, J_m\}$ และกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนสเปกตรัมของ A

ฟังก์ชัน f ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$f(A) = Qf(J)Q^{-1} = Q\text{diag}\{f(J_1), \dots, f(J_m)\}Q^{-1} \quad (12)$$

$$\text{เมื่อ } f(J_k) = \begin{bmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \dots & \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_k) \\ 0 & & & f(\lambda_k) \end{bmatrix} \quad (13)$$





โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้า $J = D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ จะได้

$$f(A) = Qf(D)Q^{-1} = Q\text{diag}\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\}Q^{-1} \quad (14)$$

ตัวอย่างที่ 2 จากตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ จงคำนวณค่า e^A

วิธีทำ เนื่องจาก $\{1\}$ เป็นสเปกตรัมของ A ดังนั้น e^t เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนสเปกตรัมของ A จากตัวอย่างที่ 1 ได้ว่า $A = QJQ^{-1}$ เมื่อ

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}\{J_1, J_2\}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $J_1 = [1]$ และ $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จากสูตร (13) ในบทนิยาม 7 จะได้

$$e^J = \text{diag}\{e^{J_1}, e^{J_2}\} \text{ เมื่อ } e^{J_1} = e^{[1]} = [e] \text{ และ } e^{J_2} = e^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & e \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น}$$

$$e^A = Qe^JQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e & 8e & -4e \\ -3e & -5e & 3e \\ -2e & -4e & 3e \end{bmatrix}$$

□

3.3 อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันเมทริกซ์

อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันเมทริกซ์เป็นเครื่องมือหนึ่งซึ่งใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันเมทริกซ์ ซึ่งเงื่อนไขการมีการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันนั้นจะต้องสอดคล้องกับรัศมีการลู่อเข้าของฟังก์ชันสเกลาร์ ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้



ทฤษฎีบท 8 [2] สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ที่มีการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด a คือ $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$ ซึ่งมีรัศมีการลู่เข้า r สำหรับแต่ละ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ จะได้ว่า $f(A)$ นิยามได้และ

$$f(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (A - aI)^j \quad (15)$$

ก็ต่อเมื่อ แต่ละค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ที่แตกต่างกันทั้งหมดของเมทริกซ์ A สอดคล้องเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งต่อไปนี้

- (1) $|\lambda_i - a| < r$, $i = 1, 2, \dots, m$
- (2) $|\lambda_i - a| = r$ และ อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f^{(n_i-1)}(\lambda)$ ลู่เข้าที่จุด $\lambda = \lambda_i$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, m$

โดยทฤษฎีบท 8 ทำให้สามารถนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ได้อีกแนวทางหนึ่ง ดังเช่นฟังก์ชันต่อไปนี้

3.3.1 ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลเมทริกซ์

การนิยามฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลเมทริกซ์จะเริ่มจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ e^x รอบจุด 0 คือ

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} , \text{ สำหรับทุกๆ } x \in \mathbb{C} \quad (16)$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 8 ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลเมทริกซ์ e^A นิยามได้โดย

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} , \text{ สำหรับทุกๆ เมทริกซ์ } A \in \mathcal{M}^{n \times n} \quad (17)$$

นอกจากการใช้ทฤษฎีบท 7 และ ทฤษฎีบท 8 ยังสามารถใช้สมบัติต่อไปนี้ช่วยในการคำนวณค่าของ e^A ได้อีกด้วย

ทฤษฎีบท 9 [3] ให้ $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ จะได้ว่า

- (1) ถ้า A และ B มีสมบัติสลับที่การคูณ นั่นคือ $AB = BA$ แล้ว $e^{A+B} = e^A e^B$

$$(2) \text{ ถ้า } \theta \in \mathbb{C} \text{ แล้ว } e^{\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$





$$(3) e^{\text{diag}\{A,B\}} = \text{diag}\{e^A, e^B\}$$

$$(4) \text{ ถ้า } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ แล้ว } e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงคำนวณ e^{At}

วิธีทำ เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

และ $2I, -4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ มีสมบัติสลับที่ ดังนั้น $e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{bmatrix}} e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}(-4t)}$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4t & 8t^2 \\ 0 & 1 & -4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -4e^{2t}t & 8e^{2t}t^2 \\ 0 & e^{2t} & -4e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \quad \square$$

3.3.2 ลอการิทึมเมทริกซ์

แนวทางหนึ่งในการนิยามฟังก์ชันลอการิทึมเมทริกซ์คือการนิยามผ่านอนุกรมเทย์เลอร์ เนื่องจากอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด 0 ของ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (18)$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกๆ x ที่ $|x| < 1$ โดยการแทน x ด้วย $-x$ ใน (18) จะได้

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (19)$$

เมื่อนำ (19) หักออกจากด้วย (18) จะได้



$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad (20)$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $y = \frac{1-x}{1+x}$ จะได้ $x = \frac{1-y}{1+y}$ และ

$$\ln y = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{2k+1} \quad (21)$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกๆ y เมื่อ $\left|\frac{1-y}{1+y}\right| < 1$ นั่นคือ $\operatorname{Re}(y) > 0$

ดังนั้น ฟังก์ชันลอการิทึมเมทริกซ์ สามารถนิยามได้โดย

$$\ln A = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left((I-A)(I+A)^{-1}\right)^{2k+1} \quad (22)$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกๆ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เมื่อ $\min_k \operatorname{Re}(\lambda_k(A)) > 0$

3.3.3 ฟังก์ชันกำลังเศษส่วนของเมทริกซ์

ในหัวข้อนี้จะนิยามฟังก์ชันกำลังเศษส่วนของเมทริกซ์ (Matrix fractional power function) ซึ่งไม่ได้หมายถึงเมทริกซ์ที่มีกำลังเป็นเศษส่วนเพียงเท่านั้น ยังหมายถึงเมทริกซ์ที่มีกำลังเป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย แต่ยังคงเรียกชื่อเช่นเดิม

กำหนดให้ $r \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $x^r = e^{r \ln x}$ สำหรับทุกๆ $x > 0$ และ เนื่องจาก

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ ลู่เข้าสำหรับทุกๆ } x \in \mathbb{C} \text{ จะได้}$$

$$x^r = 1 + r \ln x + \frac{(r \ln x)^2}{2!} + \frac{(r \ln x)^3}{3!} + \dots \quad (23)$$

ดังนั้น ฟังก์ชันกำลังเศษส่วนของเมทริกซ์ สามารถนิยามได้โดย

$$A^r = 1 + r \ln A + \frac{(r \ln A)^2}{2!} + \frac{(r \ln A)^3}{3!} + \dots \quad (24)$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกๆ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เมื่อ $\min_k \operatorname{Re}(\lambda_k(A)) > 0$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $p \geq 2$ ที่เป็นจำนวนนับ จะเรียก

$$A^{1/p} = 1 + \frac{\ln A}{p} + \frac{(\ln A)^2}{p^2 2!} + \frac{(\ln A)^3}{p^3 3!} + \dots \quad (25)$$

ว่า รากที่ p ที่เป็นบวกของเมทริกซ์ A ซึ่งจะมีค่าเมื่อ $\min_k \operatorname{Re}(\lambda_k(A)) > 0$





3.3.4 ฟังก์ชันอดิศัยเมทริกซ์

ฟังก์ชันอดิศัยในที่นี้ได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกซึ่งสามารถนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์จากฟังก์ชันที่ถูกขยายของฟังก์ชันเหล่านี้โดยเขียนฟังก์ชันดังกล่าวในรูปฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล ดังนี้
สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (26)$$

และ สำหรับฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{และ} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2i} \quad (27)$$

เมื่อ $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$, $e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}$ และ

$$e^{-ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k x^k}{k!}, \quad \text{สำหรับทุกๆ } x \in \mathbb{C} \quad \text{โดยที่ } i = \sqrt{-1} \text{ เป็นจำนวนจินตภาพ}$$

ในจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 10 กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ฟังก์ชันตรีโกณมิติเมทริกซ์นิยามได้โดย

1. $\cos A = \frac{e^{Ai} + e^{-Ai}}{2}$
2. $\sin A = \frac{e^{Ai} - e^{-Ai}}{2i}$
3. $\sec A = (\cos A)^{-1}$ เมื่อ $\det(\cos A) \neq 0$
4. $\tan A = \sin A \sec A$
5. $\csc A = (\sin A)^{-1}$ เมื่อ $\det(\sin A) \neq 0$
6. $\cot A = \cos A \csc A$

บทนิยาม 11 กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกเมทริกซ์นิยามได้โดย

1. $\cosh A = \frac{e^A + e^{-A}}{2}$
2. $\sinh A = \frac{e^A - e^{-A}}{2i}$
3. $\operatorname{sech} A = (\cosh A)^{-1}$ เมื่อ $\det(\cosh A) \neq 0$



4. $\tan A = \sinh A \operatorname{sech} A$
5. $\operatorname{csch} A = (\sinh A)^{-1}$ เมื่อ $\det(\sinh A) \neq 0$
6. $\coth A = \cosh A \operatorname{csch} A$

4. การประยุกต์ในคณิตศาสตร์การเงิน: แบบจำลองการจ่ายชำระหนี้

พิจารณาการผ่อนชำระหนี้สินเชื่อที่อยู่อาศัย 1 รายการ สมมติให้ p_0 เป็นเงินต้นที่ลูกหนี้กู้ยืมหรือวงเงินที่สถาบันการเงินอนุมัติให้ผู้กู้ โดยที่การจ่ายชำระคืนนั้นจะต้องจ่ายชำระคืนเป็นจำนวนเงินที่มากกว่าดอกเบี้ยที่เกิดขึ้น ณ เวลานั้น ให้ $p(t)$ แทนเงินต้นหรือมูลค่าหนี้คงเหลือหลังจากการชำระหนี้ที่เวลา t ใดๆ ตลอดช่วงเวลาแห่งสัญญาการกู้ยืม $[0, T]$ โดยที่ T เป็นเวลาสิ้นสุดของสัญญา สมมติว่าผู้กู้สามารถจ่ายชำระคืนเงินกู้ได้ตลอดเวลา โดยที่อัตราการจ่ายชำระคืนที่ t ใดๆ เท่ากับ $h(t)$ ต่อปี ภายใต้ข้อสันนิษฐานดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง $\rho(t)$ ต่อปี พิจารณามูลค่าของหนี้คงเหลือที่เวลา $t+\delta$ หลังจากมีการจ่ายชำระหนี้อย่างต่อเนื่องบนช่วง $[t, t+\delta]$, $\delta \ll 1$ จะได้ว่า เงินต้นคงเหลือหลังจากการชำระหนี้ที่เวลา $t+\delta$ เท่ากับ มูลค่าของหนี้สะสม หักออกด้วย มูลค่าของเงินจ่ายชำระคืนตลอดช่วง $[t, t+h]$ นั่นคือ

$$p(t+\delta) = p(t)e^{\int_t^{t+\delta} \rho(s) ds} - \int_t^{t+\delta} h(s)e^{\int_s^{t+\delta} \rho(\tau) d\tau} ds \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{ผลที่ตามมาคือ } p(t+\delta) &= p(t)e^{\rho(t)\delta + o(\delta)} - h(t)e^{\rho(t)\delta + o(\delta)}\delta + o(\delta) \\ &= [p(t) - h(t)\delta][1 + \rho(t)\delta] + o(\delta) \end{aligned} \quad (29)$$

เมื่อ $f(x) = o(g(x))$ เมื่อ $x \rightarrow a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ซึ่งหมายถึง $f(x)$

มีค่าน้อยกว่า $g(x)$ มากๆ เมื่อ x เข้าใกล้ a ดังนั้น $o(\delta^n) \rightarrow 0$ เมื่อ $\delta \rightarrow 0$ จึงสามารถตีความเป็นค่าความคลาดเคลื่อนในเทอมของ δ ที่มีกำลังสูงกว่า n เมื่อ δ เข้าใกล้ 0 ซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{p(t+\delta) - p(t)}{\delta} = -h(t) + [p(t) - h(t)\delta]\rho(t) + \frac{o(\delta)}{\delta} \quad (30)$$

ถ้าให้ $\delta \rightarrow 0$ จะได้

$$\frac{dp(t)}{dt} = \rho(t)p(t) - h(t) \quad (31)$$





เพื่อความสะดวกกำหนดสัญลักษณ์ $[a_1, \dots, a_n]$ แทนเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จากแบบจำลองการจ่ายชำระหนี้สินเชื่อ 1 รายการ ตามสมการ (31) ดังนั้นจะได้แบบจำลองการจ่ายชำระหนี้ของรายการของสินเชื่อขนาด n (รายการ) อธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ใน $\mathbb{R}^n$ ดังนี้

$$\frac{dp(t)}{dt} = \rho(t)p(t) - h(t) \quad (32)$$

เมื่อ $p(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]$ แทนรายการของเงินต้นคงเหลือที่เวลา t ใดๆ
 $\rho(t) = \text{diag}\{\rho_1(t), \dots, \rho_n(t)\}$ แทนเมทริกซ์ของอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง
 $h(t) = [h_1(t), \dots, h_n(t)]$ แทนการลดลงของเงินต้น หรือ อัตราการจ่ายชำระคืน
 T_i แทนอายุของสัญญาการจ่ายชำระหนี้ สัญญาที่ $i = 1, \dots, n$ และ
 $T = \max_i T_i$ ซึ่งจะเป็นเวลาที่น้อยที่สุดที่จ่ายชำระหนี้ ครบทุกสัญญา

พิจารณสมการ (32) เมื่อคูณ $e^{-\int_0^t \rho(s)ds}$ ทั้ง 2 ข้างของสมการจะได้

$$e^{-\int_0^t \rho(s)ds} dp(t) - e^{-\int_0^t \rho(s)ds} \rho(t)p(t)dt = -e^{-\int_0^t \rho(s)ds} h(t)dt \quad (33)$$

ซึ่งสามารถลดรูป และอินทิเกรตตั้งแต่เวลา 0 ถึง k ใดๆ ได้เป็น

$$\int_0^k d \left(e^{-\int_0^t \rho(s)ds} p(t) \right) = - \int_0^k e^{-\int_0^t \rho(s)ds} h(t)dt \quad (34)$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยของแบบจำลองชำระหนี้ในรูป

$$p(k) = e^{\int_0^k \rho(s)ds} p_0 - \int_0^k e^{\int_t^k \rho(s)ds} h(t)dt \quad (35)$$

$$\text{เมื่อ } e^{\int_0^k \rho(s)ds} = e^{\text{diag}\left\{\int_0^k \rho_1(s)ds, \dots, \int_0^k \rho_n(s)ds\right\}} = \text{diag}\left\{e^{\int_0^k \rho_1(s)ds}, \dots, e^{\int_0^k \rho_n(s)ds}\right\}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $\rho(t) = \text{diag}\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ และ $h(t) = [h_1, \dots, h_n]$ จะได้ หนี้คงเหลือที่เวลา k ใดๆ จะเท่ากับ

$$p(k) = \text{diag}\{e^{\rho_1 k}, \dots, e^{\rho_n k}\} p_0 - \int_0^k \text{diag}\{e^{\rho_1(k-t)}, \dots, e^{\rho_n(k-t)}\} [h_1, \dots, h_n] dt$$



$$\begin{aligned}
 &= \text{diag}\{e^{\rho_1 k}, \dots, e^{\rho_n k}\} p_0 - \left[\int_0^k h_1 e^{\rho_1(k-t)} dt, \dots, \int_0^k h_n e^{\rho_n(k-t)} dt \right] \\
 &= \left[e^{\rho_1 k} p_0 - \frac{h_1(e^{\rho_1 k} - 1)}{\rho_1}, \dots, e^{\rho_n k} p_0 - \frac{h_n(e^{\rho_n k} - 1)}{\rho_n} \right] \tag{36}
 \end{aligned}$$

และเมื่อมีการชำระหนี้เสร็จสมบูรณ์จะได้ $p(T) = 0$ นั่นคือ

$$e^{\rho_j T} p_0 = \frac{h_j(e^{\rho_j T} - 1)}{\rho_j} \quad \text{สำหรับทุก } j = 1, 2, \dots, n \tag{37}$$

นอกจากการประยุกต์ฟังก์ชันเมทริกซ์ในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของการจ่ายชำระหนี้ตามที่ได้อธิบายแล้ว ยังพบการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเมทริกซ์ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้านอื่นๆ เช่น ทางด้านคณิตศาสตร์การเงิน ทฤษฎีการควบคุม ปัญหาต่างๆ ทางฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น ซึ่งผู้อ่านสามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้ในบทความวิจัย บทความวิชาการ หรือหนังสือที่เกี่ยวข้อง อาทิ อ้างอิงรายการ [4-9 และเอกสารอ้างอิงภายในเล่ม]

5. สรุป

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอแนวคิดพื้นฐานในการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ ซึ่งมีลักษณะมีความเป็นนัยทั่วไปจากฟังก์ชันสเกลาร์ โดยเริ่มจากการนิยามฟังก์ชันของเมทริกซ์โดยใช้ฟังก์ชันที่ถูกขยายจากฟังก์ชันสเกลาร์ หลังจากนั้นได้นำสู่การนิยามของฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านรูปแบบบัญญัติจอร์แดนของฟังก์ชันที่นิยามบนสเปกตรัมของเมทริกซ์ใดๆ อย่างไรก็ตามการคำนวณค่าของฟังก์ชันเมทริกซ์ในรูปฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านรูปแบบบัญญัติจอร์แดนนั้นก็ยังมีความยุ่งยากอยู่ดี ในบทความนี้จึงได้นำเสนอการนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์ผ่านฟังก์ชันที่ถูกขยายจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสเกลาร์ ซึ่งจะมีประโยชน์มากในเรื่องของการประมาณค่าของฟังก์ชัน นอกจากนี้ในบทความนี้ได้ยกตัวอย่างการประยุกต์ในการสร้างแบบจำลองการจ่ายชำระหนี้ เพื่อให้ผู้อ่านเห็นถึงความเชื่อมโยงของทฤษฎีทางคณิตศาสตร์กับปัญหาทางโลกจริงมากขึ้น





6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ เป็นอย่างยิ่ง ที่เป็นแรงผลักดันและกำลังใจให้เกิดการสร้างสรรค์บทความทางวิชาการนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Constantinides, G. M. and Malliaris A. G., “Portfolio Theory,” Chapter 1 in R. Jarrow et al. Eds. Handbooks in OR & MS, vol. 9, 1995
- [2] F. R. Gantmacher, The Theory of matrices, New York: Chelsea publishing company, 1959.
- [3] Hong Sung Pyo, Chapter 8: Jordan Canonical Forms, from <http://math.postech.ac.kr/~sungpyo/LinearAlge-2007/Chap8.pdf>
- [4] J. W. Polderman and J. C. Willems, Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach, New York: Springer Verlag, 1998.
- [5] Jean-Philippe Bouchaud and Marc Potters, Financial Applications of Random Matrix Theory: a short review, from <http://math.postech.ac.kr/~sungpyo/LinearAlge-2007/Chap8.pdf>, 2009.
- [6] John H. Cochrane, Time Series for Macroeconomics and Finance, Chicago: University of Chicago, 1997.
- [7] Lawrence C. Evans, An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory, Berkeley: University of California, 1983.
- [8] Nicholas J. Higham, Function of Matrices: Theory and Computation, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [9] Wolfgang Ertel, Advanced Mathematics for Engineers, Hochschule Ravensburg-Weingarten University of Applied Sciences, 2008.





วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 62(692) May–Aug, 2017

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org>MathThaiOrg@gmail.com

อสมการแอร์ดิช-มอร์ดล

Erdős-Mordell Inequality

ภักคินี ชิตสกุล

Pakkinee Chitsakul

Retired Associate Professor
Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Chalongkrung Rd., Bangkok, 10520, Thailand

Email: jimreivat99@gmail.com

บทคัดย่อ

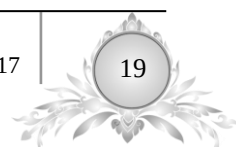
บทความนี้แสดงวิธีการพิสูจน์อสมการแอร์ดิช-มอร์ดล ซึ่งกล่าวว่าสำหรับสามเหลี่ยมใดๆ ที่มีจุดหนึ่งอยู่ภายในสามเหลี่ยมนั้นแล้ว ผลบวกของระยะตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของระยะจากจุดนั้นไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม โดยการใช้การพิสูจน์ของ คลาวดี แอลซินา และ โรเจอร์ บี เนลสัน ซึ่งตีพิมพ์ใน Forum Geometricorum V7(2007) 99-102 เป็นเอกสารอ้างอิงหลัก

คำสำคัญ: อสมการแอร์ดิช-มอร์ดล ด้านตรงข้ามมุมฉาก สามเหลี่ยมคล้าย

ABSTRACT

The article shows the proof of Erdős-Mordell inequality for any triangle, there exist a point inside the triangle which the sum of the orthogonal projection from the point to all three sides is less than or equal to half of the sum of the distance from the point to the three vertices of the triangle. The proof is based on the work of Claudi Alsina and Roger B. Nelson which published in Forum Geometricorum V7(2007) 99-102.

Keywords: Erdős-Mordell Inequality, Hypotenuse, Similar Triangle





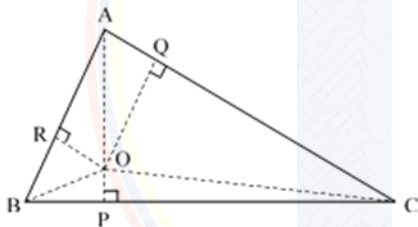
1. บทนำ

ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ให้ O เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$ ซึ่ง OP OQ และ OR ตั้งฉากกับด้าน BC CA และ AB ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

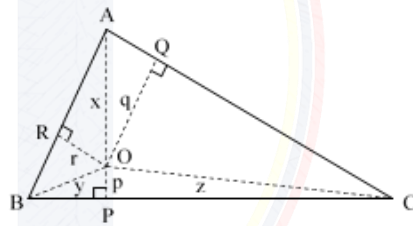
$$OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR) \text{ (รูปที่ 1)}$$

ปัญหานี้ พอล แอร์ดิช แห่งมหาวิทยาลัยแมนเชสเตอร์ สหราชอาณาจักร ได้นำเสนอใน American Mathematical Monthly ในปี 1935 [1] และ แอล ที่มอร์เดล ร่วมกับ ดี เอฟ แบร์โรว์ ได้แสดงวิธีการพิสูจน์โดยนำเสนอใน American Mathematical Monthly ในปี 1937 [2] ถ้าแทนความยาวของเส้นตรง OP OQ และ OR ด้วย p q และ r ตามลำดับ และแทนความยาวของเส้นตรง OA OB และ OC ด้วย x y และ z ตามลำดับ ดังรูปที่ 2 แล้ว อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$x + y + z \geq 2(p + q + r)$$



รูปที่ 1 $\triangle ABC$ มี OP OQ และ OR ตั้งฉากด้าน BC CA และ AB



รูปที่ 2 x y z และ p q r ในอสมการแอร์ดิช-มอร์เดล

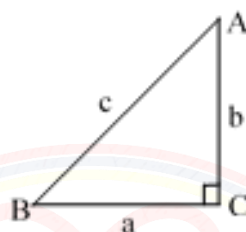
ในบทความนี้แสดงการพิสูจน์อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล โดยใช้วิธีการพิสูจน์ของ คลาวดี แอลชินา ร่วมกับ โรเจอร์ บี เนลสัน ซึ่งนำเสนอใน Forum geometricum ในปี 2007 [3]

2. ด้านตรงข้ามมุมฉาก

บทตั้ง 1 ในสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด



- สิ่งที่กำหนดให้ 1. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\hat{C} = 90^\circ$
2. ให้ a b และ c เป็นความยาวของด้านที่รองรับ $\hat{A}$ $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ตามลำดับดังรูปที่ 3 เรียก c ว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก เรียก a และ b ว่าด้านประกอบมุมฉาก



รูปที่ 3 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทตั้ง 1

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $c \geq a$ และ $c \geq b$

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$	1. ผลบวกของมุมภายในทุกมุมของสามเหลี่ยมมีค่า 180°
2. $\hat{C} = 90^\circ$	2. กำหนดให้
3. $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$	3. จาก 1 และ 2
4. $0 \leq \hat{A} \leq 90^\circ$ และ $0 \leq \hat{B} \leq 90^\circ$	4. จาก 3
5. $0 \leq \sin A \leq 1$ และ $0 \leq \sin B \leq 1$	5. จาก 4 ดำเนินการหาค่าไซน์
6. $\sin A = \frac{a}{c}$ และ $\sin B = \frac{b}{c}$	6. นิยามไซน์จากรูปที่ 3
7. $0 \leq \frac{a}{c} \leq 1$ และ $0 \leq \frac{b}{c} \leq 1$	7. จาก 5 และ 6
8. $a \leq c$ หรือ $c \geq a$ $b \leq c$ หรือ $c \geq b$	8. จาก 7



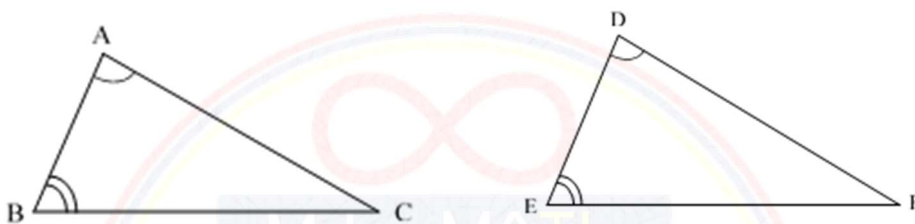


3. สามเหลี่ยมคล้าย

บทตั้ง 2 สามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมภายในสองมุมเท่ากันมุมต่อมุมแล้วสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นสามเหลี่ยมคล้าย และการอ้างอิงบทตั้งนี้จะใช้ว่า มุม-มุม

สิ่งที่กำหนดให้ 1. ให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ สองรูป

2. ให้ $\hat{A} = \hat{D}$ และ $\hat{B} = \hat{E}$ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทตั้ง 2

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$	1. ผลบวกของมุมภายในทุกมุมของสามเหลี่ยมมีค่า 180°
2. $\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$	2. ในทำนองเดียวกับ 1
3. $\hat{A} = \hat{D}$ และ $\hat{B} = \hat{E}$	3. กำหนดให้
4. $\hat{C} = \hat{F}$	4. จาก 1 2 และ 3
5. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	5. จาก 1 2 และ 3





4. อสมการที่ช่วยในการพิสูจน์อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล
บทตั้ง 3 สำหรับ $\triangle ABC$ ดังรูปที่ 2 อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$ax \geq br + cq$$

$$by \geq ar + cp$$

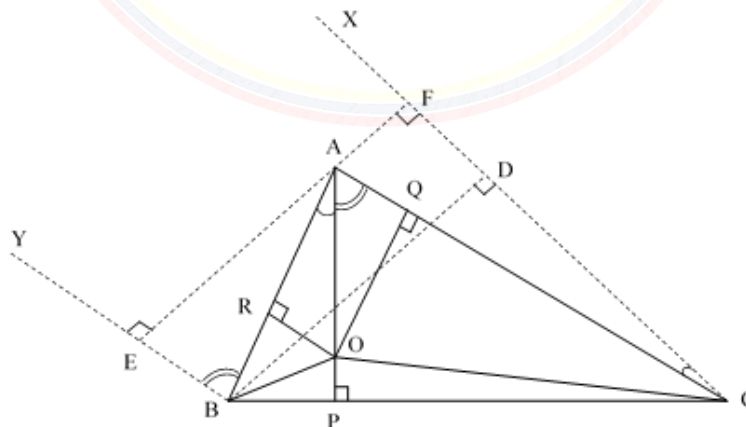
$$cz \geq aq + bp$$

- สิ่งที่กำหนดให้
1. ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี a b และ c เป็นความยาวของด้าน BC CA และ AB ตามลำดับ
 2. ให้ O เป็นจุดใดๆ ภายใน $\triangle ABC$
 3. ให้ $OP \perp BC$ $OQ \perp CA$ และ $OR \perp AB$
 4. ให้ p q และ r เป็นความยาวของ OP OQ และ OR ตามลำดับ
 5. ให้ x y และ z เป็นความยาวของ OA OB และ OC ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $ax \geq br + cq$

สำหรับการพิสูจน์ $by \geq ar + cp$ และ $cz \geq aq + bp$ สามารถดำเนินการได้ในทำนองเดียวกัน

สร้างเพื่อการพิสูจน์



รูปที่ 5 สร้างเพื่อการพิสูจน์สำหรับบทตั้ง 3





1. ลาก CX ให้ $\widehat{OAB} = \widehat{ACX}$
2. ลาก BY ให้ $\widehat{OAC} = \widehat{ABY}$
3. ลาก $AF \perp CX$ ที่ F
4. ลาก $AE \perp BY$ ที่ E
5. ลาก $BD \perp CF$ ที่ D ดังรูปที่ 5

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\widehat{OAR} = \widehat{ACF}$	1. สร้างเพื่อการพิสูจน์
2. $\widehat{ORA} = \widehat{AFC}$	2. กำหนดให้แต่ละมุมมีค่า 90°
3. $\triangle OAR \sim \triangle AFC$	3. มุม-มุม จาก 1 และ 2
4. $\frac{OA}{AC} = \frac{OR}{AF}$	4. จาก 3 สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนความยาวของด้านที่สมนัยกันทุกคู่ เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน
5. $\triangle OQA \sim \triangle AEB$	5. ในทำนองเดียวกับ 3 ($\widehat{OAQ} = \widehat{ABY}$ และ $\widehat{OQA} = \widehat{AEB} = 90^\circ$)
6. $\frac{OA}{AB} = \frac{OQ}{AE}$	6. จาก 5 ในทำนองเดียวกับ 4
7. $\widehat{OAR} + \widehat{ORA} + \widehat{AOR} = 180^\circ$	7. มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันมีค่า 180° ($\triangle OAR$)
8. $\widehat{OAR} + \widehat{AOR} = 90^\circ$	8. จาก 7 เมื่อ $\widehat{ORA} = 90^\circ$
9. $\widehat{AOR} = \widehat{CAF}$	9. จาก 3 มุมที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมคล้าย
10. $\widehat{OAR} + \widehat{CAF} = 90^\circ$	10. จาก 8 และ 9
11. $\widehat{OAQ} + \widehat{BAE} = 90^\circ$	11. ในทำนองเดียวกับ 10
12. $\widehat{BAE} + \widehat{OAR} + \widehat{OAQ} + \widehat{CAF} = 180^\circ$	12. จาก 10 และ 11 รวมกัน





13. $EF = AE + AF$	13. จาก 12 มุม 180° คือมุมบนเส้นตรง
14. $EF \perp CX$ และ $EF \perp BY$	14. จาก 13 และสร้างเพื่อการพิสูจน์
15. $\widehat{FEB} + \widehat{EFC} = 180^\circ$	15. จาก 14
16. $CX \parallel BY$ มี EF เป็นเส้นตัดขวาง	16. สมบัติของเส้นขนาน ผลบวกของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นตรงสองเส้นมีค่ารวมกัน 180° แล้วเส้นตรงสองเส้นขนานกัน
17. $\widehat{BDC} = 90^\circ$, $\widehat{EFC} = 90^\circ$	17. สร้างเพื่อการพิสูจน์
18. $EF \parallel BD$ มี CX เป็นเส้นตัดขวาง	18. จาก 14 สมบัติของเส้นขนาน มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นตรงสองเส้นมีค่าเท่ากัน แล้วเส้นตรงสองเส้นขนานกัน
19. $EF = BD$	19. จาก 16 ระยะตั้งฉากระหว่างเส้นคู่ขนานมีค่าคงที่ ($CX \parallel BY$)
20. $BC \geq BD$	20. จากบทตั้ง 1 เมื่อ $\triangle BDC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\widehat{BDC}$ เป็นมุมฉาก และ BC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก
21. $BC \geq EF$	21. จาก 19 และ 20
22. $OA \cdot AF = OR \cdot AC$	22. จาก 4
23. $OA \cdot AE = OQ \cdot AB$	23. จาก 6
24. $OA (AF + AE) = OR \cdot AC + OQ \cdot AB$	24. นำ 22 และ 23 บวกกัน
25. $OA \cdot EF = OR \cdot AC + OQ \cdot AB$	25. จาก 13 และ 24
26. $OA \cdot BC \geq OA \cdot EF$	26. จาก 21





$$27. OA \cdot BC \geq OR \cdot AC + OQ \cdot AB$$

$$\text{หรือ } ax \geq br + cq$$

27. จาก 25 และ 26

5. อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล

ทฤษฎีหลัก ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี O เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม p, q และ r เป็นระยะตั้งฉากจากจุด O ไปยังด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม xy และ z เป็นระยะจากจุด O ไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมแล้ว $x + y + z \geq 2(p + q + r)$
พิสูจน์ สำหรับ $a > 0, b > 0$ และ $c > 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นความยาวของด้านที่รองรับ $\hat{A}, \hat{B}$ และ $\hat{C}$ ของ $\triangle ABC$ ตามลำดับ จะได้

$$(a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2 \geq 0$$

$$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

จัดสมการใหม่จะได้สมการ ดังนี้

$$a^2 + c^2 \geq 2ac$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

หรือ

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2 \quad (1)$$

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2 \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (3)$$

จากบทตั้ง 3

$$ax \geq br + cq$$

$$by \geq ar + cp$$

$$cz \geq aq + bp$$





$$\text{จัดสมการใหม่ จะได้} \quad x \geq \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}q \quad (4)$$

$$y \geq \frac{a}{b}r + \frac{c}{b}p \quad (5)$$

$$z \geq \frac{a}{c}q + \frac{b}{c}p \quad (6)$$

นำ (4) + (5) + (6) จะได้

$$x + y + z \geq \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)r + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)p \quad (7)$$

จาก (1), (2), (3) จะได้

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)r + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)p \geq 2(r+q+p)$$

ดังนั้น

$$x + y + z \geq 2(r + p + q)$$

หรือ

$$r + p + q \leq \frac{1}{2}(x + y + z)$$

6. กรณีเท่ากันในอสมการแอร์ดิช-มอร์เดล

บทแทรก ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มี O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ลาก AO , BO และ CO ไปตัด BC , CA และ AB ที่ P , Q และ R ตามลำดับ

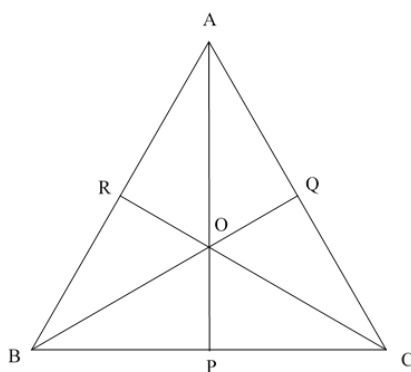
จงพิสูจน์ว่า

1. OP , OQ และ OR ตั้งฉากกับ BC , CA และ AB ตามลำดับ
2. $AO + BO + CO = 2(OP + OQ + OR)$

สิ่งที่กำหนดให้

1. $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
2. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$
3. ลาก AO , BO และ CO ไปตัด BC , CA และ AB ที่ P , Q และ R ตามลำดับ ดังรูปที่ 6





รูปที่ 6 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทแทรก

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

1. $OP \perp BC$, $OQ \perp CA$ และ $OR \perp AB$
2. $AO + BO + CO = 2(OP + OQ + OR)$

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $BO = CO$	1. รัศมีของวงกลมเดียวกันย่อมเท่ากัน
2. $AB = AC$	2. ด้านของ $\triangle ABC$ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
3. $\triangle AOB \cong \triangle AOC$	3. ด้าน – ด้าน – ด้าน จาก 1, 2 และมี AO เป็นด้านร่วม
4. $\angle OAB = \angle OAC$	4. จาก 3 มุมในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการย่อมเท่ากัน
5. $\angle ABP = \angle ACP$	5. มุมของ $\triangle ABC$ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
6. $\triangle ABP \cong \triangle ACP$	6. มุม – ด้าน – มุม จาก 4, 2 และ 5
7. $BP = CP$	7. จาก 6 ด้านในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการย่อมเท่ากัน
8. $\angle APB = \angle APC$	8. จาก 6 มุมในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการย่อมเท่ากัน





9. $\hat{A}PB + \hat{A}PC = 180^\circ$	9. เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง มุมประชิดรวมกันมีค่า 180° (เส้นตรง AP ตั้งอยู่บนเส้นตรง BC ณ จุด P)
10. $\hat{A}PB = \hat{A}PC = 90^\circ$	10. จาก 8 และ 9
11. $OP \perp BC$	11. จาก 10
12. $OQ \perp CA$ $OR \perp AB$	12. ในทำนองเดียวกับ 11
13. $\hat{A}PB = \hat{A}QO = 90^\circ$	13. จาก 11 และ 12
14. $\triangle ABP \sim \triangle AOQ$	14. มุม – มุม จาก 4 และ 13
15. $\frac{AB}{AO} = \frac{BP}{OQ}$	15. จาก 14 ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมคล้ายเป็นสัดส่วนเท่ากัน
16. $BP + CP = BC$	16. ให้ P เป็นจุดบน BC
17. $BC = AB$	17. ด้านของ $\triangle ABC$ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
18. $BP = \frac{1}{2}AB$	18. จาก 7, 16 และ 17
19. $AO = 2OQ$	19. จาก 15 และ 18
20. $BO = 2OR$ $CO = 2OP$	20. ในทำนองเดียวกับ 19
21. $AO + BO + CO = 2(OP + OR + OQ)$	21. จาก 19 และ 20

7. บทสรุป

อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล สำหรับสามเหลี่ยมใดๆ ที่มีจุดหนึ่งจุดอยู่ภายในสามเหลี่ยมนั้นแล้ว ผลบวกของระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมมากกว่า หรือ เท่ากับสองเท่าของระยะตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังด้านทั้ง





สามของสามเหลี่ยม โดยกรณีเท่ากันจะเป็นจริงเมื่อ สามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า และจุดหนึ่งจุดภายในสามเหลี่ยมด้านเท่าต้องเป็นศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

วิธีการที่ใช้ในการพิสูจน์สมการแอร์ดิช-มอร์ดล ที่นำเสนอในบทความนี้เป็นวิธีการที่ใช้ความรู้ทางเรขาคณิต และพีชคณิตที่ไม่ซับซ้อน ง่ายแก่การทำความเข้าใจ สำหรับการพิสูจน์ที่แตกต่างไปจากวิธีที่นำเสนอ ผู้สนใจสามารถศึกษาจาก [4] และ [5]

เอกสารอ้างอิง

- [1] Paul Erdős, “American Mathematical Monthly,” *Problem 3740*, vol. 42, pp. 396, 1935.
- [2] Mordell L. J. and Barrow D. F., “American Mathematical Monthly,” *Solution to 3740*, vol. 44, pp. 252-254, 1937.
- [3] Claudi Alsina and Roger B. Nelsen, “Forum Geometricorum,” *A Visual Proof of the Erdős-Mordell Inequality*, vol. 7, pp. 99-102, 2007.
- [4] Michigan Math J., “The Michigan Mathematical Journal,” *A Simple Proof of the Erdős-Mordell Inequality for Triangles*, vol. 4, pp. 97-98, 1957.
- [5] Jian Liu, “International Electronic Journal,” *A New Proof of the Erdős-Mordell Inequality*, vol. 4, no. 2, pp. 114-119, 2011.





วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 62(692) May–Aug, 2017

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org>MathThaiOrg@gmail.com

การใช้ตัวแบบเชิงเส้นวางนัยทั่วไปในการประมาณ ค่าเบี้ยประกันภัยรถยนต์

Using Generalized Linear Models to Estimate Pure Premium for Motor Insurance

ชนกนัต สุขประยูร ตวงพร พัฒนบัณฑิต ภัทรพงศ์ สุกุลวโรภาส

และ อุไรวรรณ เจริญกীরติกุล

Chanoknat Sukprayoon¹ Tuangporn Pattanabandit² Puttharapong Sakulwaropas³
and Uraiwan Jaroengertikun⁴¹⁻⁴Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science,
King Mongkut's University of Technology North Bangkok,
Bangsue, Bangkok 10800, ThailandEmail: ³tojob8445@gmail.com ⁴uraiwan.j@sci.kmutnb.ac.th

บทคัดย่อ

ในธุรกิจประกันวินาศภัย การกำหนดราคาเบี้ยประกันภัยที่เหมาะสมและเพียงพอต่อความเสี่ยงที่บริษัทสามารถรับไว้ได้ถือเป็นหัวใจสำคัญในการบริหารจัดการความเสี่ยง วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อประยุกต์ใช้ตัวแบบเชิงเส้นวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าเบี้ยประกันภัยแท้จริงในการประกันภัยรถยนต์ โดยใช้ข้อมูลกรมธรรม์รถยนต์ประเภทชั้น 1 ของบริษัทประกันแห่งหนึ่งในประเทศไทย ซึ่งพบว่ามีค่าส่วน ลด-เพิ่ม จากประวัติการเรียกร้องสินไหมทดแทน (NCB) และลักษณะการใช้งาน (Car Code) ที่มีผลกระทบต่อค่าเบี้ยประกันภัยแท้จริง ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

คำสำคัญ: เบี้ยประกันภัยแท้จริง ตัวแบบเชิงเส้นวางนัยทั่วไป ปัจจัยเสี่ยง ตัวแบบถดถอย





ABSTRACT

In casualty business, the optimal premium pricing and adequate cost for an insurance company is important in risk management. The aim of this research was to study in the application of generalized linear models to estimate pure premium for motor insurance. In this study, the data set was the claim of comprehensive motor insurance, which was provided by one of the insurance company in Thailand. The results of this study show that the risk factors significantly related to pure premium at the 0.05 level consisted of no claim bonus (NCB) and use of motor vehicle (Car Code).

Keywords: Pure Premium, Generalized Linear Models, Risk Factor, Regression Model

1. บทนำ

ในธุรกิจประกันวินาศภัย บริษัทประกันภัยทุกบริษัทต้องมีการกำหนดเบี้ยประกันภัย (Insurance Premium) หรือพิกัดที่เหมาะสมและเพียงพอต่อความเสี่ยงที่บริษัทสามารถรับไว้ได้ซึ่งผู้เอาประกันภัย (Insured) ชำระค่าเบี้ยประกันภัยให้กับบริษัทประกันภัย (Insurer) เพื่อได้รับความคุ้มครองความเสี่ยงภัย การกำหนดเบี้ยประกันภัยจำเป็นต้องใช้ข้อมูลที่เคยเกิดขึ้นจริงในอดีตมาทำการวิเคราะห์และใช้วิธีการทางสถิติเพื่อคาดการณ์เบี้ยประกันภัยที่เหมาะสมในอนาคตซึ่งเป็นรายรับหลักของบริษัทที่เก็บจากผู้เอาประกันภัย จากสถิติที่เกิดขึ้นของผู้เอาประกันภัยแต่ละรายหรือเรียกว่าหน่วยเสี่ยงภัย (Exposure Unit) มีความแตกต่างกัน ดังนั้นกำหนดค่าเบี้ยประกันภัยให้มีความเพียงพอกับความเสี่ยงภัยที่อาจจะเกิดขึ้นในอนาคตจึงต้องคำนึงถึงประสบการณ์การเกิดภัยของหน่วยเสี่ยงภัยหรือตัวแปรปัจจัยเสี่ยง (Risk Factor) และถ้าบริษัทสามารถทราบถึงปัจจัยเสี่ยงที่มีผลกระทบกับค่าเบี้ยประกันภัยและตัวแบบการคำนวณค่าประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริง (Pure Premium) ที่เหมาะสมและมีความพอเพียงกับความเสี่ยงภัยที่บริษัทรับความเสี่ยงซึ่งจะเป็นสารสนเทศสำคัญให้กับบริษัทประกันภัยใช้กำหนดค่าเบี้ยประกันภัยในอนาคตได้ โดยปกติเบี้ยประกันภัยแท้จริงประกอบด้วย จำนวนครั้ง

(Claim Frequency) และมูลค่าความเสียหาย (Claim Cost or Claim Amount) ที่เกิดการเรียกร้องสินไหมทดแทนซึ่งในทางประกันภัยจะมีลักษณะเป็นการแจกแจงที่ไม่เป็นการแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

จากปัญหาและความสำคัญข้างต้น ในด้านคณิตศาสตร์ประกันภัยจึงได้มีผู้ที่ศึกษาและพัฒนาตัวแบบตัวแปรปัจจัยเสี่ยงและตัวแบบเชิงเส้นวางนัยทั่วไป (Generalized Linear Models: GLMs) เป็นวิธีการทางสถิติที่นำไปประยุกต์ใช้ในงานด้านการประกันภัย เช่น [1] ได้ศึกษา GLMs ในการประมาณความน่าจะเป็นของการเกิดความเสียหายในการประกันภัยรถยนต์เพื่อประมาณเบี้ยประกันภัย ซึ่งต่อมา [2-4] ได้ใช้หลักวิธีการของ GLMs ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างตัวแบบความเสี่ยงโดยเฉพาะในการประกันวินาศภัย แล้วในปี ค.ศ. 2015 [5] ได้พัฒนาวิธีการคำนวณค่าเบี้ยประกันภัยในข้อมูลการประกันภัยรถยนต์ของประเทศฝรั่งเศส ที่เริ่มสัญญาประกันภัยในปี 2009 โดยใช้ GLMs ในการวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งทำให้ได้ทราบถึงปัจจัยเสี่ยงที่มีผลกระทบต่อเบี้ยประกันภัยแท้จริง

ในงานวิจัยนี้ใช้การวิเคราะห์ GLMs เพื่อคำนวณหาค่าเบี้ยประกันภัยแท้จริงที่เหมาะสมและเพียงพอกับความเสียหายในอนาคตที่บริษัทประกันภัยควรเรียกจากผู้เอาประกันภัยแต่ละรายอย่างเป็นธรรมและข้อมูลที่นำมาศึกษาเป็นข้อมูลกรมธรรม์การประกันภัยรถยนต์ประเภทชั้น 1 ของบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งในประเทศไทย ซึ่งข้อมูลกรมธรรม์ประเภทรถยนต์นั้น ที่เริ่มสัญญาในปี พ.ศ.2550 ระยะเวลาสัญญา 1 ปีจำนวน 26,959 กรมธรรม์

2. วิธีการวิจัย

การวิจัยนี้ใช้ตัวแปรปัจจัยเสี่ยงที่จะศึกษาเป็นตามปัจจัยเสี่ยงภายใต้ข้อกำหนดเงื่อนไขพระราชบัญญัติประกันวินาศภัย พ.ศ.2535 ที่ได้กำหนดตัวแปรที่ใช้ศึกษาและมีลักษณะข้อมูลเบื้องต้นจากตารางข้อมูลพื้นฐานของหน่วยเสี่ยงภัยดังนี้





ตารางที่ 1 ตารางลักษณะเบื้องต้นของข้อมูลที่ใช้ในงานวิจัย

ส่วนของข้อมูลที่เป็นแบบกลุ่ม			
ปัจจัย	ตัวแปร (X)	คำอธิบาย	ร้อยละของ หน่วยเสี่ยงภัย
1.ลักษณะการ ใช้งาน	-Car Code110 (base) -Car Code120	การใช้ส่วนบุคคล (รหัส110) การใช้เพื่อการพาณิชย์ (รหัส 120)	94.63% 5.37%
2.กลุ่มรถยนต์ จำแนกตาม ยี่ห้อและรุ่น	-Car Group1 -Car Group2 -Car Group3 (base) -Car Group4 -Car Group5	กลุ่มที่ 1 กลุ่มที่ 2 กลุ่มที่ 3 กลุ่มที่ 4 กลุ่มที่ 5	0.11% 2.33% 67.19% 10.87% 19.50%
ส่วนของข้อมูลที่เป็นค่าตัวเลข			
ปัจจัย	ตัวแปร (X)	คำอธิบาย	ค่าเฉลี่ย (ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน)
1.ขนาด เครื่องยนต์	CC		2,243.44 (581)
2.จำนวนที่นั่ง	Seat		6.74 (0.68)
3.ทุนเอา ประกันภัย	Sum Insured		654,762.90 (382,865)
4.ค่าส่วน ลด-เพิ่ม จาก ประวัติการ เรียกร้อง สินไหม ทดแทน	NCB (No Claim Bonus)	หน่วยเป็นร้อยละของเบี้ยประกันภัย มีค่าส่วนลดเพิ่มที่ละ 5% ของเบี้ย ประกันภัย -กรณีส่วนเพิ่มเบี้ยประกันภัยจะมีค่า เป็นจำนวนลบ -กรณีส่วนลดเบี้ยประกันภัยจะมีค่า เป็นจำนวนบวก	11.95 (17)
5.เบี้ย ประกันภัยสุทธิ	Net Premium	หน่วยเป็นบาท ตั้งแต่ 1000 บาทขึ้นไป	17,707.81 (7,470)

การวิเคราะห์ GLMs ในการศึกษาตัวแปรปัจจัยเสี่ยงที่มีผลกระทบกับเบี้ยประกันภัยและตัวแบบการประมาณค่าเบี้ยประกันภัยนั้นจะพิจารณาทั้งตัวแบบการประมาณจำนวนครั้งการเรียกร้องสินไหมทดแทนและตัวแบบการประมาณมูลค่าสินไหมทดแทนด้วยวิธีการวิเคราะห์ตัวแบบถดถอยทวินามลบ (Negative Binomial Regression Model) [6] และตัวแบบถดถอยแกมมา (Gamma Regression Model) ตามลำดับ โดยจะเริ่มคัดเลือกปัจจัยเสี่ยงด้วยการวิเคราะห์ตัวแปรปัจจัยเดียว (Univariate Analysis) ที่ระดับนัยสำคัญ (Significance Level) 0.25 [7] และนำตัวแปรปัจจัยเสี่ยงที่คัดเลือกได้ไปวิเคราะห์โดยใช้การวิเคราะห์หลายตัวแปร (Multivariate Analysis) ด้วยวิธีลบตัวแปร (Backward Elimination) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ซึ่งในการศึกษานี้จะใช้โปรแกรม R ในการวิเคราะห์และประมวลผล

2.1 ตัวแบบเชิงเส้นวางนัยทั่วไป (GLMs)

[8] ได้คิดค้นและนำ GLMs ไปใช้ในตัวแบบคณิตศาสตร์ประกันภัย ซึ่ง GLMs จะเป็นการศึกษาตัวแปรตาม (Dependent Variable: Y) ที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรปัจจัยเสี่ยง (X) โดยที่ Y มีการแจกแจงอยู่ในกลุ่มวงศ์เลขชี้กำลัง (Exponential Family) ซึ่งมีฟังก์ชันเชื่อมโยง (Link Function) แทนด้วย η ในรูปความสัมพันธ์เชิงเส้นกับ X ดังนี้

$$\eta = XB \quad (1)$$

โดยที่ X คือเมตริกซ์ของปัจจัยเสี่ยงและ B เวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์การถดถอยของปัจจัยเสี่ยง ที่ประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)

การคำนวณเบี้ยประกันภัยแท้จริงจะพิจารณาจำนวนครั้งการเรียกร้องสินไหมทดแทน (N) และมูลค่าสินไหมทดแทน (C) ซึ่งให้เป็นอิสระต่อกัน จึงได้สมการคำนวณค่าเบี้ยประกันภัยแท้จริง ดังนี้

$$E(\sum_{k=1}^{N_i} C_{ik}) = E(N_i)E(C_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, 26959 \quad (2)$$

ในงานวิจัยนี้ใช้ GLMs ในการวิเคราะห์ โดยผลการวิเคราะห์จะเป็นสารสนเทศเพื่อใช้ประกอบการตัดสินใจให้กับผู้ปฏิบัติงานที่เกี่ยวข้องในสายงาน



ธุรกิจประกันวินาศภัย ซึ่งในทางปฏิบัติไม่ต้องใช้กระบวนการที่ซับซ้อนที่อาจทำให้เกิดต้นทุนที่สูงเกินความจำเป็นของบริษัท

ดังนั้น การศึกษาตัวแบบ N และ C ของงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้การแจกแจงของทั้งสองตัวแบบให้เป็นรูปแบบทั่วไปที่ใช้ในสายงานธุรกิจประกันวินาศภัย นั่นคือ ให้ $E(N)$ อยู่ในตัวแบบถดถอยแบบทวินามลบ และ $E(C)$ อยู่ในตัวแบบถดถอยแบบแกมมา ซึ่งทั้งสองตัวแบบมีฟังก์ชันการเชื่อมโยงเป็น Log-Link function ดังนี้

$$\ln(\mu) = \beta^t x$$

$$\mu = \exp(\beta^t x) \quad \mu \text{ คือ } E(N) \text{ หรือ } E(C) \quad (3)$$

โดยที่ β คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยของปัจจัยเสี่ยงที่มีผลกระทบต่อ μ และ x คือ เวกเตอร์ของปัจจัยเสี่ยง

จากสมการที่ (2) ใช้ GLMs ในการประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริงได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} E(\sum_{k=1}^{N_i} C_{ik}) &= E(N_i)E(C_i) = \exp(\beta_{freq}^t x_i) \exp(\beta_{cost}^t x_i) \\ &= \exp((\beta_{freq} + \beta_{cost})^t x_i) \end{aligned} \quad (4)$$

โดยที่ β_{freq} คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยของปัจจัยเสี่ยงที่มีผลกระทบต่อน N และ β_{cost} คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยของปัจจัยเสี่ยงที่มีผลกระทบต่อน C

3. ผลการวิจัย

จากผลการวิจัย พบว่ามีปัจจัยเสี่ยง NCB และ Car Code ที่มีผลกระทบต่อนเบี้ยประกันภัยแท้จริง โดยที่ Car Code เป็นปัจจัยเสี่ยงเดียวเท่านั้นที่มีผลกระทบต่อมูลค่าสินไหมทดแทน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเมื่อให้ค่าตัวแปรปัจจัยเสี่ยงอื่นๆ คงที่ในตัวแบบประมาณค่าเบี้ยประกันภัยแท้จริง ค่าปัจจัยเสี่ยง NCB มีค่าเปลี่ยนแปลง 1 หน่วย (ได้รับส่วนเพิ่ม 5% ของเบี้ยประกันภัย) จะส่งผลกระทบให้ค่าประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริงมีค่าเป็น $e^{-0.0052(1)} = 0.995$ ซึ่งหมายความว่า จะมีค่าเบี้ยประกันภัยแท้จริงลดลง 0.5% และในส่วนปัจจัยเสี่ยง Car Code 120 เมื่อให้ค่าตัวแปรปัจจัยเสี่ยงอื่นๆ คงที่ในตัวแบบค่าประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริง จะส่งผลกระทบให้ค่าประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริงมีค่าเป็น $e^{0.0638(1)} = 1.066$



เปรียบเทียบกับกลุ่ม Car Code110 นั่นคือ กรมธรรม์ในกลุ่ม Car Code120 จะต้องจ่ายเบี้ยประกันภัยแท้จริงมากกว่ากรมธรรม์ในกลุ่ม Car Code110 เท่ากับ 6.6% และค่าจากตารางที่ 2 จะได้ตัวแบบประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริง ดังนี้

$$E(\sum_{k=1}^{N_i} C_{ik}) = e^{9.4969 - 0.0052x_{NCB_i} + 0.0638x_{Car\ Code120_i}}$$

ตารางที่ 2 ผลการวิเคราะห์ GLMs กับการประมาณค่าเบี้ยประกันภัยแท้จริง

ปัจจัยเสี่ยง		Intercept	NCB	Car Code120
ตัวแบบถดถอย ทวินามลบ	$\hat{\beta}_{freq}$	0.0491	-0.0009	0.0638
	$SE(\hat{\beta}_{freq})$	0.0076	0.0004	0.0222
	z-value	6.48	-2.60	2.87
	p-value	<.0500	<.0500	<.0500
ตัวแบบถดถอย แกมมา	$\hat{\beta}_{cost}$	9.4478	-0.0043	-
	$SE(\hat{\beta}_{cost})$	0.0260	0.0012	-
	t-value	362.91	-3.44	-
	p-value	<.0500	<.0500	-
ตัวแบบเบี้ย ประกันภัยแท้จริง	$\hat{\beta}_{freq} + \hat{\beta}_{cost}$	9.4969	-0.0052	0.0638

จากตัวแบบในข้างต้น สามารถประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริง ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ จากข้อมูลในรายการกรมธรรม์ ผู้เอาประกันภัย มีค่า NCB เท่ากับ 35% และใช้รถยนต์เพื่อการพาณิชย์ (Car Code120) จะได้ค่าประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริงรายปีที่ต้องจ่ายให้บริษัทประกันภัย คือ

$$E(\sum_{k=1}^{N_i} C_{5k}) = e^{9.4969 - 0.0052(7) + 0.0638(1)} = 12,924.50 \text{ บาท}$$

4. สรุปผล

การใช้ GLMs ในการประมาณค่าเบี้ยประกันภัยรถยนต์ ซึ่งจากการวิเคราะห์ GLMs กับข้อมูลการประกันภัยรถยนต์ประเภทชั้น 1 ของบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งในประเทศไทย จะได้สมการดังนี้





$$E(\sum_{k=1}^{N_i} C_{ik}) = e^{9.4969 - 0.0052x_{\text{NCB}_i} + 0.0638x_{\text{Car Code120}_i}}$$

ซึ่งมีเพียงปัจจัยเสี่ยง NCB และ Car Code ที่มีผลกระทบต่อค่าประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริง ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ดังนั้นการกำหนดค่าเบี้ยควรคำนึงถึงปัจจัยดังกล่าว ซึ่งผลการศึกษาจะเป็นแนวทางให้กับบริษัทประกันภัยนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลที่รับความเสี่ยงเพื่อสร้างตัวแบบการประมาณค่าเบี้ยประกันภัยแท้จริง ซึ่งผลการวิเคราะห์ข้อมูลของแต่ละบริษัทอาจจะให้ค่าปัจจัยเสี่ยงที่มีผลกระทบต่อค่าประมาณเบี้ยประกันภัยแท้จริงที่แตกต่างไปจากผลการศึกษา เนื่องจากลักษณะข้อมูลการรับประกันความเสี่ยงภัยมีความแตกต่างกัน

เอกสารอ้างอิง

- [1] D. W. Hosmer and S. Lemeshow, *Applied Logistic Regression*, United States: John Wiley & Sons Inc., 2000.
- [2] E. Ohlsson and B. Johansson, *Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [3] J. Lemaire, *Automobile Insurance: Actuarial Models*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, 1985.
- [4] Joseph M. Hilbe, *Negative Binomial Regression*, 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 2011.
- [5] M. David, "Auto Insurance Premium Calculation Using Generalized Linear Models," *Procedia Economics and Finance*, vol. 20, pp. 147-156, 2015
- [6] P. Jong and G. Z. Heller, *Generalized Linear Models for Insurance Data*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
- [7] P. McCullagh and J. A. Nelder, *Generalized Linear Models*, 2nd ed. London, United States: John CRC Press, 1989.
- [8] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene and M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*, 2nd ed. Springer, Berlin, 2009.





วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 62(692) May–Aug, 2017

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org>MathThaiOrg@gmail.com

จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

Isosceles Triangular Numbers

สมพงศ์ จิตต์มันน์ กำพล อวชัย และ พุทธิชัย ตันลา

Somphong Jitman¹ Kampon Awachai² and Phutthichai tanla³¹⁻³Department of Mathematics, Faculty of Science, Silpakorn University,
Nakhon Pathom 73000, ThailandEmail: ¹sjitman@gmail.com ²kumpalow1994@gmail.com ³okipanza21@gmail.com

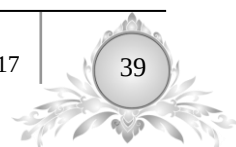
บทคัดย่อ

จำนวนสามเหลี่ยมเป็นจำนวนที่น่าสนใจและมีการศึกษาอย่างต่อเนื่องมา
ยาวนาน ในงานวิจัยนี้เราสนใจจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งเป็นนิยามทั่วไปของจำนวน
สามเหลี่ยม พิจารณาสมบัติต่างๆ ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และเงื่อนไขจำเป็น
สำหรับจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จำแนกจำนวนสามเหลี่ยมหน้า
จั่วคู่และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ นอกจากนี้ยังได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน
สามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าอีกด้วย

คำสำคัญ: จำนวนสามเหลี่ยม จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่า

ABSTRACT

Triangular numbers have been of interest and extensively studied. In this
work, we focus on an isosceles triangular number which is a generalization of a
triangular number. Properties of isosceles triangular numbers have been
determined together with a necessary condition for a positive integer to be
isosceles triangular. Characterizations of odd and even isosceles triangular
numbers have been also provided. Finally, links between isosceles triangular
numbers and regular polygonal numbers has been given as well.





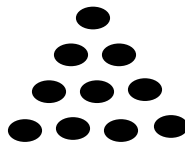
Keywords: Triangular Numbers, Isosceles Triangular Numbers, Regular Polygonal Numbers

1. บทนำ

จำนวนสามเหลี่ยม คือ จำนวนเชิงรูป (Figurate Number) ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจุดในระนาบเรียงกันเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า [1-3] อีกนัยหนึ่งจำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n คือจำนวนของจุดในสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว n ซึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง n เรานิยมเขียนแทนจำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n ด้วย

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

จำนวนสามเหลี่ยมถูกศึกษามาอย่างยาวนานตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ ดังเห็นได้จากที่สำนักพีทาโกเรียนเคารพรูป Tetractys ซึ่งเป็นรูปจำนวนสามเหลี่ยม $T(4) = 1 + 2 + 3 + 4$ ซึ่งประกอบด้วยจุดทั้งหมด 10 จุด ดังรูปที่ 10



รูปที่ 1 Tetractys

ใน [4] ได้มีการศึกษาสมบัติต่างๆ ที่น่าสนใจของจำนวนสามเหลี่ยมซึ่งสรุปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n คือ

$$T(n) = \frac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

เมื่อ $\binom{n+1}{2}$ คือสัมประสิทธิ์ทวินาม

ทฤษฎีบท 1.2 ผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยม 2 จำนวนที่เรียงติดกันเป็นกำลังสองสมบูรณ์





ทฤษฎีบท 1.3 ให้ N เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมก็ต่อเมื่อ $8N + 1$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เรากล่าวว่า จำนวนสามเหลี่ยม N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมคู่ ถ้า N เป็นจำนวนคู่ และกล่าวว่าจำนวนสามเหลี่ยม N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมคี่ ถ้า N เป็นจำนวนคี่ ใน [4] ได้จำแนกจำนวนสามเหลี่ยมคู่และจำนวนสามเหลี่ยมคี่ไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า $T(n)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมคู่ก็ต่อเมื่อ $n \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $n \equiv 3 \pmod{4}$

ทฤษฎีบท 1.5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า $T(n)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมคี่ก็ต่อเมื่อ $n \equiv 1 \pmod{4}$ หรือ $n \equiv 2 \pmod{4}$

นอกจากนี้มีการศึกษาเอกลักษณ์ต่างๆ ของจำนวนสามเหลี่ยมใน [3] ศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนสามเหลี่ยมทางทฤษฎีจำนวนใน [5-6]

งานวิจัยนี้เราสนใจจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งเป็นนัยทั่วไปของจำนวนสามเหลี่ยม เรากล่าวถึงสมบัติพื้นฐานและเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการเป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วในหัวข้อที่ 2 ศึกษาจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ในหัวข้อที่ 3 นอกจากนี้เราได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าในหัวข้อที่ 4

2. จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ในหัวข้อนี้เราแนะนำและศึกษาสมบัติต่างๆ ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พร้อมทั้งให้เงื่อนไขที่จำเป็นของการเป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วไว้ด้วย

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ l จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $-l$ อันดับที่ n (n^{th} l -isosceles Triangular Number) คือ จำนวนเต็มบวกซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมเลขคณิต

$$1 + (1+l) + (1+2l) + \dots + (1+(n-1)l)$$

ในที่นี้จะเขียนแทนด้วย $T(n, l)$ นั่นคือ

$$T(n, l) = \sum_{i=1}^n (1+(i-1)l) = 1 + (1+l) + (1+2l) + \dots + (1+(n-1)l)$$

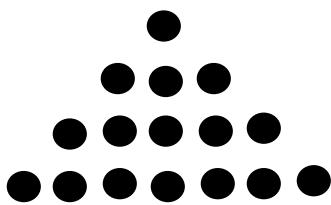




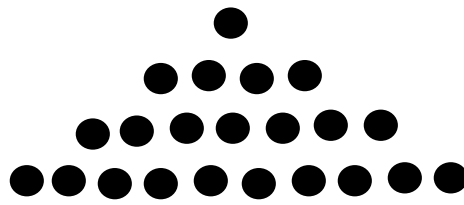
ในกรณีที่ n และ l ไม่เฉพาะเจาะจงหรือมีความชัดเจนในบริบทที่กำลังพิจารณาเราจะเรียกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $-l$ ว่า จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สำหรับกรณี $l = 1$ เราจะเห็นได้ชัดว่า $T(n, 1)$ คือ จำนวนสามเหลี่ยม $T(n)$

จากนิยามข้างต้นสังเกตได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว N สามารถแสดงได้ด้วยการเรียงของจุด N จุดในระนาบเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งสอดคล้องกับการกำหนดชื่อของจำนวนชนิดนี้

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณา $T(4, 2) = 1+3+5+7 = 16$ และ $T(4, 3) = 1+4+7+10 = 22$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งแสดงด้วยจุดบนระนาบดังรูปที่ 2



$T(4, 2) = 16$



$T(4, 3) = 22$

รูปที่ 2 $T(4, 2) = 16$ และ $T(4, 3) = 22$

เราสามารถจัดรูปผลรวมในอนุกรมเลขคณิตของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ดังนี้

บทตั้ง 2.2 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ l ได้ว่า

$$T(n, l) = n + \frac{n(n-1)l}{2}$$

พิสูจน์ ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$T(n, l) = 1 + (1+l) + (1+2l) + \dots + (1+(n-1)l)$$

$$= n + l(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))$$

$$= n + \frac{n(n-1)l}{2}$$

■

จำนวนสามเหลี่ยมและจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีความสัมพันธ์กันดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้



ทฤษฎีบท 2.3 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ $l > i$ ได้ว่า

$$T(n, l) = iT(n-1) + T(n, l-i)$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็มบวก n, l และ i โดยที่ $l > i$ จากบทนิยามของจำนวนสามเหลี่ยมและจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} iT(n-1) + T(n, l-i) &= i \frac{n(n-1)}{2} + n + \frac{n(n-1)(l-i)}{2} \\ &= n + \frac{n(n-1)(i+l-i)}{2} \\ &= n + \frac{n(n-1)l}{2} \\ &= T(n, l) \end{aligned}$$

■

เมื่อพิจารณาทฤษฎีบท 2.3 ในกรณี $i = l$ เราได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 2.4 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ $l \geq 2$ ได้ว่า

$$T(n, l) = T(n-1) + T(n, l-1)$$

ตัวอย่าง 2.5 พิจารณา $n = 5$ และ $l = 4$ ได้ว่า

$$45 = T(5, 4) = T(4) + T(5, 3) = 2T(4) + T(5, 2) = 3T(4) + T(5, 1)$$

ต่อไปเราจะพิจารณาเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการเป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ l และ N เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $-l$ แล้ว $8lN + (l-2)^2$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

พิสูจน์ สมมติให้ N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $-l$ ได้ว่า $N = n + \frac{n(n-1)l}{2}$

สำหรับบางจำนวนนับ n ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} 8lN + (l-2)^2 &= 8ln + 4n(n-1)l^2 + (l-2)^2 \\ &= 4n^2l^2 - 4nl(l-2) + (l-2)^2 \\ &= (2nl - (l-2))^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $8lN + (l-2)^2$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ตามต้องการ

■

สำหรับกรณี $l = 1$ เราได้ว่าเงื่อนไขจำเป็นในทฤษฎีบท 2.6 เป็นเงื่อนไขเพียงพอด้วยซึ่งเห็นได้จากทฤษฎีบท 1.3





3. จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่

ในหัวข้อนี้เราพิจารณาภาวะคู่-คี่ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และได้จำแนกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ไว้ด้วย

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ l เรากล่าวว่าจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่ ก็ต่อเมื่อ $T(n, l)$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และกล่าวว่า $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ ก็ต่อเมื่อ $T(n, l)$ เป็นจำนวนเต็มคี่ เราสามารถจำแนกภาวะคู่-คี่ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วตามภาวะคู่-คี่ของ l ได้ดังนี้

สำหรับกรณี l เป็นจำนวนคู่ เราได้ว่า $T(n, l)$ มีภาวะคู่หรือคี่เช่นเดียวกับ l ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ l เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ จะได้ว่า

1. $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่
2. $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

พิสูจน์ เนื่องจาก l เป็นจำนวนเต็มคู่ ได้ว่า $l = 2m$ บางจำนวนนับ m

เพื่อจะพิสูจน์ข้อความ 1. สมมติให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ได้ว่า $n = 2k + 1$ บาง $k \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(2k+1, 2m) &= (2k+1) + \frac{(2k)(2k+1)(2m)}{2} \\ &= 2k+1 + (4k^2 + 2k)m \\ &= 4mk^2 + 2mk + 2k + 1 \\ &= 2(2mk^2 + mk + k) + 1 \end{aligned}$$

ในทางกลับกัน สมมติให้ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ได้ว่า $n = 2k$ บาง $k \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(2k, 2m) &= 2k + \frac{(2k-1)(2k)(2m)}{2} \\ &= 2k + (2k^2 - k)(2m) \\ &= 4mk^2 - 2mk + 2k \\ &= 2(2mk^2 - km + k) \end{aligned}$$

ดังนั้น $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่





เนื่องจากข้อความ 2. และข้อความ 1. สมมูลกัน ดังนั้นการพิสูจน์จึงเสร็จสิ้นสมบูรณ์ ■

สำหรับกรณีที่ l เป็นจำนวนเต็มคี่ เราได้ผลลัพธ์ในทำนองเดียวกับกรณีที่ $l = 1$ ในทฤษฎีบท 1.4 และทฤษฎีบท 1.5 ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ l เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ จะได้ว่า

1. $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่ ก็ต่อเมื่อ $n \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $n \equiv 3 \pmod{4}$
2. $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ ก็ต่อเมื่อ $n \equiv 1 \pmod{4}$ หรือ $n \equiv 2 \pmod{4}$

พิสูจน์ เนื่องจาก l เป็นจำนวนเต็มคี่ ได้ว่า $l = 2m + 1$ บางจำนวนนับ m เพื่อจะพิสูจน์ข้อความ 1. สมมติให้ $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ และ $n \not\equiv 3 \pmod{4}$ ทำให้ได้ว่า $n = 4k + 1$ หรือ $n = 4k + 2$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

กรณีที่ 1 $n = 4k + 1$ ได้ว่า

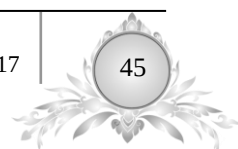
$$\begin{aligned} T(n, l) &= T(4k + 1, 2m + 1) \\ &= 4k + 1 + \frac{(4k)(4k + 1)(2m + 1)}{2} \\ &= 4k + 1 + (8k + 2)(2m + 1) \\ &= 16km + 4m + 12k + 3 \\ &= 4m(4k + 1) + 3(4k + 1) \end{aligned}$$

นั่นคือ $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่

กรณีที่ 2 $n = 4k + 2$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(n, l) &= T(4k + 2, 2m + 1) \\ &= 4k + 2 + \frac{(4k + 1)(4k + 2)(2m + 1)}{2} \\ &= 4k + 2 + (14k + 1)(2m + 1) \\ &= 28km + 2m + 18k + 3 \\ &= 2m(14k + 1) + 18k + 3 \end{aligned}$$

นั่นคือ $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่





ในทางกลับกันสมมุติให้ $n \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $n \equiv 3 \pmod{4}$ ทำให้ได้ว่า
 $n = 4k$ หรือ $n = 4k + 3$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

กรณีที่ 1 $n = 4k$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(n, l) &= T(4k, 2m+1) \\ &= 4k + \frac{(4k-1)(4k)(2m+1)}{2} \\ &= 4k + 16mk - 4km - 2k \\ &= 2k(8mk - 2m - 1) \end{aligned}$$

นั่นคือ $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่

กรณีที่ 2 $n = 4k + 3$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(n, l) &= T(4k+3, 2m+1) \\ &= 4k+3 + \frac{(4k+2)(4k+3)(2m+1)}{2} \\ &= 16mk^2 + 20mk + 22k + 6m + 6 \\ &= 2(8mk^2 + 10mk + 11k + 3m + 3) \end{aligned}$$

นั่นคือ $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่

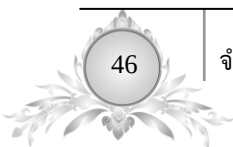
เนื่องจากข้อความ 2. และข้อความ 1. สมมูลกัน ดังนั้นการพิสูจน์จึงเสร็จ
 สิ้นสมบูรณ์ ■

เมื่อพิจารณาผลบวกของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว— l สองจำนวนที่เรียงติด
 กัน $T(n, l) + T(n+1, l)$ เราพบว่าสำหรับกรณีที่ l เป็นจำนวนคู่ โดยทฤษฎีบท 3.1
 ได้ว่าผลรวมดังกล่าวเป็นจำนวนคี่เสมอ

บทแทรก 3.3 ให้ l เป็นจำนวนคู่ ได้ว่า $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคี่ทุก
 จำนวนนับ n

สำหรับกรณี l เป็นจำนวนคี่ โดยทฤษฎีบท 3.2 เราได้ว่าผลบวกของจำนวน
 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ มีภาวะคู่คี่ ดังแสดงในบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ l เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ได้ว่า
 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง



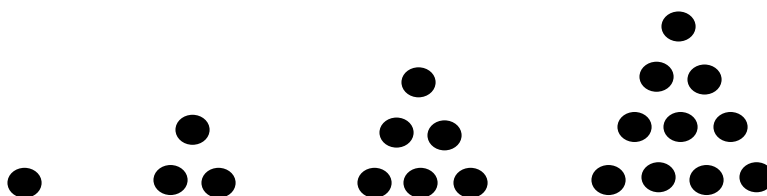


1. ถ้า $n \equiv 0 \pmod{4}$ แล้ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคี่
2. ถ้า $n \equiv 1 \pmod{4}$ แล้ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคู่
3. ถ้า $n \equiv 2 \pmod{4}$ แล้ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคี่
4. ถ้า $n \equiv 3 \pmod{4}$ แล้ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคู่

4. จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวน m เหลี่ยมด้านเท่า

ในหัวข้อนี้เรากล่าวถึงจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่า [1] และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าและจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วไว้ด้วย

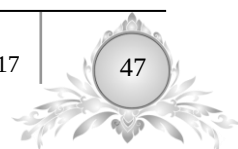
เมื่อเราพิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, 1)$ พบว่าเป็นจำนวนสามเหลี่ยม (ด้านเท่า) $T(n)$ เมื่อนับจำนวนจุดบนระนาบซึ่งเขียนแทนจำนวนสามเหลี่ยมดังกล่าวได้เป็นลำดับ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... ซึ่งเรียกว่าลำดับของจำนวนสามเหลี่ยมด้านเท่า [7, Sloane's A000217] ดังตัวอย่างในรูปที่ 3

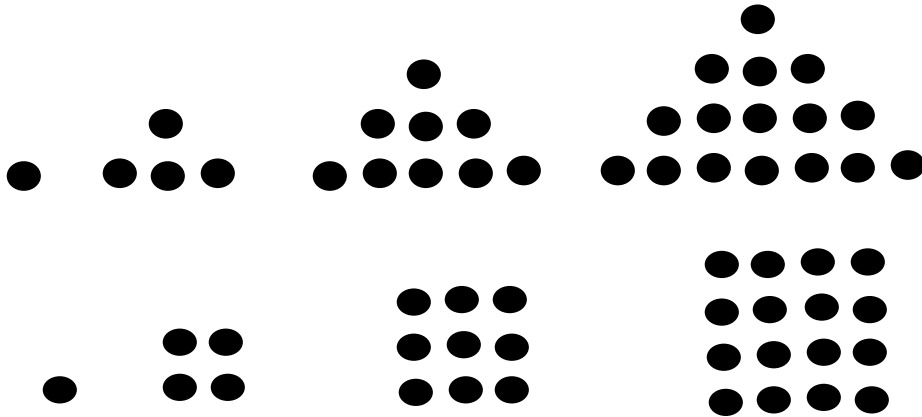


รูปที่ 3 จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, 1)$ หรือจำนวนสามเหลี่ยมด้านเท่า

เมื่อ $n = 1, 2, 3$ และ 4 ตามลำดับ

เราเรียกจำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ว่าจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจุดบนระนาบเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามันเอง เมื่อเราพิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, 2)$ ได้ $T(n, 2)$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจุดบนระนาบเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งลำดับของจำนวนคือ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ... ซึ่งเรียกว่าลำดับจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่า [7, Sloane's A000290]





รูปที่ 4 จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, 2)$ หรือจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่า
เมื่อ $n = 1, 2, 3$ และ 4 ตามลำดับ

เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่าและจำนวนสามเหลี่ยม
คางหมู $T(n, 2)$ ดังนี้

บทตั้ง 4.1 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ได้ว่า $T(n, 2)$ เป็นจำนวนสี่เหลี่ยมด้าน
เท่า

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$T(n, 2) = n + \frac{n(n-1)2}{2} = n + n^2 - n = n^2$$

ซึ่งเป็นจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่าตามต้องการ ■

สำหรับกรณีทั่วไปเราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนหลายเหลี่ยม
ด้านเท่าและจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าเป็นอนุกรมเลข
คณิตซึ่งกล่าวถึงใน [1] สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ m จำนวน m เหลี่ยม
ด้านเท่าอันดับที่ n (n^{th} m -Gonal Number) คือ จำนวนในรูปอนุกรมเลขคณิต

$$S(n, m) = 1 + (1 + (m-2)) + (1 + 2(m-2)) + \dots + (1 + (n-1)(m-2))$$

จาก [1] ได้ว่าจำนวนจุดของจำนวน m เหลี่ยมด้านเท่าอันดับที่ n สามารถ
จัดเรียงเป็นรูป m เหลี่ยมด้านเท่าซึ่งด้านยาวด้านละ n นอกจากนี้เราได้



ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน m เหลี่ยมด้านเท่า และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $-l$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.2 สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ l ได้ว่า

$$S(n, l+2) = T(n, l)$$

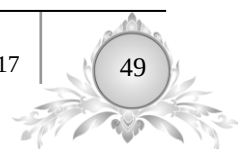
พิสูจน์ เมื่อคำนวณผลรวมของอนุกรม $S(n, l+2)$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} S(n, l+2) &= \frac{n(1+1+(l+2-2)(n-1))}{2} \\ &= \frac{n(l(n-1)+2)}{2} \\ &= n + \frac{n(n-1)l}{2} \\ &= T(n, l) \end{aligned}$$

ตามต้องการ ■

เอกสารอ้างอิง

- [1] E. Deza and M. M. Deza, *Figurate Numbers*, Singapore: World Scientific Publishing Company, 2012.
- [2] J. L. Pietempol, "Square triangular numbers," *The American Mathematical Monthly*, vol. 169, pp. 168-169, 1962.
- [3] T. J. Trotter, "Some identities for the triangular numbers" *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 6, pp. 128-135, 1973.
- [4] P. J. Berana, J. Montalbo and D. Magpantay, "On triangular and trapezoidal numbers," *Asia Pacific Journal of Multidisciplinary Research*, vol. 3, pp.76-81, 2015.
- [5] H. Hindin, "Stars, hexes, triangular numbers and Pythagorean triples," *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 16, pp. 191-193, 1983-1984.
- [6] W. L. McDaniel, "Triangular numbers in the Pell sequence," *The Fibonacci Quarterly*, vol. 34, pp. 105-107, 1996.
- [7] N. J. A. Sloane. 2017. *On-line encyclopedia of integer sequences*. Retrieved 2 May 2017 from <http://oeis.org/>





วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 62(692) May–Aug, 2017

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org>MathThaiOrg@gmail.com

**อิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์ของการจัดการเรียนรู้
ด้วยรูปแบบ SSCSE และแบบการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์**

เรื่อง สถิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

**Main and Interaction Effects of Learning Provision
by SSCSE Model and Learning Style for
Mathematics Achievement Applications
on “Statistics” of Mathayomsuksa 6 Students**

เมธาสิทธิ์ ธัญรัตนศรีสกุล

Mathasit Tanyarattanasrisakul

Rachineeburana School, Nakhon Pathom, 73000, Thailand

Email: mathasit24@gmail.com

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาอิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์ของรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 2) เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ระหว่างนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ และ 3) เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับเกณฑ์ร้อยละ 70 กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 71 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 ของโรงเรียนราชินีบูรณะ จังหวัดนครปฐม การดำเนินการวิจัยใช้รูปแบบการวิจัยเชิงทดลอง แบบแผนการทดลองแบบวัดผลก่อนและหลัง มีกลุ่มควบคุม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และแบบสำรวจการ





เรียนรู้ตามแนวคิดของเดวิด คอลบ์ การวิเคราะห์ข้อมูลใช้ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง

ผลการวิจัยพบว่า 1) รูปแบบการจัดการเรียนรู้มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่แบบการเรียนรู้ไม่มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ และไม่พบปฏิสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คำสำคัญ: รูปแบบ SSCSE ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบการเรียนรู้

ABSTRACT

The objective of this research were to 1) study main and interaction effects of learning provision by SSCSE model and learning style for mathematics achievement application on statistics of mathayomsuksa 6 student 2) compare of mathematics achievement application on statistics of mathayomsuksa 6 student after learned by SSCSE model and conventional method and 3) compare of mathematics achievement application on statistics after learned by SSCSE with 70% criteria. The research samples were 71 students in mathayomsuksa 6 in second semesters academic year 2014 at school of Rachineeburana, Nakhon Pathom province. The research design was experimental design with pretest-posttest, experimental and control group design. The research instruments were learning plan, achievement test and David Kolb learning style test. The data analyses applied were percentage, arithmetic mean, standard deviation, t-test and two way analysis of variance.

The result of this research indicates: 1) the main effect discovered in the relationship between SSCSE model and mathematics achievement application on statistics of mathayomsuksa 6 student. However, not the main effect discovered in the relationship learning style and no interaction effect between SSCSE model and learning style for mathematics achievement application on statistics of mathayomsuksa 6 students was significantly at .05 levels 2) mathematics achievement application on statistics after learned by SSCSE model was higher than conventional method at .05 statistical significantly levels and 3) mathematics achievement application on statistics after learned by SSCSE was higher than 70% criteria at .05 statistical significantly levels.

Keywords: SSCSE Model, Achievement, Learning Style

1. บทนำ

คณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน [1] ได้กล่าวถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ไว้ว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนามนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผนสามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่นๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และทำให้นักเรียนสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข [2] การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์นั้นจะต้องส่งเสริมนักเรียนให้ได้เรียนรู้เต็มตามศักยภาพ ดังที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติได้กำหนดให้การจัดการศึกษาต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลเหล่านั้น ทั้งนี้ควรจัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งเน้นการพัฒนาคุณภาพชีวิตให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ ด้วยเหตุนี้ การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์จึงต้องคำนึงถึงรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ของ



นักเรียนที่มีความแตกต่างกัน เพื่อที่จะได้นำมาปรับใช้ในการจัดการเรียนรู้ เพื่อให้
นักเรียนสามารถพัฒนาความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ของตนเองได้อย่างเต็มที่

จากการจัดการเรียนรู้รายวิชา ค33101 คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 6 พบว่า เมื่อทำการจัดการเรียนรู้ในสาระการเรียนรู้ที่เป็นโจทย์ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์ นักเรียนไม่สามารถทำการวิเคราะห์โจทย์ปัญหานั้นได้ ส่งผลให้เมื่อทำ
การทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้ข้อสอบที่มีลักษณะเป็นสถานการณ์
โจทย์ นักเรียนจึงมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในเรื่องนั้นอยู่ในระดับต่ำกว่าเกณฑ์ที่
กำหนดไว้ร้อยละ 70 ด้วยเหตุนี้ ผู้วิจัยในฐานะครูผู้ทำการจัดการเรียนรู้ในรายวิชา
ดังกล่าว จึงมีความมุ่งมั่นในการแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียน

จากการศึกษารูปแบบการจัดการเรียนรู้จากนักวิชาการทั้งในและ
ต่างประเทศ พบว่ารูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCS มีความเหมาะสมที่จะนำมาใช้
ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นนี้ เพราะรูปแบบ SSCS มีขั้นตอนที่ส่งเสริมกระบวนการ
แก้ปัญหาของนักเรียน ได้แก่ การวิเคราะห์ปัญหา (Search: S) การลงมือแก้ปัญหา
(Solve: S) การเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหา (Create: C) และการแลกเปลี่ยน
วิธีการแก้ปัญหา (Share: S) ดังที่นักวิจัยจำนวนมากได้นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
การเรียนรู้ที่คล้ายกัน เช่น สุภาพร ปิ่นทอง [3] ญาณิศา ศรีโชติ [4] และมณีนรัตน์
พันธุ์ตา [5] เป็นต้น แสดงให้เห็นว่ารูปแบบ SSCS เป็นรูปแบบหนึ่งของการจัดการ
เรียนรู้ที่ดี แต่ผู้วิจัยเห็นว่า ถ้าเพิ่มเติมด้านการให้นักเรียนประเมินผลการแก้โจทย์
ปัญหาด้วยตนเองจะทำให้รูปแบบ SSCS มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ผู้วิจัยจึงผสมผสาน
รูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCS กับแนวคิดในการประเมินการแก้โจทย์ปัญหา
พัฒนาเป็นรูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCSE ซึ่งนำมาใช้ในการวิจัยครั้งนี้ แต่อย่าง
ที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า กระบวนการจัดการเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้ จำเป็นต้องมี
องค์ประกอบที่สำคัญ 3 ประการ ได้แก่ ครู นักเรียน และสิ่งที่จะสอน [6] ซึ่งครูและ
นักเรียนต่างก็มีความต่างกันในแต่ละบุคคล ที่เห็นได้อย่างชัดเจนก็คือ ครูจะมีความ
ต่างกันในรูปแบบและวิธีการสอน หรือที่เรียกกันว่า สีลาการจัดการเรียนรู้ และ
นักเรียนเองก็มีความต่างกันในรูปแบบการเรียนรู้หรือสีลาการเรียนรู้ ซึ่งโดยทฤษฎี



แล้ว ความแตกต่างทั้งสองนี้เป็นอิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ภายใต้องค์ประกอบที่เชื่อมโยงสัมพันธ์กันดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะทำการศึกษาเกี่ยวกับอิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์ของการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE และแบบการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชา ค33102 คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง สถิติ ในสาระการเรียนรู้ซึ่งได้แก่ การวัดค่ากลาง (ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยม) และการวัดการกระจายของข้อมูล (พิสัย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน) แนวทางหนึ่งเพื่อเป็นการแก้ปัญหาที่พบจากการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนแล้ว อีกแนวทางหนึ่งเพื่อเป็นการสร้างข้อค้นพบหรือองค์ความรู้เกี่ยวกับอิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์ของรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้อีกด้วย

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

2.1 เพื่อศึกษาอิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์ของรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

2.2 เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ระหว่างนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

2.3 เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับเกณฑ์ร้อยละ 70

3. สมมติฐานการวิจัย

3.1 รูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้มีอิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

3.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ





3.3 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียน ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70

4. นิยามเชิงปฏิบัติการ

4.1 การจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE หมายถึง รูปแบบการจัดการเรียนรู้ ที่ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นตอนที่ 1 Search (S) หมายถึง การค้นหาข้อมูล ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา การแยกแยะประเด็นของปัญหา และการแสวงหาข้อมูลต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ขั้นตอนที่ 2 Solve (S) หมายถึง การวางแผนและการ ดำเนินการแก้ปัญหาด้วยวิธีการต่างๆ หรือการหาคำตอบของปัญหาที่ต้องการ ขั้นตอนที่ 3 Create (C) หมายถึง การนำข้อมูลที่ได้จากการแก้ปัญหาหรือวิธีการที่ ได้จากการแก้ปัญหามาจัดกระทำให้อยู่ในรูปของคำตอบ หรือวิธีการที่สามารถ อธิบายให้เข้าใจได้ง่าย ขั้นตอนที่ 4 Share (S) หมายถึง การแลกเปลี่ยนความ คิดเห็นเกี่ยวกับข้อมูลและวิธีการแก้ปัญหา และขั้นตอนที่ 5 Evaluate (E) หมายถึง การประเมินผลการแก้โจทย์ปัญหาด้วยตัวนักเรียนเอง โดยนักเรียนจะต้องทำการ ตรวจสอบความถูกต้องหรือความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหา

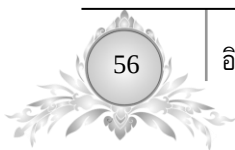
4.2 การจัดการเรียนรู้แบบปกติ หมายถึง การจัดการเรียนรู้ที่ประกอบไปด้วย ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ขั้นนำเสนอเนื้อหา และขั้นสรุปเนื้อหา ทั้งนี้การสอนแก้โจทย์ ปัญหาทำโดยการนำเสนอปัญหาและสอนวิธีแก้ปัญหาโดยตรง

4.3 แบบการเรียนรู้ (Learning Style) หมายถึง แบบการเรียนรู้ตามแนวคิด ของเดวิด คอลบ์ [7] ซึ่งจำแนกแบบการเรียนรู้ออกเป็น 4 ประเภท ตามทฤษฎีการ เรียนรู้เชิงประสบการณ์ ประกอบด้วย แบบอเนกนัย (Divergent) แบบเอกนัย (Convergent) แบบดูดซึม (Assimilative) และแบบปรับปรุง (Accommodator)

5. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

5.1 ประชากร เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 514 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 ของโรงเรียนราชินีบูรณะ จังหวัดนครปฐม

5.2 กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ห้อง 2 และห้อง 4 รวม ทั้งสิ้น 71 คน ทำการสุ่มมาเป็นหน่วยวิเคราะห์จากประชากรด้วยวิธีการสุ่มแบบ กลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยการสุ่ม ทำให้ได้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปี



ที่ 6 ห้อง 2 เป็นกลุ่มทดลอง และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ห้อง 4 เป็นกลุ่มควบคุม ซึ่งนักเรียนทั้งสองกลุ่มมีคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ก่อนเรียน ไม่ต่างกัน

6. เครื่องมือและการสร้างเครื่องมือในการวิจัย

6.1 แผนการจัดการเรียนรู้ เป็นแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE จำนวน 2 แผนการจัดการเรียนรู้ และแผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ จำนวน 2 แผนการจัดการเรียนรู้ ตรวจสอบคุณภาพด้านความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา (Content Validity) โดยหาค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับจุดประสงค์ (Index of Item Objective Congruence: IOC) ผลการตรวจสอบพบว่าแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นมีค่า IOC เท่ากับ 1.00 ทุกแผนการจัดการเรียนรู้

6.2 แบบสำรวจแบบการเรียนรู้ตามแนวคิดของเดวิด คอลบ์ มีลักษณะเป็นแบบประเมินแบบมาตราประมาณค่า 5 ระดับ มีจำนวน 28 ข้อคำถาม พัฒนาขึ้นจากแบบประเมินแบบการเรียนรู้ตามที่กรมวิชาการ [8] ได้พัฒนาไว้ ตรวจสอบคุณภาพด้านความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้วิธีการหาค่า IOC ผลการตรวจสอบพบว่าแบบสำรวจแบบการเรียนรู้ที่พัฒนามีค่า IOC เท่ากับ 1.00 ทุกข้อ จากนั้นทำการตรวจสอบคุณภาพของแบบสำรวจแบบการเรียนรู้ในด้านความเชื่อมั่น (Reliability) ใช้วิธีการตรวจสอบความสอดคล้องภายในตามสูตรของครอนบัค ซึ่งพบว่าแบบสำรวจแบบการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นมีความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.923

6.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติผู้วิจัย ได้สร้างเป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบ ประเภท 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ ข้อสอบแต่ละข้อมีการให้คะแนนแบบตอบถูกได้ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน จากนั้นนำแบบทดสอบไปตรวจสอบคุณภาพด้านความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้วิธีการหา IOC ซึ่งพบว่าแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีค่า IOC เท่ากับ 1.00 ทุกข้อ จากนั้นทำการตรวจสอบคุณภาพของแบบทดสอบด้านความยากง่าย (Difficulty) และอำนาจจำแนก (Discrimination) โดยใช้สูตรของ D.R Whitney and D.L Sabers [9] และทำการคัดเลือกข้อสอบที่มีความเหมาะสม เพื่อนำมาใช้เป็นแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 20 ข้อ





ผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบ พบว่าแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สร้างขึ้นมีค่าดัชนีความยากง่ายและดัชนีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.214 ถึง 0.762 และ 0.250 ถึง 0.833 ตามลำดับ และจากการคำนวณเพื่อหาค่าความเชื่อมั่นโดยใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นตามสูตร KR20 ของ Kulder Richardson [10,11] พบว่าแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.738

7. การเก็บรวบรวมข้อมูล

7.1 ทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ก่อนเรียน กับนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม เป็นเวลา 50 นาที เก็บรวบรวมข้อมูลที่เป็นคะแนนสอบก่อนเรียนไปวิเคราะห์เพื่อทดสอบความแตกต่าง และนำไปกำหนดสถิติที่จะนำมาใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

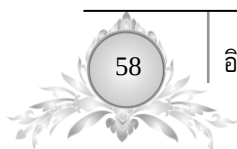
7.2 ดำเนินการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE ให้กับนักเรียนกลุ่มทดลอง และดำเนินการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบปกติ ให้กับนักเรียนกลุ่มควบคุม ในสาระการเรียนรู้ เรื่อง สถิติ เป็นระยะเวลา 9 ชั่วโมง

7.3 ทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน กับนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม เป็นเวลา 50 นาที จากนั้นให้นักเรียนทำแบบประเมินแบบการเรียนรู้ เก็บรวบรวมข้อมูลคะแนนสอบและข้อมูลจากแบบประเมินไปใช้ในการวิเคราะห์และทดสอบสมมติฐานต่อไป

8. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ค่าร้อยละ (Percentage) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Mean) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง (Two - way Analysis of Variance) การทดสอบทีแบบสองกลุ่มอิสระต่อกัน (t-test for Independent) และการทดสอบทีอย่างง่าย (One Sample t-test) [12-13]

9. ผลการวิเคราะห์ข้อมูล



9.1 ผลการวิเคราะห์อิทธิพลหลักของรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

สำหรับผลการวิเคราะห์ในส่วนนี้ ผู้วิจัยขอเสนอค่าสถิติพื้นฐานของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน จำแนกตามแบบการเรียนรู้ ดังตารางที่ 1 และผลการทดสอบความแปรปรวนสองทาง ดังตารางที่ 2

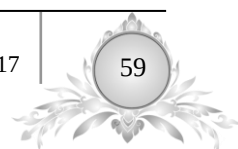
ตารางที่ 1 ค่าสถิติพื้นฐานของผลการทดสอบหลังเรียน

Learning Style	Experimental Group				Control Group			
	N	%	Mean	S.D.	N	%	Mean	S.D.
Divergent	18	48.65	17.39	0.78	15	44.12	13.27	0.80
Convergent	6	16.22	17.50	0.55	5	14.71	13.60	1.14
Accommodative	8	21.62	17.25	1.17	8	23.53	12.50	0.76
Assimilative	5	13.51	17.20	0.84	6	17.65	13.17	0.75
Total	37	100.00	17.35	0.82	34	100.00	13.12	0.88

จากข้อมูลในตารางที่ 1 พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีแบบการเรียนรู้แบบอเนกนัย เอกนัย แบบปรับปรุง และแบบดูดซึม คิดเป็นร้อยละ 48.65, 16.22, 21.62 และ 13.51 และมีคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบหลังเรียนเท่ากับ 17.39, 17.50, 17.25 และ 17.20 คะแนน ตามลำดับ และพบว่านักเรียนกลุ่มควบคุมมีแบบการเรียนรู้แบบอเนกนัย เอกนัย แบบปรับปรุง และแบบดูดซึม คิดเป็นร้อยละ 44.12, 14.71, 23.53 และ 17.65 และมีคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบหลังเรียนเท่ากับ 13.27, 13.60, 12.50 และ 13.17 คะแนน ตามลำดับ

ตารางที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง

Source of Variance	SS	df	MS	F	Sig.
Instructional Style	255.46	1	255.46	357.29	0.00
Learning Style	3.47	3	1.16	1.62	0.19
Instructional Style * Learning Style	1.58	3	0.53	0.74	0.54
Error	45.04	63	0.72	-	-
Total	367.55	70	-	-	-





จากข้อมูลในตารางที่ 2 พบว่าผลการทดสอบความแปรปรวนสำหรับรูปแบบการจัดการเรียนรู้ ระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบปกติ มีค่าสถิติทดสอบเอฟเท่ากับ 357.29 ค่านี้สำคัญเท่ากับ 0.00 นั่นคือ รูปแบบการจัดการเรียนรู้มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 สำหรับแบบการเรียนรู้ทั้ง 4 ตามแนวคิดของเดวิด คอลบ์ มีค่าสถิติทดสอบเอฟเท่ากับ 1.62 ค่านี้สำคัญเท่ากับ 0.19 และปฏิสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ มีค่าสถิติทดสอบเอฟเท่ากับ 0.74 ค่านี้สำคัญเท่ากับ 0.54 ทำให้สรุปได้ว่า แบบการเรียนรู้ไม่มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ และไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ เช่นเดียวกัน

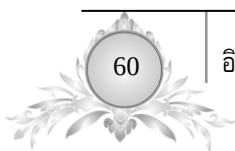
9.2 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ระหว่างนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ระหว่างนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้การทดสอบที่แบบสองกลุ่มอิสระต่อกัน ได้ผลการวิเคราะห์ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ผลการทดสอบที่แบบสองกลุ่มอิสระต่อกัน

Posttest Score	N	Mean	S.D.	df	t	Sig.
Experimental Group	37	17.35	0.82	67.46	20.88	0.00
Control Group	34	13.12	0.88			

จากข้อมูลในตารางที่ 3 พบว่า การทดสอบเปรียบเทียบคะแนนสอบหลังเรียนมีค่าสถิติทดสอบที่เท่ากับ 20.88 ค่านี้สำคัญเท่ากับ 0.00 สรุปได้ว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE มีคะแนนเฉลี่ยในการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05



9.3 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับเกณฑ์ร้อยละ 70

สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้การทดสอบที่อย่างง่าย ปรากฏผลการวิเคราะห์ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ผลการทดสอบที่อย่างง่าย

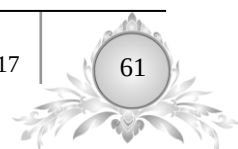
Experimental Group	N	Mean	S.D.	μ	df	t	Sig.
Posttest Score	37	17.35	0.82	14	36	24.74	0.00

จากข้อมูลในตารางที่ 4 พบว่า การทดสอบเปรียบเทียบคะแนนสอบหลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 70 มีค่าสถิติทดสอบที่เท่ากับ 24.74 ค่านี้สำคัญเท่ากับ 0.00 สรุปได้ว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE มีคะแนนเฉลี่ยในการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

10. สรุปผลการวิจัย

10.1 รูปแบบการจัดการเรียนรู้มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่แบบการเรียนรู้ไม่มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ และไม่พบปฏิสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

10.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

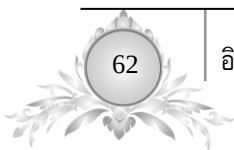




10.3 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

11. อภิปรายผลการวิจัย

11.1 ผลการวิจัยพบว่า รูปแบบการจัดการเรียนรู้มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่แบบการเรียนรู้ไม่มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ และไม่พบปฏิสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากรูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCSE เป็นรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งในด้านของการแยกแยะปัญหา (ขั้นตอนที่ 1 Search: S) และการสร้างคำตอบที่ได้จากการแก้โจทย์ปัญหา (ขั้นตอนที่ 3 Create: C) ซึ่งเป็นข้อแตกต่างกันระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE กับรูปแบบปกติ ที่เป็นการนำเสนอเนื้อหาและโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เท่านั้น และอาจเนื่องมาจากกระบวนการของรูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCSE ส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้ความคิดระดับสูง (Higher Order Thinking) เมื่อนักเรียนได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE ไประยะหนึ่ง จึงเกิดการปรับเปลี่ยนกระบวนการคิดของตนเอง ประกอบกับการฝึกฝนตามขั้นตอนของรูปแบบ ทำให้เมื่อเปรียบเทียบกับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ จึงเกิดความแตกต่างกันทั้งในกระบวนการและผลที่เกิดขึ้นจากการจัดการเรียนรู้ ความแตกต่างนี้ส่งผลให้รูปแบบการจัดการเรียนรู้มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งไว้ แต่กลับพบว่าแบบการเรียนรู้ของนักเรียนไม่มีอิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์กับรูปแบบการจัดการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากทฤษฎีการเรียนรู้เชิงประสบการณ์เป็นทฤษฎีการจัดการเรียนรู้ที่ต้องอาศัยประสบการณ์เดิมของนักเรียน และมุ่งเน้นให้นักเรียนสร้างองค์ความรู้จากประสบการณ์เดิม ซึ่งหากพิจารณาไปที่ประสบการณ์เดิมของนักเรียน จะพบว่า



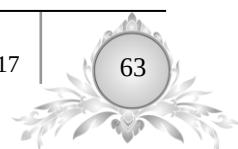
นักเรียนมีประสบการณ์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งผ่านมาเป็นระยะเวลา 3 ปี ตามฐานคิดของความคงทนในการเรียนรู้และทฤษฎีการประมวลผลข้อมูล [14] นักเรียนอาจเกิดการลืมเนื้อหาสาระดังกล่าวไป เมื่อได้รับการจัดการเรียนรู้เรื่อง สถิติ อีกครั้ง จึงเสมือนเป็นการศึกษาเนื้อหาใหม่ ด้วยเหตุนี้กระบวนการของการเรียนรู้เชิงประสบการณ์จึงอาจยังไม่เกิดขึ้น ส่งผลให้แบบการเรียนรู้ไม่มีอิทธิพลหลักและปฏิสัมพันธ์กับรูปแบบการจัดการเรียนรู้ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ สำหรับการจัดครั้งนี้

11.2 ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ หลังเรียน ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE เป็นการผสมผสานขั้นตอนของรูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCS ที่มีประสิทธิภาพกับแนวคิดในการประเมินผลการแก้ปัญหาด้วยตัวเอง ซึ่งช่วยส่งเสริมกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน ดังนั้น เมื่อนักเรียนได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE จึงมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 ทั้งนี้เป็นไปตามสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งไว้ และสอดคล้องเทียบเคียงกับผลการวิจัยโดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCS ของ สุภาพร ปิ่นทอง [3] งานวิจัยของ ญาณิศา ศรีโชติ [4] และงานวิจัยของ มณีนรัตน์ พันธูตา [5]

12. ข้อเสนอแนะ

12.1 ข้อเสนอแนะสำหรับการนำผลการวิจัยไปใช้

12.1.1 ผลการวิจัยนี้พบว่ารูปแบบการจัดการเรียนรู้มีอิทธิพลหลักต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 แสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบที่ต่างกันทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนมีความแตกต่างกันด้วย





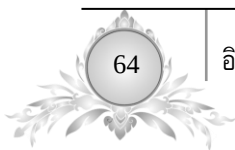
ครูจึงควรเลือกรูปแบบการจัดการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับเนื้อหาวิชา และศักยภาพในการเรียนรู้ของนักเรียน

12.1.2 ผลการวิจัยนี้พบว่าการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE ส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 ดังนั้น สำหรับครูผู้สอนที่พบกับปัญหาการจัดการเรียนรู้ในบริบทที่ใกล้เคียงกัน อาจนำรูปแบบ SSCSE ไปใช้ในการแก้ปัญหาการเรียนรู้ได้อีกแนวทางหนึ่ง

12.2 ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

12.2.1 การวิจัยครั้งนี้ใช้กรอบแนวคิดขององค์ประกอบในการจัดการเรียนรู้ที่ประกอบด้วย รูปแบบการจัดการเรียนรู้ เนื้อหาการเรียนรู้ และแบบการเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่งเป็นแนวคิดในเบื้องต้น นำมาสู่การศึกษาอิทธิพลหลักของรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแบบการเรียนรู้ในครั้งนี้ ดังนั้น จึงควรมีการศึกษาถึงอิทธิพลจากปัจจัยอื่น ๆ ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเพิ่มเติมและรัดกุมยิ่งขึ้น

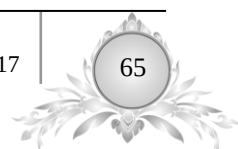
12.2.2 ผลการวิจัยครั้งนี้พบว่ารูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCSE มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ซึ่งนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบ SSCSE มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ดังนั้น จึงควรมีการศึกษาถึงอิทธิพลหลักของการจัดการเรียนรู้ SSCSE กับรูปแบบการจัดการเรียนรู้อื่นต่อเป้าหมายการเรียนรู้ที่ต่างออกไป เช่น ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ความสุขในการเรียนรู้ของนักเรียน เป็นต้น





เอกสารอ้างอิง

- [1] กรมวิชาการ, *กลวิธีการจัดการเรียนการสอนที่สอดคล้องกับวิธีการเรียน (Learning Style)*, กทม: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2544.
Academic Department, *Strategies for Teaching which Consistence by Learning Style*, Bangkok: Kurusapa Lat Phrao Press, 2001 (in Thai).
- [2] กัลยา วาณิชยปัญญา, *หลักสถิติ*, กทม: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2551.
K. Wanitchabancha, *Principle of Statistics*, Bangkok: Chulalongkorn University Press, 2008 (in Thai).
- [3] คณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน, *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*, กทม: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตร, 2551.
Office of the Basic Education Commission, *Core Curriculum for Basic Education Act 2551*, Bangkok: Chumnumgankaset Press, 2008 (in Thai).
- [4] ชานนท์ จันทร, *ขั้นตอนการวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับครู*, กทม: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2553.
C. Jantra, *Algorithm of Math-Proof for Teacher*, Bangkok: Kasetsart University Press, 2010 (in Thai).
- [5] ชูศรี วงศ์รัตนะ, *เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย*, นนทบุรี: ไทเนรมิตกิจ อินเตอร์โปรเกรสซิฟ จำกัด, 2552.
C. Wongrattana, *Technique for Using Statistics for Research*, Nonthaburi: Trinearamitgit Interprogressive, 2009 (in Thai).
- [6] ญาณิศา ศรีโชติ, “การพัฒนาชุดกิจกรรมด้วยวิธีการสอนแบบ SSCS เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1,” การศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง, กศ.ม, มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2554.
Y. Srichoat, “The Development of Learning Kit by SSCS Model Application on Linear Equation with One Variable for Mathayomsuksa 1





Students,” Independent Study of Master Degree on Education, Nareasuan University, 2011 (in Thai).

- [7] ทิศนา แหมมณี, *ศาสตร์การสอน: องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ*, กทม: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552.

T. Kammanee, *Science of Teaching: Knowledge for the Effective in Learning Management*, Bangkok: Chulalongkorn University Press, 2009 (in Thai).

- [8] พิชิต ฤทธิ์บุญ, *หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา*, กทม: เข้า ออฟ เคอร์มิสท์, 2552.

P. Ritjaroon, *Principle of Education Measurement and Evaluation*, Bangkok: House of Kermit, 2009 (in Thai).

- [9] มณีรัตน์ พันธูตา, “การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้รูปแบบ SSCS ร่วมกับกระบวนการแก้ปัญหของ POLYA,” *วารสารศึกษาศาสตร์*, ปีที่ 8, ฉบับที่ 4, 2557.

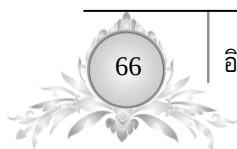
M. Panthuta, “A Study of Mathematics Problem Solving Ability and Achievement of Mathayomsuksa 4 Students by SSCS Model and Polya,” *Journal of Education*, vol. 8, no. 4, 2014 (in Thai).

- [10] ยาวดี ราชชัยกุล วิบูลย์ศรี, *การสร้างแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน*, กทม: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555.

Y. R. Wibunsri, *Construction of Achievement test*, Bangkok: Chulalongkorn University Press, 2012 (in Thai).

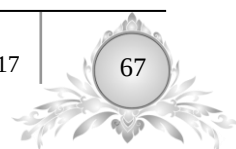
- [11] ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ, *เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้*, กทม: สำนักพิมพ์ชมรมเด็ก, 2543.

L. and A. Saiyot, *Technique of Learning Assessment*, Bangkok: Chomromdek Press, 2000 (in Thai).





- [12] สุภาพร ปิ่นทอง, “การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ และเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCS และการสอนโดยใช้เทคนิค KWDL,” วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2554.
- S. Phindthong, “A Comparison of Mathematics Problem Solving Skills Application of Inequality and Attitudes towards Mathematics of Mathayomsuksa 3 Students, who Learning by SSCS Model and KWDL Technique,” Thesis of Master Degree on Secondary Education, Srinakarinwirot University, 2011 (in Thai).
- [13] อารณ ใจเที่ยง, *หลักการสอน*, กทม: สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์, 2553.
- A. Jaitheang, *Principle of Teaching*, Bangkok: Ordain Store Press, 2010 (in Thai).
- [14] K. David, *The Organizational Behavior Reader*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-hall Inc., 1995.





วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 62(692) May–Aug, 2017

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org>

MathThaiOrg@gmail.com



ความงามทางคณิตศาสตร์กับสะเต็มศึกษา:

Sierpinski Triangle Aesthetic in Mathematics along with STEM Education: Sierpinski Triangle

ปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์

Pivawat Srisangwan

Wangkhoi Pittaya School, Nakhonsawan, 60220, Thailand

Email: pii.piyawat@utd.ac.th

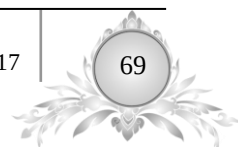
บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหา เรื่อง ลำดับและอนุกรม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งผู้เขียนได้มีโอกาสดลองใช้กับผู้เรียนและพบว่าทำให้ผู้เรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีความเข้าใจสาระหลักเกี่ยวกับลำดับทางคณิตศาสตร์ ใช้ทักษะการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ ภายใต้แนวคิดสะเต็มศึกษา (STEM Education) และที่สำคัญคือทำให้ผู้เรียนมองเห็นความงามที่อยู่ในช่อนวิชาคณิตศาสตร์ นั่นคือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง “แฟร็กทัลสัมพันธ์สะเต็มศึกษา”

คำสำคัญ: สะเต็มศึกษา แฟร็กทัล

ABSTRACT

This article shows the example of learning activity on Mathematics connecting a process of Mathematical problem solving on Sequence & series of eleven grade students. The article found that the students have met the Mathematical skill and process as well as understand the concepts on sequence and use problem solving skill in appropriate way under the concept of STEM





Education. The students also feel the aesthetic in Mathematics through the learning activity of “Fractal and STEM Education”

Keywords: STEM Education, Fractal

1. บทนำ

วิชาคณิตศาสตร์ (Mathematics) ถือเป็นรากฐานสำคัญสำหรับการเรียนรู้วิชาอื่นๆ ในกลุ่มสะเต็มศึกษา ไม่ว่าจะเป็นวิทยาศาสตร์ (Science) เทคโนโลยี (Technology) หรือกระบวนการทางวิศวกรรม (Engineering) ซึ่งล้วนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ได้ทั้งสิ้น ถึงแม้ว่าลำดับของวิชาคณิตศาสตร์ (Mathematics) ในชื่อกลุ่มวิชาสะเต็มศึกษา (STEM Education) จะอยู่ในตำแหน่งสุดท้ายก็ตาม [1] โดยที่การจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สามารถนำแนวคิดสะเต็มศึกษา โดยเฉพาะการส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาต่างๆ อย่างเป็นระบบมาปรับใช้ได้ โดยไม่จำเป็นต้องบูรณาการเข้ากับกลุ่มวิชาอื่นๆ เสมอไป ยกตัวอย่างในบทความนี้ผู้เขียนได้นำเสนอการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้สอนสามารถใช้ความงามของเรขาคณิต (Geometry) ในรูปแบบของงานศิลปะ บูรณาการเข้ากับสาระพีชคณิต (Algebra) ช่วยในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้สะเต็มศึกษา เรื่อง ลำดับและอนุกรม เป็นการใช้องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ที่นักเรียนเคยเรียนมาเป็นเครื่องมือเพื่อช่วยในการแก้ปัญหา

2. แฟร็กทัล (Fractal)

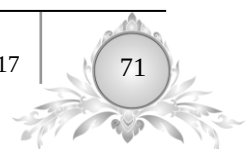
แฟร็กทัล (Fractal) ในปัจจุบันเป็นคำที่ใช้ในเชิงวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ หมายถึง วัตถุทางเรขาคณิต ที่มีคุณสมบัติคล้ายตนเอง คือ ดูเหมือนกันไปหมด (เมื่อพิจารณาจากแง่ใดแง่หนึ่ง) ไม่ว่าจะเป็นดูที่ระดับความละเอียด (โดยการส่องขยาย) หรือสเกลใดก็ตาม แฟร็กทัล (Fractal) ได้ถูกค้นพบมานาน ก่อนที่คำว่า “แฟร็กทัล” จะถูกบัญญัติขึ้นมาใช้เรียกสิ่งเหล่านี้ ในปี ค.ศ.1872 คาร์ล ไวเออร์ชตรัสส์ (Karl Weierstrass) ได้ยกตัวอย่างของฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติ “everywhere continuous but nowhere differentiable” คือ มีความต่อเนื่องที่ทุกจุด แต่ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ ต่อมาในปี ค.ศ.1904 เฮลเก ฟอน ค็อค (Helge Von Koch) ได้ยกตัวอย่างทางเรขาคณิต ซึ่งได้รับการเรียกขานในปัจจุบันนี้ว่า

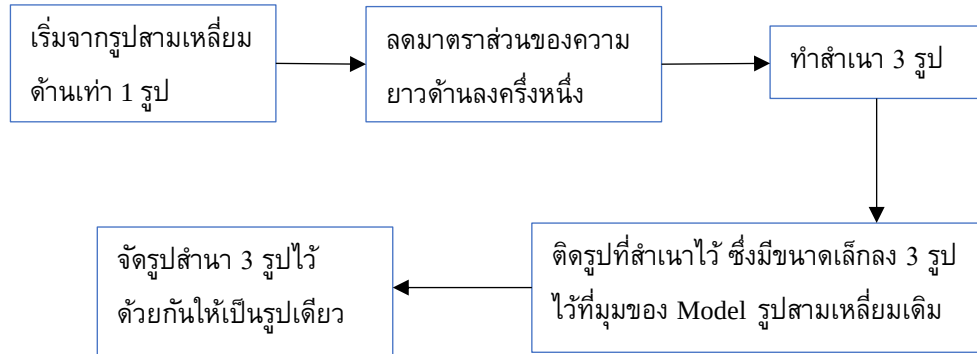
“เกล็ดหิมะค็อค” (Koch Snowflake) ต่อมา เกอร์ค คันทอร์ (Georg Cantor) ได้ยกตัวอย่างของ เซตย่อยของจำนวนจริง ซึ่งมีคุณสมบัติแฟร็กทัลนี้ เป็นที่รู้จักกันในชื่อ เซตคันทอร์ หรือ ฝุ่นคันทอร์ นอกจากนี้ยังมี นักคณิตศาสตร์อีกหลายคนในช่วงปลายคริสต์ศตวรรษที่ 19 ถึงต้นคริสต์ศตวรรษที่ 20 เช่น อองรี ปวงกาเร (Henri Poincare), เฟลิกซ์ คลิน (Felix Klein), ปีแอร์ ฟาตู (Pierre Fatou) และ กาสตง จูเลีย (Gaston Julia) ได้ศึกษาฟังก์ชันวนซ้ำ (Iterated Function) ซึ่งมีคุณสมบัติความคล้ายตนเอง (Self-similarity) ซึ่งความคล้ายตนเองเกิดขึ้นเมื่อโครงสร้างมีรูปแบบซ้ำๆ ของภาพที่เล็กลงๆ ที่ยังอยู่ในตัวมันในมาตราส่วนที่แตกต่างกัน

3. รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกี (Sierpinski Triangle)

รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกี (Sierpinski Triangle) เป็นแฟร็กทัล ประเภทหนึ่งของรูปเรขาคณิต ได้รับการตั้งชื่อครั้งแรกในปี ค.ศ. 1970 โดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ บีนอยท์ แมนเดลบร็อท (Benoit Mandelbrot) สร้างขึ้นโดยกระบวนการทำซ้ำ โดยจะเริ่มจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหนึ่งรูป และครั้งต่อไปจะใช้รูปที่เกิดขึ้นเป็นรูปใหม่ที่จะสร้างต่อไป โครงสร้างที่ซับซ้อนดังกล่าวมีความน่าสนใจ ด้วยความงดงามที่มีอนุภาพ สมบัติทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่ซ่อนอยู่ในโครงสร้างนี้ ปรากฏให้เห็นมากมายอย่างน่าอัศจรรย์ มีกระบวนการสร้าง ดังนี้

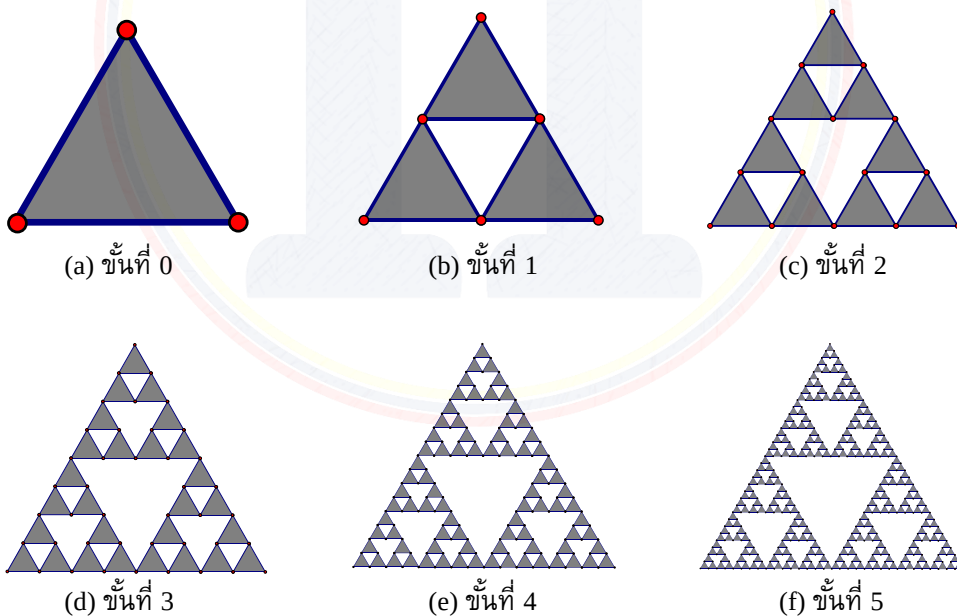
1. เริ่มจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 1 รูป
 2. ลดมาตราส่วนของความยาวด้านลงครึ่งหนึ่ง
 3. ทำซ้ำ 3 รูป
 4. ดัดรูปที่สำเนาไว้ ซึ่งมีขนาดเล็กลง 3 รูปไว้ที่มุมของรูปสามเหลี่ยมเดิม
 5. จัดรูปสำเนา 3 รูป (ดังข้อ 4) ไว้ด้วยกันให้เป็นรูปเดียว
 6. จากข้อ 5 ดำเนินการซ้ำตั้งแต่กระบวนการในข้อ 2 ลงมา
- โดยมีแผนผังที่แสดงการสร้างดังนี้





รูปที่ 1 กระบวนการสร้างรูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกี (Sierpinski Triangle)

เมื่อดำเนินการตามกระบวนการดังกล่าว โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) แล้วจะได้รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกี (Sierpinski Triangle) มีลักษณะ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2 (a)-(f) รูปสามเหลี่ยมเซียร์พินสกี (Sierpinski Triangle) ขั้นที่ 0 ถึง ขั้นที่ 5 ตามลำดับ

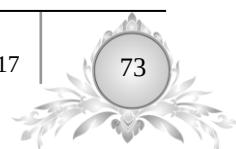
โดยการทำการกระบวนกรข้างต้นซ้ำแล้วซ้ำอีก โดยแต่ละครั้งจะใช้รูปที่เกิดขึ้นเป็นรูปใหม่ที่จะสร้างต่อไป โครงสร้างที่ซับซ้อนน่าตื่นตาตื่นใจด้วยความงามที่มีอนุภาพและสมบัติทางคณิตศาสตร์จะเริ่มปรากฏออกมา จากกระบวนการสร้างรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี (Sierpinski Triangle) ข้างต้น จะเห็นว่าผู้เรียนได้ใช้กระบวนการทางวิศวกรรมสร้างแบบรูปที่มีคุณสมบัติคล้ายตนเอง (Self-similarity) เพื่อศึกษาสมบัติทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่ซ่อนอยู่ในโครงสร้างนี้

4. ความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่ซ่อนอยู่ในรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี

ความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่น่าสนใจหลายเรื่องสามารถสำรวจและค้นหา ทำให้อยู่ในรูปทั่วไป (General Form) ได้โดยให้นักเรียนใช้รูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกีที่สร้างขึ้นโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) บางเรื่องได้ให้ไว้ในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ความสัมพันธ์เชิงตัวเลขในรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี

รูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี ขั้นที่	0	1	2	3	4	5	n
จำนวนรูปสามเหลี่ยมสีทึบ	1	3	9	27	81	243	3^n
จำนวนรูปสามเหลี่ยมสีขาว	0	1	4	13	40	121	$\frac{3^n - 1}{2}$
จำนวนจุดยอดมุมของรูป สามเหลี่ยมสีทึบ	3	6	15	42	123	366	$a_{n-1} + 3^n$ ($a_0 = 3$)
จำนวนจุดยอดมุมของรูป สามเหลี่ยมสีขาว	0	3	12	39	120	363	$\frac{3 \cdot 3^n - 1}{2}$
อัตราส่วนระหว่างจำนวนรูป สามเหลี่ยมสีทึบกับจำนวนรูป สามเหลี่ยมทั้งหมด	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{243}{1024}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$
เส้นรอบรูปรอบ ๆ รูป สามเหลี่ยมสีทึบ	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n$





ตัวอย่าง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับของจำนวนรูปสามเหลี่ยมสืบทับ

ลำดับของจำนวนรูปสามเหลี่ยมสืบทับในรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี คือ 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

เราจะหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... ได้ดังนี้

กำหนดให้ n แทน จำนวนขั้นของการสร้างรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี และ

a_n แทน พจน์ที่ n ของลำดับของจำนวนรูปสามเหลี่ยมสืบทับ

จากลำดับ 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... เราจะได้ว่า

$$a_0 = 1 = 3^0$$

$$a_1 = 3 = 3^1$$

$$a_2 = 9 = 3^2$$

$$a_3 = 27 = 3^3$$

$$a_4 = 81 = 3^4$$

$$a_5 = 243 = 3^5$$

$$\vdots$$

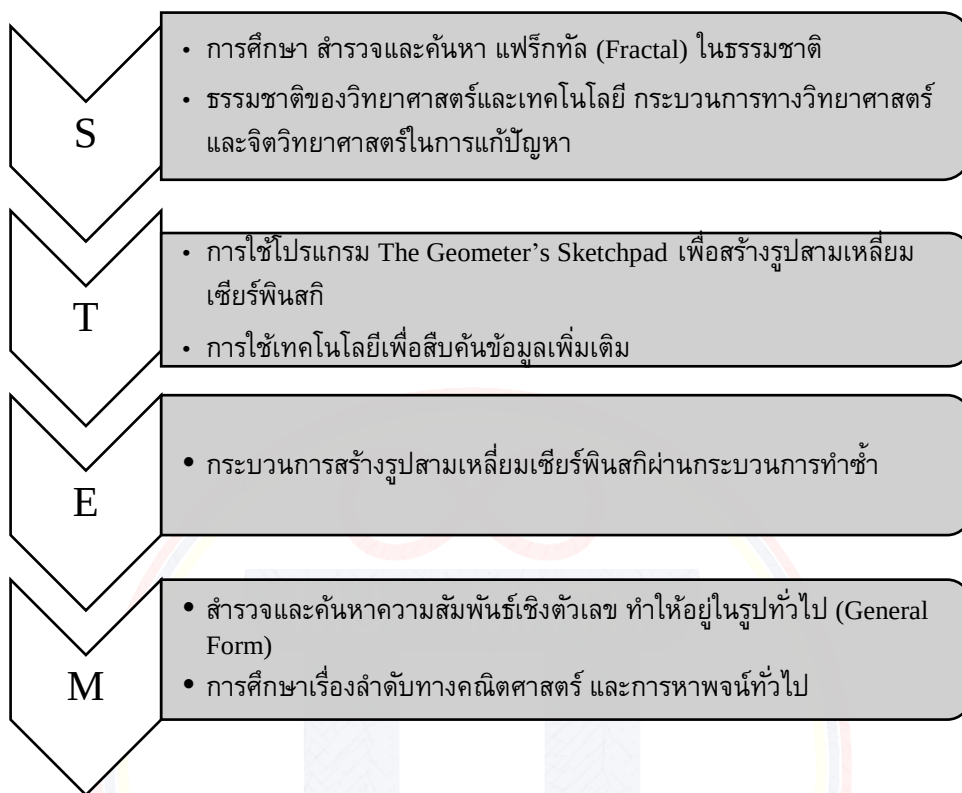
$$a_n = 3^n$$

ดังนั้น ลำดับ 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... นี้ จะมีพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 3^n$ เราจึงได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมสืบทับในรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี คือ $a_n = 3^n$ เมื่อ n แทน จำนวนขั้นของการสร้างรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี ■

ในสภาพที่กำหนดใดๆ ขั้นตอนถัดไปจะมีรูปสามเหลี่ยมเป็นสามเท่าของชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมเสมอ ดังนั้นรูปจะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา แต่สภาพที่จำกัดภาพที่ย่อส่วนยังจะอยู่เหมือนภาพทั้งภาพแน่นอน ภาพในอุดมคติเช่นนี้คือสิ่งที่เป็
รูปธรรม ภาพที่ดีที่สุดที่สามารถแสดงได้คือ ขั้นตอนจำกัดบางขั้น ซึ่งผู้สอนอาจเชื่อมโยงให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับจำกัด (Finite Sequence) และลำดับอนันต์ (Infinite Sequence)

5. คำถามท้าทายความคิดของนักเรียน (Intellectual Challenge to Learners)

1. เพราะเหตุใดลำดับของการศึกษาความสัมพันธ์เชิงตัวเลขที่ซ่อนอยู่ในรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี (Sierpinski Triangle) จึงเริ่มต้นที่ a_0
2. ร่วมกันศึกษาความงามทางคณิตศาสตร์รูปแบบอื่นๆ ที่มีคุณสมบัติคล้ายตนเอง (Self-similarity) เช่น เส้นโค้งค็อค, เส้นโค้งมังกร, Peano Curve, แฟร็กทัลในทางศิลปะ เป็นต้น สามารถต่อยอดเป็นโครงการคณิตศาสตร์หรือโครงการสะสมเติมศึกษาได้หรือไม่ อย่างไร
3. ในธรรมชาติเราสามารถพบ แฟร็กทัล (Fractal) ได้จากสิ่งใดได้บ้าง จงยกตัวอย่าง
4. รูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกี (Sierpinski Triangle) กับลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence) มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ อย่างไร
5. ให้นักเรียนนำรูปสามเหลี่ยมเชียร์พินสกีที่สร้างขึ้น ไปต่อยอดหรือพัฒนาเป็นผลงานหรือนวัตกรรมที่นักเรียนสนใจ เช่น ลวดลายของเสื้อยืด, ลายกระเบื้อง, ลายเสื้อ ฯลฯ ทั้งนี้อาจทำในรูปแบบของโครงการหรือนวัตกรรม/ สิ่งประดิษฐ์ ตามความสามารถและความสนใจของนักเรียน



รูปที่ 3 เชื่อมโยงกิจกรรม “แฟร็กทัลสัมพันธ์สะเต็มศึกษา” กับกลุ่มวิชาใน STEM Education

แม้ว่าสะเต็มศึกษาจะไม่ได้มีคำจำกัดความที่ชัดเจน แต่หากพิจารณาส่วนของแนวความคิดและหลักการ ก็เห็นว่าส่วนใหญ่จะอยู่บนพื้นฐานเดียวกัน คือความต้องการที่จะพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความคิดในการแก้ไขปัญหาที่พบเห็นในชีวิตจริง สร้างเสริมประสบการณ์ ทักษะชีวิต (ทักษะในศตวรรษที่ 21) มีความคิดสร้างสรรค์ และเตรียมความพร้อมให้กับนักเรียนในการปฏิบัติงาน (อาชีพ) ที่ต้องใช้องค์ความรู้และทักษะกระบวนการด้านต่างๆ ที่กำลังจะเกิดขึ้นอย่างมากมายในอนาคตได้ [3]

บางครั้งเราอาจเจอการเพิ่มศาสตร์ทางศิลปะ (Arts) เข้าไปใน STEM Education จะช่วยทำให้นักเรียนได้มีโอกาสได้ถ่ายทอดหรือประยุกต์ใช้ความคิดรวบยอด (Concept) ด้วยความคิดสร้างสรรค์และมีจินตนาการมากยิ่งขึ้น นักเรียน

สามารถสื่อสารความคิดของตนเองออกมาในรูปแบบของดนตรีและการเคลื่อนไหว การสื่อสารด้วยภาษาท่าทาง หรือการสื่อสารออกมาในรูปแบบของการวาดภาพ หรือการสร้างโมเดลจำลอง แม้ว่าจิตรกรจะบอกเราว่าสัญลักษณ์บางอย่างของ คณิตศาสตร์ เช่น การสมมาตร การเท่ากัน การไม่เท่ากัน สิ่งเหล่านี้มักจะเกี่ยวข้องกับ ศิลปะ แต่ศิลปะจริงๆ ไม่ต้องการ การบวก การลบ การหารหรือการคูณ แต่ อย่างไม่ แต่ถ้าเราสังเกตให้ดีเราจะพบว่ารูปเรขาคณิตต่าง ๆ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม มักปรากฏบนรูปภาพเสมอและบางครั้งจำเป็นต้องใช้การ คำนวณทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ภาพที่สร้างมีความสวยงาม สมมาตร สัดส่วน ถูกต้อง ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่าศิลปะและคณิตศาสตร์เกี่ยวเนื่องกัน แม้ว่าเวลาจะ เปลี่ยนไปนานแค่ไหนศิลปะมักคู่กับคณิตศาสตร์เสมอ

6. บทสรุป

จากตัวอย่างการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม ใน บทความนี้ คงแสดงให้เห็นแล้วว่าคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์อย่างใกล้ชิดต่อวิชา วิทยาศาสตร์เทคโนโลยี และการออกแบบทางวิศวกรรมในกลุ่มวิชาสะเต็มศึกษา เพียงใด ทำให้นักเรียนเห็นว่าการศิลปะทางคณิตศาสตร์ ถ้ามีแบบแผนที่แน่นอน แม่นยำและมีการวางแผนกำหนดโครงสร้างอย่างเรียบร้อยแล้ว เมื่อนำเข้าสู่ กระบวนการออกแบบทางวิศวกรรมหรือเข้าสู่ระบบเทคโนโลยีสมัยใหม่ เช่น คอมพิวเตอร์ ทำให้เกิดภาพที่สวยงาม และสามารถพัฒนางานศิลปะทาง คณิตศาสตร์ได้มากขึ้น [2] สำหรับแบบรูป (Pattern) ที่เกิดขึ้นนั้น อาจจะขึ้นอยู่กับพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา แบบจำลองทางเทคโนโลยี หรือ ทางวิทยาศาสตร์อื่นๆ ดังตัวอย่าง





รูปที่ 3(a) ภาพใบเฟิร์นที่สร้างโดยคอมพิวเตอร์โดยเทคนิคแฟร็กทัล



รูปที่ 3(b) บร็อกโคลีชนิดหนึ่ง (Romanesco Broccoli) มีลักษณะของแฟร็กทัล



รูปที่ 3(c) การงอกของผลึกทองแดงในสารละลายคอปเปอร์ซัลเฟตในการชุบโลหะด้วยไฟฟ้า



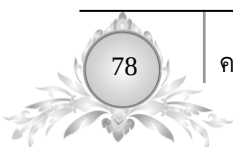
รูปที่ 3(d) แฟร็กทัลเกิดขึ้นเมื่อตีแผ่นออริลิกที่ติดกันด้วยกาวออกจากกัน

รูปที่ 3(a)-(b) การเกิดแบบรูป (Pattern) โดยพื้นฐานทางชีววิทยา

รูปที่ 3(c)-(d) การเกิดแบบรูป (Pattern) โดยพื้นฐานทางเคมี

ที่มา: <https://th.wikipedia.org/wiki/แฟร็กทัล>

นอกจากนี้แฟร็กทัลยังพบในศาสตร์อื่นๆ เช่น การป้อนไฟฟ้าแรงสูงให้กับก้อนออริลิกจนแตกให้เห็นรูปแฟร็กทัลที่เรียกว่า Lichtenberg Figure, แฟร็กทัลที่เกิดขึ้นจากรอยแตกบนผิวของแผ่นดีวีดีเมื่อโดนรังสีจากไมโครเวฟ และพบได้ในงานศิลปะ ตัวอย่างเช่นภาพเขียนของจิตรกรชาวอเมริกัน แจ็คสัน พอลล็อก

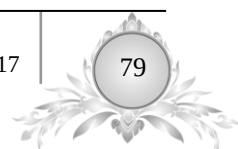




(Jackson Pollock) ซึ่งดูผิวเผินจะประกอบด้วยหยดหมึกหรือแต้มหมึกที่ไม่เป็นระเบียบ แต่จากการวิเคราะห์ด้วยคอมพิวเตอร์ก็พบรูปแบบของแฟร็กทัลในงานของเขา เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] อลงกต ใหม่ดั่ง, “เชื่อมโยงความคิดคณิตสะเต็ม,” นิตยสารสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.), ปีที่ 42, ฉบับที่ 186, pp. 16-20, 2557.
A. Maidoung, “Using Mathematical ideas to link STWM Education,” *Magazine by the Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology*, vol. 42, no. 186, pp. 16-20, 2014 (in Thai).
- [2] นิวตรอนดอทอาร์เอ็มยูทีฟิสิกส์ดอทคอม. 2017. ศิลปะทางคณิตศาสตร์. สืบค้นวันที่ 19 มีนาคม 2560 จาก <https://goo.gl/P7Ps60>
Neutron.rmutphysics.com. 2017. *Math Art*. Retrieved 19 March 2017 from <https://goo.gl/P7Ps60>
- [3] สไลด์แชร์ดอทเน็ต. 2017. การจัดการเรียนรู้ตามแนวทางสะเต็มศึกษา. สืบค้นวันที่ 19 มีนาคม 2560 จาก <https://www.slideshare.net/wawachira/stem-education-62525207>
Slideshare.net. 2017. *STEM Education: The Innovative Way of Learning*. Retrieved 19 March 2017 from <https://www.slideshare.net/wawachira/stem-education-62525207>





XX



1. บทนำ

ขอให้ผู้เขียนปฏิบัติตามข้อกำหนดการพิมพ์ตามรูปแบบที่ปรากฏใน Template นี้อย่างเคร่งครัด

บทนำในวารสารเป็นส่วนของความสำคัญและมูลเหตุที่นำไปสู่การวิจัย พร้อมวัตถุประสงค์ และอาจมีส่วนการสำรวจเอกสาร/งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง รูปแบบของตัวหนังสือในส่วนเนื้อหาหลักทั้งหมด เป็นดังนี้: ภาษาไทยใช้ 16-pt Browallia New ภาษาอังกฤษใช้ 12-pt Times New Roman

ผู้เขียนบทความควรตรวจสอบความถูกต้องของการพิมพ์ เช่น ตัวสะกดวรรคตอน และความเหมาะสม รวมถึงความไพเราะของการใช้ภาษา โดยใช้คำศัพท์ตามราชบัณฑิตยสถาน และระบุประเภทของบทความให้ชัดเจนว่าเป็นบทความประเภทใด

2. คำแนะนำในการพิมพ์

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงข้อควรปฏิบัติทั่วไปในการพิมพ์บทความ โดยมีสาระสำคัญสังเขปดังนี้

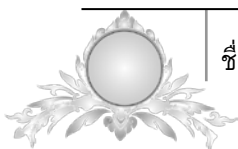
2.1 คำแนะนำทั่วไป

พิมพ์บทความภาษาไทยใช้ 16-pt Browallia New ภาษาอังกฤษใช้ 12-pt Times New Roman การขึ้นย่อหน้าใหม่ใช้ First Line Indent เท่ากับ 0.5 inches

เว้นทุกอย่างเพียง 1 ช่องว่าง (1 Space Bar) เช่นระหว่างประโยค ระหว่างคำภาษาอังกฤษ ระหว่างตัวเลข หรือ ตัวแปร หรือ การแจกแจงรายการสิ่งของ เช่น 1, 2, 3 หรือ x, y, n และเว้นหลังเครื่องหมาย “ๆ” เช่น “ศึกษาและลงมือทำซ้ำๆ จนกว่าจะเข้าใจ”

ถ้ามีคอมม่า ให้พิมพ์เครื่องหมายคอมม่าติดตัวอักษรสุดท้าย แล้วจึงเว้น 1 ช่อง ก่อนตามด้วยข้อความถัดไป เช่น 1, 2, 3 ไม่ใช่ 1, 2, 3 และไม่ใช่ 1, 2, 3

ถ้ามีวงเล็บ ให้เว้น 1 ช่องว่างก่อนเปิดวงเล็บ จากนั้นตามด้วยข้อความในวงเล็บ และวงเล็บปิดติดตามมาเลย จากนั้นเว้น 1 ช่องว่าง ก่อนขึ้นข้อความถัดไป เช่น พีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) หรือ $A = \{a, b, c\}$





เครื่องหมายลบ อย่าใช้ - (Hyphen) ให้ใช้เป็น – (Dash) ซึ่งได้จากการกด Ctrl พร้อมเครื่องหมายลบที่เป็นตัวเลข

ถ้ามีตัวแปร หรือ ตัว Parameter ต่างๆ เช่น x, y, n ให้พิมพ์ด้วยตัวเอนให้หมด ที่เฉพาะตัวเหล่านั้น โดยไม่รวมเครื่องหมายคอมม่าหรือวงเล็บ เช่น (x, y, n) ไม่ใช่ (x, y, n) เช่น (x_i, y_j, n_5) ไม่ใช่ (x_i, y_j, n_5) สังเกตว่าตัวห้อย i, j ต้องเอน เนื่องจากเป็น Parameter แต่เลข 5 เป็นค่าคงที่ จึงไม่ต้องเอน

การพิมพ์คำเฉพาะตัวภาษาอังกฤษ ให้ขึ้นต้นแต่ละคำด้วยตัวใหญ่ แล้วตามด้วยตัวเล็ก เช่น Management Information System ไม่ใช่ Management information system

2.2 หัวข้อและหัวข้อย่อย

หัวข้อและหัวข้อย่อยให้วางชิดขอบซ้าย การลำดับหัวข้อในส่วนของเนื้อหา ให้ใช้เลขกำกับ โดยให้บทหน้าเป็นหัวข้อหมายเลข 1 และหากมีการแบ่งหัวข้อย่อยให้ใช้เลขระบบทศนิยมกำกับหัวข้อย่อย เช่น 2.1 เป็นต้น

3. การเขียนสมการ

ถ้ามีสมการ ห้าม crop เป็นภาพมา ต้องเขียนขึ้นใหม่ หลีกเลี่ยงการใช้ Equation หรือ MathType ให้มากที่สุด ตัวแปร ตัวเอน ตัวหนา ต่างๆ สามารถทำได้ใน Word ปกติ ตัวห้อย (กด Ctrl + =) ตัวยก (กด Ctrl + Shift + =) อักษรพิเศษให้เลือกรจาก Insert Symbol เลือก Font เป็น Symbol

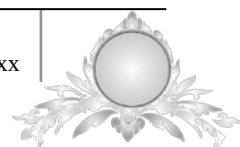
ให้เขียนสมการตรงกลางของหน้ากระดาษ และทุกสมการจะต้องมีลำดับหมายเลขกำกับโดยเขียนอยู่ในวงเล็บวงไว้ชิดขอบขวา ดังตัวอย่าง ตัวอักษรในสมการใช้ 12-pt Times New Roman ตัวอย่างของการเขียนสมการเป็นดังนี้

$$a = b + c \quad (1)$$

ส่วนการอ้างอิงให้ใช้คำว่า สมการที่ ตามด้วยตัวเลข เช่น สมการ (1)

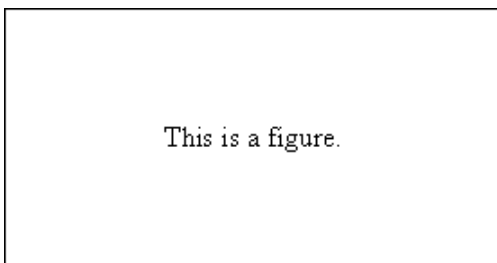
4. การใส่รูปภาพและตาราง

รูปภาพควรมีความคมชัด และมีขนาดใหญ่พอที่จะสามารถมองเห็นรายละเอียดและอ่านตัวหนังสือในภาพได้ชัดเจน รูปภาพลายเส้นจะต้องใช้เส้นหมึกสีดำ ส่วนรูปถ่ายควรจะเป็นภาพขาวดำที่มีความคมชัด นอกจากนี้รูปทุกรูปจะต้องมี





หมายเลขและคำบรรยายภาพกำกับได้รูป โดยควรมีความยาวมากที่สุดไม่เกิน 2 บรรทัด จัดเรียงชิดซ้าย ตัวอักษรภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New ภาษาอังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman



รูปที่ 1 ตัวอย่างรูปและการเขียนคำบรรยายได้รูป

ที่มา/Source: แหล่งที่มาของข้อมูล (ถ้ามี)

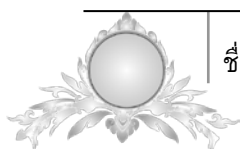
กรณีตาราง หมายเลขและคำบรรยายกำกับตารางจะอยู่เหนือตาราง โดยมีความยาวมากที่สุดไม่เกิน 2 บรรทัด จัดเรียงชิดซ้าย ตัวอักษรคำบรรยายตารางและตัวอักษรในตาราง ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New ภาษาอังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman

จงวางตารางและรูปในตำแหน่งที่ใกล้เคียงกับจุดที่อ้างถึงให้มากที่สุด เมื่อต้องการอ้างอิง ให้ใช้คำว่า ตารางที่ หรือ รูปที่ ตามด้วยหมายเลข เช่น ตารางที่ 1 หรือ รูปที่ 1 หากมีรูปย่อย ให้ใช้ (a) (b) หรือ (c) และเมื่ออ้างถึง ให้ใช้ว่า รูปที่ 1(a)

ตารางที่ 1 ตัวอย่างการเขียนตาราง

หัวข้อ	หัวข้อ	หัวข้อ	หัวข้อ
ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New อังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman	ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New อังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman	ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New อังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman	ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New อังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman
จัดให้สวยงาม มอง เห็นชัด อ่านได้	จัดให้สวยงาม มอง เห็นชัด อ่านได้	จัดให้สวยงาม มอง เห็นชัด อ่านได้	จัดให้สวยงาม มอง เห็นชัด อ่านได้

ที่มา/Source: แหล่งที่มาของข้อมูล (ถ้ามี)



5. สรุป

ผู้เขียนบทความควรตรวจสอบความรอบคอบโดยใช้เวลาอย่างพอเพียง ก่อนส่งให้กรรมการพิจารณา จะทำให้บทความของท่านมีคุณภาพสูงและผ่านการพิจารณาได้ง่ายขึ้น

6. กิตติกรรมประกาศ (ถ้ามี)

ขอขอบคุณผู้ส่งบทความทุกท่านที่ปฏิบัติตามข้อกำหนดการพิมพ์ตามรูปแบบใน Template นี้อย่างเคร่งครัด

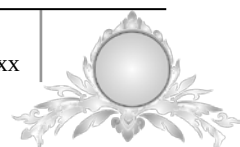
เอกสารอ้างอิง

ทุกรายการเอกสารอ้างอิงต้องเป็นไปตามลำดับก่อน-หลัง (in order of appearance) ในเนื้อหา และทุกรายการต้องปรากฏในเนื้อหา (in-text citations) โดยใช้การอ้างอิงรูปแบบ [1] หรือ [2, 3] หรือ [4-6] เป็นต้น สำหรับรายการภาษาไทย นอกจากการเขียนรายการอ้างอิงนั้นเป็นภาษาไทยแล้ว จะต้องแปลเป็นภาษาอังกฤษด้วย แต่ยังคงอยู่ในลำดับเลขข้อเดียวกัน แล้ววงเล็บ (in Thai) ไว้

ในกรณีที่ผู้เขียนมากกว่า 1 คน ให้แจกแจงรายชื่อออกมาทั้งหมด (ห้ามใช้ et al.) กรณีรายการภาษาไทย ให้เว้นวรรคระหว่างรายชื่อ ไม่ต้องคั่นด้วยเครื่องหมายคอมม่า หน้าชื่อสุดท้ายให้ใช้คำว่า และ กรณีรายการภาษาอังกฤษ ถ้ามีผู้เขียนเพียง 2 คน ไม่ต้องใช้เครื่องหมายคอมม่า , ใช้คำว่า and คั่นกลาง ถ้ามีผู้เขียนตั้งแต่ 3 คนขึ้นไป ให้คั่นระหว่างรายชื่อด้วยคอมม่า , และชื่อสุดท้ายให้เพิ่มคำว่า and เข้าไปด้วย

For books

- [1] ญัฐไชย์ สีนาวงศ์, *การวิจัยดำเนินงาน*, กทม: หจก. มิน เซอร์วิส ซัพพลาย, 2554.
C. Leenawong, *Operations Research*, Bangkok: Mean Service Supply, 2011
(in Thai).
- [2] J. K. Lastname1, C. R. Lastname2, and A. B. Lastname3, *Title of the Published Book*, xth ed. City of Publisher, Country: Publisher, year.





For periodicals and journals

- [3] ปรัชญา บุญขวัญ และเทพชัย ทรัพย์นันทิ, “ภาษาซ่อนคณิต,” วารสารคณิตศาสตร์ โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์, ปีที่ 59, ฉบับที่ 667-669, pp. 13-22, 2558.

P. Boonkwan and T. Subnithi, “Hidden Math in Language,” *Math Journal by the Mathematical Association of Thailand*, vol. 59, no. 677-679, pp. 13-22, 2015 (in Thai).

- [4] J. K. Author, “Name of Paper,” *Title of Periodical*, vol. x, no. xx, pp. xxx-xxx, year.

For reports

- [5] ธนาคารแห่งประเทศไทย, “สภาพเศรษฐกิจของประเทศไทยในปี 2555,” ธนาคารแห่งประเทศไทย, กทม., 2556.

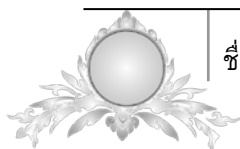
Bank of Thailand, “Thailand's Economic Conditions in 2012,” Bank of Thailand, Bangkok, 2013 (in Thai).

- [6] J. K. Author, “Title of Report,” Name of Co., City of Co., Abbrev. State, Report xxx, year.

For conference articles

- [7] กัญญาณี แซ่ฉั่ว จุฑารัตน์ จันชัยภูมิ ฅภัทร วิลโลโรจน์วรกุล และณัฐไชย์ สีนาวงศ์, “การหาปริมาณการสั่งซื้อเมื่อพิจารณาการแบ่งกลุ่ม ABC แบบถ่วงน้ำหนักหลายเกณฑ์สินค้าคลังสำรอง และการพยากรณ์อุปสงค์,” ใน *การประชุมวิชาการมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลตะวันออก ครั้งที่ 9*, พัทยา, 11-13 พฤษภาคม 2559, pp. 55-62.

K. Saechou, J. Junchaiyapoom, N. Wilairojworakul, and C. Leenawong, Order Quantity Incorporating Weighted Multiple ABC, Safety Stock, and Demand Forecasting,” in *the 9th Rajamangala University of Technology Tawan-ok Academic Conference*, Pattaya, 11-13 May 2016, pp. 55-62 (in Thai).





- [8] J. K. Author, "Title of Paper," in *Name of Conf.*, City of Conf., State, days month year, pp. xxx-xxx.

For senior projects, theses, and dissertations

- [9] ปิยพรรณ กลั่นกลิ่น, "ปัจจัยด้านส่วนประสมการตลาดบริการที่มีผลต่อผู้บริโภคในการเลือกใช้บริการโรงพยาบาลเอกชนในเขตอำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่," วิทยานิพนธ์บริหารธุรกิจมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่, 2546.

- [10] คทา ถิตย์เจิม และศุภโชค ชื้อตรง, "หุ่นยนต์บังคับด้วยระบบไร้สายผ่านคอมพิวเตอร์," โครงการงานนักศึกษาวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น, 2554.

K. Titjerm and S. Suetrong, "A Wireless-Remote-Controlled Robot," Senior Project, Faculty of Engineering, Khonkaen University, 2011 (in Thai).

- [11] J. K. Author, "Title of Thesis," M.S. thesis, Dept., Univ., City of Univ., State, year.

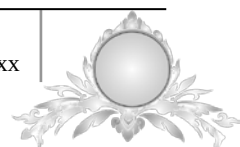
For online sources

- [12] กระปุกดอทคอม. 2016. *เปิดเรตค่าจ้างเน็ตไอดอล*. สืบค้นวันที่ 1 มิถุนายน 2559 จาก <http://money.kapook.com/view149609.html>

Kapook.com. 2016. *Net Idol's Hiring Rate Revealed*. Retrieved 1 June 2016 from <http://money.kapook.com/view149609.html> (in Thai)

- [13] Wikipedia. 2009. *Corporate Social Responsibility*. Retrieved 28 May 2009 from http://en.wiki.pedia.org/wiki/Corporate_Social_Responsibility

- [14] J. K. Author. year. *Title*. Retrieved dd mmm yyyy from <http://...>





รายชื่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ ปี 2559 - 2561

ลำดับที่	ชื่อ - นามสกุล	ตำแหน่ง
1	ผศ.ดร.รจิต วัฒนสินธุ์	นายกสมาคม
2	ดร.ฉวีวรรณ กীরติกร	อุปนายก
3	รศ.ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	เลขาธิการ
4	รศ.ดร.อิมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์	รองเลขาธิการ
5	รศ.สุรวิทย์ ตันเต่งผล	เหรัญญิก
6	ผศ.ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ	ผู้ช่วยเหรัญญิก
7	รศ.ภรณ์ เจริญภักตร์	ปฎิคม
8	รศ.ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์	บรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์
9	ศ.ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	กรรมการ
10	รศ.ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
11	รศ.ดร.นพพร แหยมแสง	กรรมการ
12	รศ.ดร.พัชรา ไชยสุริยา	กรรมการ
13	รศ.ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์	กรรมการ
14	รศ.ดร.อมร วาสนาวิจิตร	กรรมการ
15	รศ.ดร.วิชาญ ลิ่วกัรติยกุล	กรรมการ
16	รศ.ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	กรรมการ
17	รศ.ศรีเสงี่ยม จักรใจ	กรรมการ
18	ผศ.ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
19	ผศ.ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
20	ผศ.สุพัตตา ปวนะฤทธิ์	กรรมการ
21	ผศ.ลออ ชนวิริยะ	กรรมการ
22	ดร.ปานทอง กุลนาถศิริ	กรรมการ
23	ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์	กรรมการ
24	ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์	กรรมการ
25	อ.นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
26	ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	
27	ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์ฯ	

