วารสารคณิตศาสตร์
MJ - MATh

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Math Journal by the Mathematical Association of Thailand

www.MathThai.Org Email: MathThaiOrg@gmail.com

ISSN: 0858-4788

ปริมา ๖๒ ฉบับที่ ๖๙๑ ประจำเดือน มกราคม - เมษายน ๒๕๖๐ Volume 62 Number 691 January - April 2017

บทความวิชาการ Academic Article

บทความวิจัย Research Article

บทความทั่วไป General Article

Editor's Note

จากใจบรรณาธิการ
วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา ๖๒ ฉบับที่ ๖๙๑ ประจำเดือน มกราคม - เมษายน ๒๕๖๐

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เดินทางสู่ปีที่ 62 อย่างมั่นคง ในฉบับนี้ เรามีบทความวิชาการที่อ่านง่าย ได้ความรู้ จากสองผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ ทั้งเรื่องเกี่ยวกับลำดับฟีโบนักชี โดย ผศ.ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์ จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ โดย รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

นอกจากนี้ เรายังมีบทความวิจัยที่น่าสนใจจากอาจารย์นักวิจัยชั้นนำแห่งมหาวิทยาลัยบูรพา และบทความทั่วไปที่เกี่ยวกับความฉลาดของมนุษย์เปรียบเทียบกับความฉลาดของเครื่องจักร/คอมพิวเตอร์ เราใกล้จะถึงยุคคอมพิวเตอร์ครองโลกจริงๆ แล้วใช่ไหม?

สำหรับการสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ สามารถสมัครผ่านเว็บไซต์ของสมาคมฯ ได้โดยตรงที่ www.mathassociation.net หรือติดต่อสมาคมได้ที่อีเมล์ Ranoo.T@chula.ac.th โทร./แฟกซ์ 02-252-7980 ส่วนผู้ที่สนใจจะส่งบทความเพื่อรับการพิจารณาตีพิมพ์ จะต้องปฏิบัติตามรูปแบบการพิมพ์ของวารสารอย่างเคร่งครัด ดังตัวอย่างในท้ายเล่มวารสารนี้ โดยสามารถดาวน์โหลดไฟล์ Template.doc และจัดส่งบทความ รวมถึงเข้าไปอ่านวารสารฉบับอิเล็กทรอนิกส์ ได้ที่ www.MathThai.org

(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์)
หัวหน้ากองบรรณาธิการ

MathThaiOrg@gmail.com

DrChartchai Leenawong

MJ - MATh

คณิตศาสตร์
เสาหลักแห่งความรู้...ไม่รู้จบ!

วารสารคณิตศาสตร์
MJ - MATh

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Math Journal by the Mathematical Association of Thailand

www.MathThai.Org Email: MathThaiOrg@gmail.com

ISSN: 0858-4788

ปริมา ๖๒ ฉบับที่ ๖๙๑ ประจำเดือน มกราคม - เมษายน ๒๕๖๐ Volume 62 Number 691 January - April 2017

บทความวิชาการ Academic Article

บทความวิจัย Research Article

บทความทั่วไป General Article

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปทุมวัน กทม. 10330
ISSN: 0858-4788 Math Journal by
the **M**athematical **A**ssociation of **Th**ailand Under the Patronage of His Majesty the King
Faculty Science, Chulalongkorn University, Pathumwan, Bangkok 10330
Tel./Fax. +66 2252 7980 http://MathThai.Org Email: MathThaiOrg@gmail.com

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh ISSN: 0858-4788
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
Math **J**ournal by the **M**athematical **A**ssociation of **Th**ailand
ปริมา ๖๒ ฉบับที่ ๖๙๑ ประจำเดือน มกราคม – เมษายน ๒๕๖๐
Volume 62 Number 691 January – April 2017

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ.พญาไท ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทรศัพท์/โทรสาร 02-252-7980

พิมพ์ที่ *หจก. มีน เซอร์วิส ซัพพลาย* 29/98 หมู่ 3 ถนนสุวินทวงศ์
แขวงลำผักชี เขตหนองจอก กทม. 10530 โทรศัพท์ 02-326-4124

** **ตราสัญลักษณ์วารสาร** MJ-MATh ออกแบบโดย รศ.ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์
สร้างสรรค์ภาพโดย นายจีราวัฒน์ ดอกไม้ศรีจันทร์ และ น.ส.จุฑารัตน์ จันชัยภูมิ

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปทุมวัน กทม. 10330
ISSN: 0858-4788 Math Journal by
the **M**athematical **A**ssociation of **Th**ailand Under the Patronage of His Majesty the King
Faculty Science, Chulalongkorn University, Pathumwan, Bangkok 10330
Tel./Fax. +66 2252 7980 http://MathThai.Org Email: MathThaiOrg@gmail.com

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปทุมวัน กทม. 10330
ISSN: 0858-4788 Math Journal by
the **M**athematical **A**ssociation of **Th**ailand Under the Patronage of His Majesty the King
Faculty Science, Chulalongkorn University, Pathumwan, Bangkok 10330
Tel./Fax. +66 2252 7980 http://MathThai.Org Email: MathThaiOrg@gmail.com

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อตีพิมพ์

วารสารคณิตศาสตร์ เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ ที่จัดทำขึ้นโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เพื่อเปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นภาษาไทยหรือภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารฯ

ทั้งนี้ บทความต้องมีเนื้อหาทางด้านคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในทุกสาขาที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง เช่น วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ บริหารธุรกิจทุกแขนง ทรัพยากรและสิ่งแวดล้อม การแพทย์และการสาธารณสุข เป็นต้น

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Centre) อย่างเคร่งครัด ดังนั้นจึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการ โดยแสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1: กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดย *สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์*
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	Math Journal (MJ-MATh) by *the Mathematical Association of Thailand*
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ คือ ฉบับที่ 1 (มกราคม–เมษายน) ฉบับที่ 2 (พฤษภาคม–สิงหาคม) และฉบับที่ 3 (กันยายน–ธันวาคม)

ตารางที่ 1: (ต่อ)

ขอบเขตของบทความที่จะรับตีพิมพ์ในวารสารฯ	จะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่างๆ เช่น • วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรมศาสตร์ • วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี • เศรษฐศาสตร์ การเงินและการประกันภัย • บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์และซัพพลายเชน • ประชากรศาสตร์ ทรัพยากรและสิ่งแวดล้อม • การแพทย์และการสาธารณสุข • มนุษย์ศาสตร์ สังคมศาสตร์ ประวัติศาสตร์และโบราณคดี • สาขาอื่นๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง
การพิจารณากลั่นกรองบทความของวารสารฯ	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้อง โดยผู้ทรงคุณวุฒิไม่มีส่วนได้เสียกับผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จากผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
อื่นๆ	บทความที่จะลงตีพิมพ์จะต้องเป็นบทความที่ไม่เคยได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่หรืออยู่ระหว่างการพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารอื่นๆ

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารฯ

ผู้ประสงค์ส่งบทความ กรุณาดาวน์โหลดไฟล์ Template.dotx จาก Website ของวารสารที่ http://Journal.MathThai.Org และปฏิบัติตามคำแนะนำใน Template อย่างเคร่งครัด จากนั้น อัพโหลดบทความที่เป็นไฟล์ชนิด Microsoft Word พร้อมทั้งแนบแบบฟอร์มการส่งบทความ ขึ้นที่ระบบการส่งบทความ (Online Journal Systems: OJS) ทางหน้า Website ของวารสาร หรือส่งทางอีเมลมาที่ MathThaiOrg@gmail.com

DOI: 10.14456/mj-math.2017.1

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(691) Jan-Apr, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ลำดับฟีโบนักชีในรายวิชาคณิตศาสตร์

The Fibonacci Sequence in Mathematics Courses

เก่ง วิบูลย์ธัญญ์
Keng Wiboonton

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok, 10330, Thailand

Email: keng.w@chula.ac.th, kwiboonton@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงการหาและพิสูจน์สูตรของลำดับฟีโบนักชีด้วยวิธีต่างๆ โดยใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในระดับมัธยมและระดับปริญญาตรี ซึ่งวิธีต่างๆเหล่านี้ประกอบไปด้วยเนื้อหาในเรื่องลำดับเรขาคณิต ฟังก์ชันก่อกำเนิดและเนื้อหาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

คำสำคัญ: ลำดับฟีโบนักชี ลำดับเรขาคณิต ฟังก์ชันก่อกำเนิด พีชคณิตเชิงเส้น

ABSTRACT

This article gives several methods for finding and proving the well-known formula of the Fibonacci sequence. In these methods, we employ many topics ranging from high-school mathematics to university mathematics. The topics we use include geometric sequences, generating functions and some topics in linear algebra.

Keywords: Fibonacci sequence, Geometric sequences, Generating functions, Linear Algebra

1. บทนำ

บ่อยครั้งการแก้โจทย์ในวิชาคณิตศาสตร์ สามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งแต่ละวิธีอาจใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาที่แตกต่างกัน ดังนั้น การแก้โจทย์ที่ผู้ทำสามารถทำได้หลายวิธี จะทำให้ได้เห็นมุมมองในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์หลาย ๆ สาขา ซึ่งบางครั้งทำให้ได้เห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ ได้

บทความนี้ นำเสนอวิธีต่าง ๆ ในการหาสูตรของลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequence) ซึ่งเป็นลำดับเวียนเกิดที่นิยามโดยกำหนดให้

$F_1 = 1, F_2 = 1$ (เงื่อนไขเริ่มต้น)

และ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3,\ldots$ (*)

จะเห็นว่าการนิยามข้างต้นเป็นการนิยามลำดับเวียนเกิด (Recursive Sequence) กล่าวคือ ในเบื้องต้นเราทราบว่า $F_1 = F_2 = 1$ จากนั้น การหา F_3 ต้องใช้ค่าของ F_1 และ F_2 ซึ่งโดย (*) จะได้ว่า $F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$ จากนั้น หา F_4 โดยใช้ค่าของ F_3 และ F_2 ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ โดยจะเห็นว่า การนิยามลำดับ $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ข้างต้นนั้น นิยามโดยแจ่มชัด (Well-defined) กล่าวคือ เงื่อนไขเริ่มต้นและสมการเวียนเกิด (*) สอดคล้องกันเป็นอย่างดีทำให้สามารถระบุเทอมที่ n ใด ๆ ของลำดับได้ นอกจากนี้จะเห็นว่ามีลำดับ $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ลำดับเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องทั้ง เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขเวียนเกิด (*) ข้างต้น

สูตรของบิเนต์ (Binet's Formula) สำหรับการหาพจน์ที่ n ของลำดับฟีโบนักชี คือ $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, $n = 1, 2, 3,\ldots$

โดยที่ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(สังเกตว่า $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ และ $\alpha\beta = -1$)

บทความนี้นำเสนอวิธีการต่าง ๆ ในการหาสูตรของบิเนต์

<u>หมายเหตุ</u>: จากนี้เป็นต้นไป จะแทนค่าของ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ด้วย α และ β ตามลำดับ

2. นานาวิธีในการหาสูตรของบิเนต์

วิธีที่ 1 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับเรขาคณิตซึ่งเป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

ในระดับมัธยมศึกษา ทราบว่าพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence) อยู่ในรูป $a_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3,\ldots$ โดยที่ $a, r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ซึ่งลำดับเรขาคณิตนี้ สามารถเขียนได้ในรูปของลำดับเวียนเกิดได้โดยให้

$a_1 = a$ (เงื่อนไขเริ่มต้น)

และ $a_{n+1} = ra_n$, $n = 1, 2, 3,\ldots$ (1)

ซึ่งจะเห็นว่าสมการเวียนเกิด (1) มีรูปของสมการที่คล้ายกับสมการเวียนเกิดฟิโบนักชี (*) ดังนั้น จึงคาดว่าจะมีลำดับเรขาคณิตที่สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด (*)

ให้ลำดับเรขาคณิต $(ar^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด (*)

จะได้ว่า $ar^{n+1} = ar^n + ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3,\ldots$

ดังนั้น $r^2 = r + 1$ นั่นคือ $r^2 - r - 1 = 0$

จะได้ว่า $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ หรือ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ นั่นคือ $r = \alpha$ หรือ β

ทำให้ได้ว่า ลำดับเรขาคณิตทั้งหมดที่สอดคล้องสมการเวียนเกิด (*) คือ ลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป $(a\alpha^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ และ $(b\beta^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$นอกจากนี้ สังเกตว่าผลบวกของลำดับเรขาคณิต $(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ ก็สอดคล้องกับสมการเวียนเกิดฟิโบนักชีด้วย

ดังนั้น เงื่อนไขเริ่มต้นที่ว่า $F_1 = F_2 = 1$ เป็นเงื่อนไขที่ทำให้สามารถหาค่าเฉพาะของ a และ b ได้

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $F_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3,\ldots$ แล้วจะได้ว่าเงื่อนไข $F_1 = F_2 = 1$ ทำให้ได้ระบบสมการ

$$a + b = 1$$

และ $$\alpha a + \beta b = 1$$

ซึ่งมีคำตอบเป็น $a = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ และ $b = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{-\beta}{\sqrt{5}}$

จึงได้ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

ทำให้ได้ว่าลำดับ $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ สอดคล้องนิยามของลำดับฟิโบนักชี

เนื่องจากลำดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับนิยามของลำดับฟิโบนักชีมีเพียงลำดับเดียวเท่านั้น ดังนั้น สรุปได้ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

วิธีที่ 2 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริภูมิย่อย (Subspaces) ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra)

แนวคิดของวิธีนี้จะเหมือนกับแนวคิดของวิธีที่ 1 เพียงแต่ว่าวิธีการให้เหตุผลของวิธีที่ 2 นั้นจะใช้ภาษาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นที่อยู่ในรูปของปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์นั่นเอง

ให้ $\mathbb{R}^\infty$ แทนปริภูมิของลำดับของจำนวนจริงทั้งหมด จะได้ว่า $\mathbb{R}^\infty$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space) เหนือสนาม $\mathbb{R}$

พิจารณาปริภูมิ

$$\mathrm{F} = \{(x_1,\ x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty |\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\ ,\ \ n = 1,2,3, \ldots\}$$

จะได้ว่า F เป็นปริภูมิย่อย (Subspace) ของ $\mathbb{R}^\infty$

ให้ $\vec{a} = (1,0,1,1,2,3,5, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ และ $\vec{b} = (0,1,1,2,3,5, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$

สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ เป็นฐานของ F (ละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน)

ดังนั้น F มีมิติเท่ากับ 2

ทำนองเดียวกันกับวิธีที่ 1 สามารถแสดงได้ว่า F มีสมาชิกที่เป็นลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป $(1, r, r^2, r^3, \ldots, r^{n-1}, \ldots)$ อยู่เพียงแค่สองลำดับเท่านั้นคือ $\vec{u} = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}, \ldots)$ และ $\vec{v} = (1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots, \beta^{n-1}, \ldots)$

ในขณะเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (ละไว้เป็นแบบฝึกหัด) ยิ่งไปกว่านั้น จากที่ทราบว่ามิติของ F เท่ากับ 2 ทำให้ได้ด้วย $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นฐานของ F

ให้ $\vec{f} = (1,1,2,3,5,8, \ldots) \in \mathrm{F}$ นั่นคือ $\vec{f}$ เป็นลำดับฟิโบนักชี

เนื่องจาก $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นฐานของ F ดังนั้น มีจำนวนจริง $a,\ b$ ที่ทำให้ $\vec{f} = a\vec{u} + b\vec{v}$

โดยการเทียบสองพจน์แรกของสมการนี้ จะได้ระบบสมการ $a+b=1$ และ $\alpha a+\beta b=1$ ซึ่งเป็นระบบสมการเดียวกันกับระบบสมการที่ปรากฏในวิธีที่ 1

ดังนั้น จะได้ว่า $a=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ และ $b=\frac{-\beta}{\sqrt{5}}$

นั่นคือ $\vec{f}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha\alpha^{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta\beta^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ นั่นเอง

#

วิธีที่ 3 : ใช้ความรู้เรื่องตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear Operators) ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

ให้ $D:\mathbb{R}^{\infty}\to\mathbb{R}^{\infty}$ นิยามโดย $D\big((x_1,x_2,x_3,\dots)\big)=(x_2,x_3,x_4,\dots)$ จะได้ว่า D เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน $\mathbb{R}^{\infty}$

ให้ $\mathrm{F}:=\{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots)\in\mathbb{R}^{\infty}|\ x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\ n=1,2,3,\dots\}$

ให้ $T:\ \mathbb{R}^{\infty}\to\mathbb{R}^{\infty}$ นิยามโดย $T:=D^2-D-1$

นั่นคือ $T(\vec{x})=(D^2-D-1)(\vec{x})=D\big(D(\vec{x})\big)-D(\vec{x})-\vec{x}$ สำหรับ $\vec{x}\in\mathbb{R}^{\infty}$

จะได้ว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน $\mathbb{R}^{\infty}$

นอกจากนี้ จะได้ด้วยว่า $T=(D-\alpha)(D-\beta)=(D-\beta)(D-\alpha)$

สามารถแสดงได้ว่า $\ker T=\mathrm{F}$, $\ker(D-\alpha)\subseteq\ker T$ และ $\ker(D-\beta)\subseteq\ker T$ (ละไว้เป็นแบบฝึกหัด)

สำหรับ $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots)\in\mathbb{R}^{\infty}$ ซึ่ง $(D-\alpha)\vec{x}=\vec{0}$ จะได้ว่า $D\vec{x}=\alpha\vec{x}$

นั่นคือ $(x_2,x_3,\dots)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots)$ ดังนั้น เมื่อ $x_1\neq 0$ จะได้ว่า

$$\alpha=\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_4}{x_3}=\cdots$$

นั่นคือ $\vec{x}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป

$$(x_1,x_1\alpha,x_1\alpha^2,x_1\alpha^3,\dots)=x_1(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)$$

ดังนั้น $\ker(D-\alpha)\subseteq\operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)\}$

เห็นได้ชัดว่า $\operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)\}\subseteq\ker(D-\alpha)$

ดังนั้น $\ker(D-\alpha) = \text{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)\}$

ทำนองเดียวกัน $\ker(D-\beta) = \text{span}\{(1,\beta,\beta^2,\beta^3,\dots)\}$

ให้ $\vec{y} \in \text{F} = \ker T$ จะได้ว่า $(D-\beta)\big((D-\alpha)\vec{y}\big) = T(\vec{y}) = \vec{0}$

ดังนั้น $(D-\alpha)\vec{y} \in \ker(D-\beta) = \text{span}\{(1,\beta,\beta^2,\beta^3,\dots)\}$

ทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $(D-\alpha)(D-\beta) = (D-\beta)(D-\alpha)$

จะได้ด้วยว่า $(D-\beta)\vec{y} \in \ker(D-\alpha) = \text{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)\}$

ดังนั้น มีจำนวนจริง $a,b \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $D\vec{y} - \alpha\vec{y} = b(1,\beta,\beta^2,\dots)$

และ $D\vec{y} - \beta\vec{y} = a(1,\alpha,\alpha^2,\dots)$

นำสมการแรกลบด้วยสมการที่สองข้างต้น จะได้

$$-\sqrt{5}\,\vec{y} = (\beta-\alpha)\vec{y} = b(1,\beta,\beta^2,\dots) - a(1,\alpha,\alpha^2,\dots)$$

$$\in \text{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\dots),(1,\beta,\beta^2,\dots)\}$$

นั่นคือ $\vec{y} \in \text{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\dots),(1,\beta,\beta^2,\dots)\}$

ดังนั้น $\ker T \subseteq \text{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\dots),\ (1,\beta,\beta^2,\dots)\}$

เนื่องจาก $\text{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\dots),(1,\beta,\beta^2,\dots)\} \subseteq \ker(D-\alpha) + \ker(D-\beta)$

$$\subseteq \ker T + \ker T = \ker T$$

ทำให้ได้ว่า $\text{F} = \ker T = \text{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\dots),(1,\beta,\beta^2,\dots)\}$

ให้ $\vec{f} = (1,1,2,3,5,\dots)$ นั่นคือ $\vec{f}$ แทนลำดับฟิโบนักชี

ดังนั้น $\vec{f} \in \text{F} = \text{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\dots),(1,\beta,\beta^2,\dots)\}$

จะได้ว่า มีจำนวนจริง c และ d ที่ทำให้

$$(1,1,2,3,5,\dots) = \vec{f} = c(1,\alpha,\alpha^2,\dots) + d(1,\beta,\beta^2,\dots)$$

ดังนั้นจะได้สมการ $c+d=1$ และ $\alpha c + \beta d = 1$

ซึ่งได้ $c = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ และ $d = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\vec{f} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ เหมือนในวิธีที่ 2 นั่นเอง

#

วิธีที่ 4 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ในระดับมัธยมศึกษา

ให้ $\overrightarrow{\boldsymbol{x_n}} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนักชีสามารถเขียนได้ในรูปของสมการเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$A\,\vec{\boldsymbol{x}}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{x_{n+1}}}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

จะได้ว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n, $\vec{\boldsymbol{x}}_n$ สามารถเขียนย้อนกลับไปเรื่อยๆ จนถึงพจน์ที่มี $\vec{\boldsymbol{x}}_1$ ได้ดังนี้

$$\vec{\boldsymbol{x}}_n = A\,\vec{\boldsymbol{x}}_{n-1} = A(A\,\vec{\boldsymbol{x}}_{n-2}) = A\big(A(A\,\vec{\boldsymbol{x}}_{n-3})\big) = \cdots = A^{n-1}\,\vec{\boldsymbol{x}}_1$$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาสูตรของ A^{n-1} ได้ ก็จะได้สูตรของลำดับฟีโบนักชี นั่นเอง

ดังนั้น จะหาขั้นตอนวิธีที่ทำให้การคำนวณ A^{n-1} นั้นทำได้โดยง่าย

สังเกตว่า ถ้าสามารถหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ที่ทำให้ $P^{-1}AP = D$ โดยที่ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม แล้ว จะได้ว่า

$$A^{n-1} = (PDP^{-1})^{n-1} = PDP^{-1}PDP^{-1}\ldots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n-1}P^{-1}$$

จะเห็นว่าการหาเมทริกซ์ D^{n-1} นั้นทำได้โดยการยกกำลัง $n-1$ ไปที่สมาชิกในแนวทแยงมุมของ D นั่นเอง ซึ่งทำให้การหา A^{n-1} ก็จะทำเพียงแค่การคำนวนผลูคณ $PD^{n-1}P^{-1}$ เท่านั้น

ดังนั้นจึงต้องการหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และ เมทริกซ์ทแยงมุม D ที่สองคล้องกับสมการ $P^{-1}AP = D$ ให้ได้นั่นเอง

สมมติว่า $P^{-1}AP = D$ ดังนั้น $AP = PD$

เขียน $P = [\overrightarrow{p_1} \quad \overrightarrow{p_2}]$ และ $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ จะได้ว่า $A\overrightarrow{p_1} = \lambda_1\overrightarrow{p_1}$ และ $A\overrightarrow{p_2} = \lambda_2\overrightarrow{p_2}$ (สังเกตว่า $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2} \neq \vec{0}$ เพราะว่า P เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ($\det P \neq 0$)) ดังนั้น $(\lambda_1 I_2 - A)\overrightarrow{p_1} = \vec{0}$ และ $(\lambda_2 I_2 - A)\overrightarrow{p_2} = \vec{0}$

ในที่นี้ $I_2 = \mathrm{diag}(1,1)$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

จะได้ว่า ถ้า $(\lambda_1 I_2 - A)$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

แล้วจะได้ว่า $\overrightarrow{p_1} = (\lambda_1 I_2 - A)^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\lambda_1 I_2 - A$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน นั่นคือ $\det(\lambda_1 I_2 - A) = 0$

ทำนองเดียวกัน $\det(\lambda_2 I_2 - A) = 0$

ดังนั้น ต้องการหา $\lambda \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\det(\lambda I_2 - A) = 0$

ซึ่งจะได้สมการพหุนาม $\lambda^2 - \lambda - 1 = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \det(\lambda I_2 - A) = 0$

ดังนั้น $\lambda = \alpha$ หรือ β สังเกตว่า $\alpha + \beta = 1$ และ $\alpha\beta = -1$

แทน $\lambda_1 = \alpha$ และ $\lambda_2 = \beta$ ในสมการ $(\lambda_1 I_2 - A)\overrightarrow{p_1} = \vec{0}$ และ $(\lambda_2 I_2 - A)\overrightarrow{p_2} = \vec{0}$

จะได้ $\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha - 1 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{p_1} = \vec{0}$ และ $\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \beta - 1 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{p_2} = \vec{0}$

ซึ่งแก้ระบบสมการเชิงเส้นหา $\overrightarrow{p_1}$ และ $\overrightarrow{p_2}$ ได้ชุดหนึ่ง คือ

$\overrightarrow{p_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{p_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$

ดังนั้น จะได้ว่า $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

ซึ่งทำให้หาตัวผกผันของ P ได้เป็น $P^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \beta^{n-1} \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}\right)$

ทำให้ได้ว่า $A^{n-1} = \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} \beta\alpha^{n-1} - \alpha\beta^{n-1} & -\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\ \beta\alpha^{n} - \alpha\beta^{n} & -\alpha^{n} + \beta^{n} \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \overrightarrow{x_n} = A^{n-1}\overrightarrow{x_1} = A^{n-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} (\beta - 1)\alpha^{n-1} + (1 - \alpha)\beta^{n-1} \\ (\beta - 1)\alpha^{n} + (1 - \alpha)\beta^{n} \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\alpha + \beta = 1$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta}\begin{bmatrix} \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $F_n = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha^n - \beta^n)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots.$ นั่นเอง

#

วิธีที่ 5 : ใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด (Generating Functions)

พิจารณาฟังก์ชันก่อกำเนิดที่อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$ จะได้ว่า $xF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n$ และในทำนองเดียวกัน $x^2F(x) = \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-3} x^n$

พิจารณา

$$\begin{aligned} F(x) - xF(x) - x^2F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n \\ &= (F_1 x + F_2 x^2) - F_1 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n \\ &= x \end{aligned}$$

ดังนั้น $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

พิจารณา

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{x}{x^2-x-1} = \frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$F(x) = F\left(\frac{1}{1/x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}-\alpha\right)\left(\frac{1}{x}-\beta\right)} = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right)$$ โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right)$$

จากนั้นใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ว่า

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)x^n$$

ดังนั้น $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ ตามต้องการ

#

3. สรุป

วิธีการหาสูตรของบิเนต์ของลำดับฟีโบนักชีโดยวิธีที่ 1, 2 และ 3 นั้นใช้แนวคิดเดียวกัน เพียงแต่ใช้ภาษาคนละแบบ กล่าวคือ วิธีที่ 1 นั้นเป็นภาษาที่อยู่ในระดับมัธยมศึกษา ในขณะที่วิธีที่ 2 และ 3 เป็นภาษาที่อยู่ในระดับมหาวิทยาลัยซึ่งเกี่ยวกับเนื้อหาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น นอกจากนี้แนวคิดในวิธีที่ 3 สามารถประยุกต์ใช้กับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นได้ด้วย

สำหรับวิธีที่ 4 ที่ใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ในระดับมัธยมศึกษานั้น จริงๆแล้วเป็นวิธีการที่เรียกว่า การทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diogonalization) ซึ่งเป็น

หัวข้อที่สำคัญที่สุดหัวข้อหนึ่งในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นในระดับมหาวิทยาลัย ส่วนวิธีที่ 5 นั้นใช้เนื้อหาในวิชา วิยุตคณิต (Discrete Mathematics) ซึ่งวิธีที่ 5 นี้นักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถทำความเข้าใจได้โดยไม่ยากนัก

จริงๆ แล้วการหาสูตรของลำดับฟีโบนักชีนั้นเป็นการแก้สมการเวียนเกิดอันดับที่สอง ซึ่งแนวคิดในแต่ละวิธีข้างต้นในบทความนี้สามารถขยายไปสู่การแก้สมการเวียนเกิดอันดับใดๆ ได้ด้วย

4. แบบฝึกหัดท้ายบทความ

เหมือนกับที่ผ่านมา กำหนดให้ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ และ $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ แทนลำดับฟีโบนักชีในระบบจำนวนจริง (ยกเว้นข้อ 4)

1. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $x^2 = x + 1$
   i) จงพิสูจน์ว่า $x^n = F_n x + F_{n-1}$ ทุก $x = 2, 3, \ldots$
   ii) จงแสดงว่า $\alpha^n = F_n \alpha + F_{n-1}$ และ $\beta^n = F_n \beta + F_{n-1}$
   iii) จงใช้ ข้อ ii พิสูจน์ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad n = 1,2,3, \ldots$

(วิธีการหาสูตรของบิเนต์ของแบบฝึกหัดข้อที่ 1 คิดค้นโดย Erwin Just ซึ่งถูกตีพิมพ์ใน Mathematics Magazine, vol. 44 (1971), p. 199)

2. พิจารณาวิธีการหาสูตรของบิเนต์วิธีที่ 4 ข้างต้น
   i) จงหาสูตรของ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ ในรูปของเมทริกซ์ที่สมาชิกอยู่ในรูปของลำดับฟีโบนักชี
   ii) โดยการใส่ดีเทอร์มิแนนต์ในสูตรที่ได้จากข้อ i ทั้งสองข้าง จงแสดงว่า $F_n{}^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

3. บทประยุกต์ของลำดับฟีโบนักชีในวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง
   กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
   i) จงแสดงว่า $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ ทุก $n \geq 1$
   ii) จงพิสูจน์ว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

(<u>หมายเหตุ</u>: ในวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง การที่จะแสดงว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้านั้น จะทำโดยการพิสูจน์ว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชีโดยใช้อสมการ $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$ สำหรับ $n \geq 2$)

4. (ระดับมหาวิทยาลัย) กำหนดให้ K เป็นสนาม (Field) ใดๆ ซึ่งบรรจุรากทั้งหมดของพหุนาม $x^2 - x - 1$
   นิยามลำดับฟีโบนักชี $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ใน K โดยให้ $F_1 = F_2 = 1 \in K$ และ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$
   จงหาสูตรบิเนต์ของลำดับ F_n

(<u>ข้อเสนอแนะ</u>: ในกรณีที่ค่าลักษณะเฉพาะ (Characteristic) ของ K เป็น 5 สูตรของบิเนต์จะแตกต่างจากกรณีอื่นๆ)

5. (โจทย์ท้าทาย) นิยามลำดับของจำนวนจริง $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ แบบเวียนเกิดดังนี้
   $a_0 = 3,\ a_1 = 0,\ a_2 = 2$ และ $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
   จงแสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $n|a_n$

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความที่ตรวจทานความถูกต้องและให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ทำให้บทความนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

[1] E. Barbeau, “Fallacies, Flaws, and Flimflam,” *The College Mathematics Journal*, vol. 24, no. 1, January, pp. 63-66, 1993.

[2] E. Just, “A Note on the Nth Term of the Fibonacci Sequence,” *Mathematics Magazine*, vol. 44, pp. 199, 1971.

[3] S. R. Ghorpade and B. V., Limaye, “A Course in Calculus and Real Analysis,” Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.

[4] W. Watkins, “Generating Functions,” *The College Mathematics Journal*, vol. 18, no. 3, January, pp. 195-211, 1993.

DOI: 10.14456/mj-math.2017.2

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(691) Jan-Apr, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ
The Butterfly Theorem

ภัคคินี ชิตสกุล
Pakkinee Chitsakul

Retired Associate Professor
Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Chalongkrung Rd., Bangkok, 10520

Email: jimreivat99@gmail.com

บทคัดย่อ

ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อมีวิธีการพิสูจน์ที่หลากหลาย บทความนี้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อโดยใช้สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย และ ทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด ทำให้ได้วิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ไม่ซับซ้อน และ สามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์บางปัญหาทางเรขาคณิตแบบยุคลิด

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ ทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด สามเหลี่ยมคล้าย

ABSTRACT

There are many methods for solving butterfly theorem. This paper derives the butterfly theorem by using the properties of similar triangles and theorem of intersecting chords. This technique is the simple one that can be used for solving some Euclidean geometry problems.

Keywords: Butterfly theorem, Theorem of intersecting chords, Similar triangles

1. บทนำ

บทความนี้จะนำเสนอการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมคล้ายสองรูปที่มีจุดร่วมหนึ่งจุด ซึ่งเมื่อเขียนรูปแล้วมีลักษณะคล้ายผีเสื้อ (Butterfly) ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อนี้มีวิธีการพิสูจน์ที่หลากหลาย[1] การพิสูจน์ที่จะแสดงต่อไปนี้ใช้ความรู้

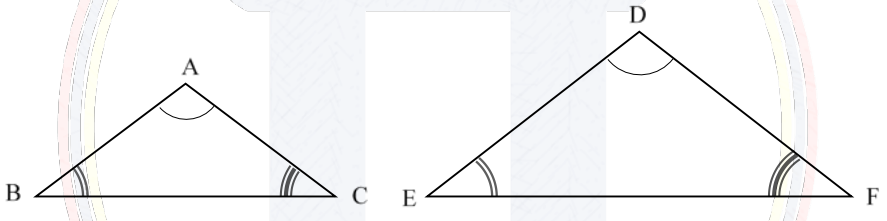
เกี่ยวกับสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย และทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ไม่ซับซ้อน[2] และสามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์บางปัญหาทางเรขาคณิตแบบยุคลิด

2. สามเหลี่ยมคล้าย

<u>นิยาม 1</u> รูปสามเหลี่ยมคล้าย (Similar Triangles)

รูปสามเหลี่ยมคล้าย คือรูปสามเหลี่ยมใดๆ ที่มีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม และอัตราส่วนความยาวของด้านที่สมนัยกันทุกคู่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน

ถ้า ΔABC และ ΔDEF เป็นสามเหลี่ยมคล้ายแล้วเขียนแทนด้วย $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (รูปที่ 1) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ก็ต่อเมื่อ $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ และ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ที่มีค่ามากกว่า 0



รูปที่ 1 สามเหลี่ยมคล้าย $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

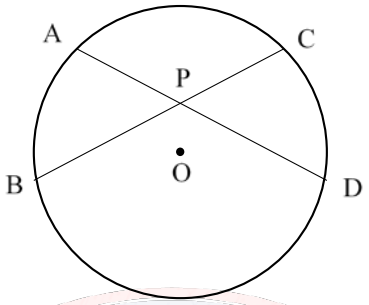
3. การตัดกันของคอร์ด

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด (Theorem of Intersecting Cords) [3]

ให้ P เป็นจุดใดๆ ภายในวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง ถ้าคอร์ด AD และ BC ของวงกลม O ตัดกันที่ P แล้ว $AP \cdot DP = BP \cdot CP$

สิ่งที่กำหนดให้

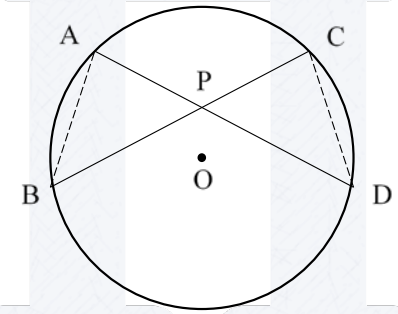
1. AD และ BC เป็นคอร์ดในวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
2. AD และ BC ตัดกันที่จุด P ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 สิ่งที่กำหนดให้ตามทฤษฎีบท 1

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $AP \cdot DP = BP \cdot CP$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก AB และ CD ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 สร้างเพื่อการพิสูจน์สำหรับทฤษฎีบท 1

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $B\hat{A}D = D\hat{C}B$ หรือ $B\hat{A}P = D\hat{C}P$	1. มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ในเซกเมนต์เดียวกันและรองรับด้วยคอร์ดเดียวกันมีค่าเท่ากัน (คอร์ด BD)
2. $A\hat{B}C = C\hat{D}A$ หรือ $A\hat{B}P = C\hat{D}P$	2. ในทำนองเดียวกับ 1 (คอร์ด AC)

3. $A\hat{P}B = C\hat{P}D$	3. เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน (เส้นตรง AD ตัดกับเส้นตรง BC)
4. $\Delta APB \sim \Delta CPD$	4. จาก 1, 2 และ 3
5. $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ หรือ $AP \bullet DP = BP \bullet CP$	5. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจาก 4

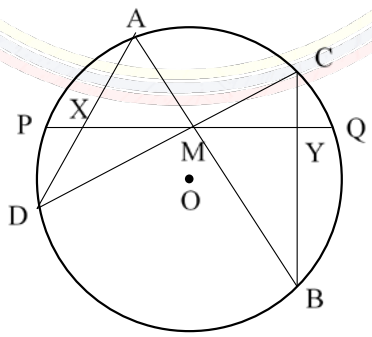
4. ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ

<u>ทฤษฎีบท 2</u> ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ (Butterfly Theorem)

ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางคอร์ด PQ ของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง AB และ CD เป็นคอร์ดใดๆ ซึ่งลากผ่านจุด M ให้คอร์ด AD และ BC ตัดคอร์ด PQ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ แล้ว M เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง XY

สิ่งที่กำหนดให้

1. ให้ PQ เป็นคอร์ดของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
2. ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด PQ แล้ว PM = QM
3. ให้ AB และ CD เป็นคอร์ดใดๆ ในวงกลม O ซึ่งลากผ่านจุด M
4. ให้คอร์ด AD และ BC ตัดคอร์ด PQ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 สิ่งที่กำหนดให้ตามทฤษฎีบท 2

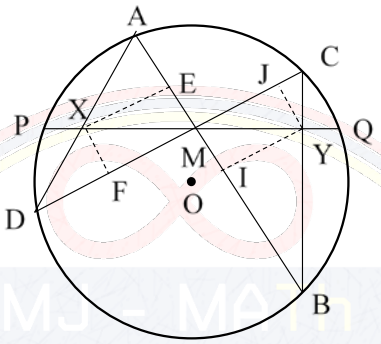
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ MX = MY

สร้างเพื่อการพิสูจน์ 1. จาก X ลาก XE // CD ตัด AB ที่ E

2. จาก X ลาก XF // AB ตัด CD ที่ F

3. จาก Y ลาก YI // CD ตัด AB ที่ I

4. จาก Y ลาก YJ // AB ตัด CD ที่ J ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 สร้างเพื่อการพิสูจน์สำหรับทฤษฎีบท 2

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $X\hat{M}E = Y\hat{M}I$	1. เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน (เส้นตรง PQ ตัดกับเส้นตรง AB)
2. $X\hat{E}M = Y\hat{I}M$	2. มุมแย้ง (XE // YI มี EI เป็นเส้นตัดขวาง)
3. $E\hat{X}M = I\hat{Y}M$	3. มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันมีค่า 180° เมื่อมุมภายในของสามเหลี่ยมสองรูปมีค่าเท่ากันสองมุม มุมต่อมุมแล้วมุมที่เหลือย่อมมีค่าเท่ากันจาก 1 และ 2
4. $\Delta MEX \sim \Delta MIY$	4. จาก 1, 2 และ 3

5. $\frac{MX}{MY}=\frac{XE}{YI}$	5. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจาก 4
6. $\Delta MFX \sim \Delta MJY$	6. ในทำนองเดียวกันกับ 4
7. $\frac{MX}{MY}=\frac{XF}{YJ}$	7. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจาก 6
8. $D\hat{A}B = D\hat{C}B$ หรือ $X\hat{A}E = Y\hat{C}J$	8. มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ในเซกเมนต์เดียวกันและรองรับด้วยคอร์ดเดียวกันมีค่าเท่ากัน (คอร์ด DB)
9. $C\hat{J}Y = C\hat{M}B$	9. มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นคู่ขนานมีค่าเท่ากัน (JY // AB มี DC เป็นเส้นตัดขวาง)
10. $A\hat{E}X = A\hat{M}D$	10. ในทำนองเดียวกันกับ 9 (XE // DC มี AB เป็นเส้นตัดขวาง)
11. $C\hat{M}B= A\hat{M}D$	11. ในทำนองเดียวกับ 1 (เส้นตรง AB ตัดกับเส้นตรง CD)
12. $C\hat{J}Y = A\hat{E}X$	12. จาก 9, 10 และ 11
13. $A\hat{X}E = C\hat{Y}J$	13. ในทำนองเดียวกันกับ 3 เมื่อพิจารณาจาก 8 และ 12
14. $\Delta AXE \sim \Delta CYJ$	14. จาก 8, 12 และ 13
15. $\frac{AX}{CY}=\frac{XE}{YJ}$	15. สมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจาก 14
16. $\Delta DXF \sim \Delta BYI$	16. ในทำนองเดียวกับ 14
17. $\frac{DX}{BY}=\frac{XF}{YI}$	17. สมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจาก 16
18. $\frac{AX}{CY}\bullet\frac{DX}{BY}=\frac{XE}{YJ}\bullet\frac{XF}{YI}$	18. นำ 15 และ 17 คูณกัน

19. $\frac{MX}{MY}\bullet\frac{MX}{MY}=\frac{XE}{YI}\bullet\frac{XF}{YJ}$	19. นำ 5 และ 7 คูณกัน
20. $\frac{MX}{MY}\bullet\frac{MX}{MY}=\frac{AX}{CY}\bullet\frac{DX}{BY}$	20. จาก 18 และ 19
21. AX•DX = PX•QX	21. จากทฤษฎีบทการตัดกันของคอร์ด (PQ ตัดกับ AD ที่ X)
22. CY•BY = PY•QY	22. ในทำนองเดียวกับ 21 (PQ ตัดกับ BC ที่ Y)
23. PX•QX = (PM-MX)(QM+MX)	23. จากรูปที่ 5
24. PX•QX = (PM-MX)(PM+MX)	24. จากโจทย์ PM = QM
25. PY•QY = (PM+MY)(QM-MY)	25. จากรูปที่ 5
26. PY•QY = (PM+MY)(PM-MY)	26. จากโจทย์ PM = QM
27. $\frac{MX}{MY}\bullet\frac{MX}{MY}=\frac{(PM-MX)(PM+MX)}{(PM+MY)(PM-MY)}$ $\frac{(MX)^2}{(MY)^2}=\frac{(PM)^2-(MX)^2}{(PM)^2-(MY)^2}$ $\frac{(PM)^2-(MX)^2}{(MX)^2}=\frac{(PM)^2-(MY)^2}{(MY)^2}$ $\frac{(PM)^2}{(MX)^2}-1=\frac{(PM)^2}{(MY)^2}-1$ $\frac{(PM)^2}{(MX)^2}=\frac{(PM)^2}{(MY)^2}$ MX=MY	27. จาก 20, 21, 22, 24 และ 26
28. M เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง XY	28. จาก 27

5. สรุป

การพิสูจน์ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อโดยใช้สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย และทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด ที่ได้กล่าวมาข้างต้น สามารถนำวิธีการในทำนองเดียวกันนี้ไปใช้ในการพิสูจน์เงื่อนไขและสมบัติของคอร์ดร่วมระหว่างวงกลมสองวง

ที่ตัดกัน ถ้ากำหนดวงกลมที่มีรัศมีต่างกันสามวงตัดกันอย่างแท้จริง นั่นคือไม่มีวงกลมคู่ใดสัมผัสกันแล้วคอร์ดร่วมทั้งสามเส้นระหว่างแต่ละคู่ของวงกลมสามวงอาจตัดกันภายในวงกลม หรือ ไม่ตัดกันภายในวงกลมแต่ส่วนต่อของคอร์ดทั้งสามตัดกันภายนอกวงกลม หรือ คอร์ดร่วมทั้งสามมีจุดร่วมหนึ่งจุดในเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งขั้นตอนการพิสูจน์จะนำเสนอในโอกาสต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Alexander Bogomolny. 2016. *The Butterfly Theorem*. Retrieved 22 November 2016 from http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml

[2] Alexander Bogomolny. 2016. *Intersecting Chord Theorem*. Retrieved 3 December 2016 from http://www.cut-the-knot.org/IntersectingChordsTheorem.shtml

[3] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer, *Geometry Revisited*, New York, 1967.

DOI: 10.14456/mj-math.2017.3

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(691) Jan-Apr, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

การพัฒนาความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณ โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบเรื่องลำดับ กรณีศึกษา: โรงเรียนพระแท่นดงรังวิทยาคาร

An Improvement of Critical Thinking Ability Using Discovery Learning on Sequences Activities Case Study: Prathandongrungwittayakarn School

อรรณพ แก้วขาว และ ภัททิรา ศุภมาศ
Annop Kaewhao[1] and Pattira Supamas[2]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Science,
Burapha University, Chon Buri 20131
[2]Prathandongrungwittayakarn School, Prathan,
Tha Maka, Kanchanaburi, 71130

Email: [1]tor_idin@buu.ac.th [2]dao.supamas@gmail.com

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างแผนการจัดการเรียนรู้แบบค้นพบเรื่อง ลำดับ ที่มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 70/70 หาดัชนีประสิทธิผลของแผนการจัดการเรียนรู้ และเปรียบเทียบความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียน ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนพระแท่นดงรังวิทยาคาร จำนวน 35 คน ผลการวิจัยพบว่า (1) แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ ที่สร้างมีประสิทธิภาพ 74.86/71.05, (2) แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบมีค่าดัชนีประสิทธิผลเท่ากับ 0.6108 และ (3) ความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียน หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบสูงกว่าก่อนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

คำสำคัญ: การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การจัดการเรียนรู้แบบค้นพบ ลำดับ

ABSTRACT

The main purposes of this research were to develop lesson plans using discovery method instruction on sequences according to efficiency criterion of 70/70. In addition, the effectiveness index of lesson plans by discovery method on sequences was studied. In this regard, the comparison of ability of critical thinking between before learning and after learning by the discovery activities was performed. The sample of this study is a group of 35 students of Matthayomsuksa 6 at Prathandongrungwittayakarn School, in the first semester of the 2016 academic year. The results revealed that (1) the efficiency of the lesson plans by discovery method instruction on sequences for Matthayomsuksa 6 met the standard criterion of 74.86/71.05, (2) the effectiveness index of mathematics lesson plans by using discovery method on sequences is at 0.6108 (3) the overall critical thinking of Matthayomsuksa 6 students after learning discovery activities is significantly higher than before leaning at the 0.01 level.

Keywords: Critical thinking, Discovery learning activities, Sequence

1. บทนำ

ในยุคปัจจุบันความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีทำให้การสื่อสารเป็นไปอย่างรวดเร็ว ข้อมูลข่าวสารมีปริมาณมาก มีทั้งที่เชื่อถือได้และไม่น่าเชื่อถือ [1] การบริโภคผ่านสื่อของสังคมไทยโดยส่วนใหญ่จะยอมรับสิ่งที่สื่อนำเสนอไว้ทั้งหมด และคิดว่าสิ่งที่สื่อนำเสนอนั้นถูกต้องเหมาะสม ปราศจากข้อสงสัย ทำให้เกิดการบริโภคข้อมูลข่าวสารอย่างขาดสติ จนตกเป็นเหยื่อ [2] ดังนั้นการรับข้อมูลข่าวสารอย่างมีวิจารณญาณโดยใช้ความรู้และสติปัญญาในการพิจารณาสิ่งที่เห็น ได้ยิน หรือได้รับอย่างมีเหตุผล และสมเหตุสมผลจึงเป็นสิ่งที่จำเป็นอย่างยิ่ง การจัดการศึกษาจึงควรมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้นำความรู้ทักษะไปใช้ประโยชน์ในการดำเนินชีวิตจริง เพื่อประโยชน์ต่อสังคมส่วนรวม มากกว่าการมุ่งเน้นเพียงผลสัมฤทธิ์

สอดคล้องกับการศึกษาในศตวรรษที่ 21 ซึ่งต้องเตรียมนักเรียนให้พร้อมกับชีวิตตามกระแสการปรับเปลี่ยนทางสังคมอันจะส่งผลต่อวิถีการดำรงชีพในสังคม

โดยเฉพาะทักษะการเรียนรู้ตลอดชีวิต ด้านการคิดอย่างมีวิจารณญาณ อันจะนำไปสู่ความสามารถอย่างชำนาญในการคิดที่จะทำหรือไม่ทำ เชื่อหรือไม่เชื่อในเหตุการณ์ต่าง ๆที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน และชีวิตการทำงาน [3]

จากการสำรวจของสำนักสถิติแห่งชาติ (สสช.) เกี่ยวกับปริมาณการอ่านหนังสือของคนไทย พบว่าอ่านหนังสือโดยเฉลี่ยปีละประมาณ 2-5 เล่มต่อคน ซึ่งถือว่าเป็นปริมาณที่น้อยมาก แสดงให้เห็นถึง การขาดนิสัยรักการอ่านของนักเรียน อันแสดงว่าขาดคุณลักษณะใฝ่เรียนรู้ การขาดคุณลักษณะใฝ่เรียนรู้นี้ส่งผลให้ขาดการค้นคว้าศึกษาหาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่ได้รับ ทำให้ไม่เกิดกระบวนการคิดอย่างมีวิจารณญาณก่อนตัดสินใจเชื่อหรือเลือก [4 - 6] ตลอดจนส่งผลให้กระบวนการเรียนรู้เป็นไปอย่างไม่มีประสิทธิภาพ

การพัฒนาทักษะด้านการคิดอย่างมีวิจารณญาณ จึงควรส่งเสริมในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีโอกาสคิด อย่างมีระบบคิดโดยใช้เหตุผล ยอมรับฟังและพิจารณาความคิดเห็นของผู้อื่น ตั้งคำถามคิดวิเคราะห์ คิดค้นหาคำตอบที่ถูกต้อง จัดระเบียบข้อมูล สังเกต ตั้งสมมติฐานทดลองและลงมือแก้ปัญหา สรุปตัดสิน โดยใช้หลักการคิดด้วยวิจารณญาณเพื่อฝึกให้ได้สร้างสรรค์องค์ความรู้ด้วยตนเอง จัดโอกาสในการเรียนรู้ตามระดับการเรียนรู้และพัฒนาการของนักเรียน จัดกระบวนการการเรียนการสอนตามความแตกต่างของนักเรียน ใช้ วิธีการจัดการเรียนรู้ที่เหมาะสมเพื่อช่วยพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่งการเรียนรู้แบบค้นพบ (Discovery Learning) เป็นการเรียนรู้ที่ผู้เรียนสร้างความรู้และสรุปกฎเกณฑ์ต่าง ๆที่ได้จากประสบการณ์ด้วยตนเอง [7, 8] ผู้เรียนได้มีการจัดระบบความคิด วิธีแสวงหาความรู้ด้วย ตนเอง ทำให้จดจำข้อมูลได้นาน โดยใช้การจำเป็นขั้นตอน จดจำสิ่งที่ตนค้นพบได้นาน เข้าใจได้อย่างแจ่มแจ้งและคิดอย่างมีเหตุผล

จากประสบการณ์ของผู้วิจัยในการสอนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย พบว่าใน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่องลำดับและอนุกรม ส่วนใหญ่ใช้วิธีการสอนแบบบรรยาย ผู้เรียนขาดปฏิสัมพันธ์ระหว่างกัน ไม่กล้าแสดงความคิดเห็น เมื่อผู้สอนตั้งคำถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจใน เนื้อหา

หรือข้อคำถาม และสร้างการมีส่วนร่วมในการเรียนรู้ของผู้เรียน พบว่าผู้เรียนมักไม่โต้ตอบ หรือ ตอบโต้ด้วยความไม่มั่นใจ ก้มหน้าไม่สบสายตากับครู ซึ่งนักเรียนมักให้เหตุผลว่ากลัวตอบผิด หรือไม่ แน่ใจในคำตอบของตนว่าจะเหมือนกับคำตอบของครูหรือคำตอบของเพื่อนหรือไม่ และบางคนไม่สามารถคิดวิเคราะห์หรือพยายามแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาในปีที่ผ่านๆ มา ที่พบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องลำดับและอนุกรมอยู่ในเกณฑ์ต่ำและขาดความสามารถในแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อันแสดงให้เห็นว่าขาดการคิดอย่างมีวิจารณญาณที่มีประสิทธิภาพ ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษา การจัดการเรียนรู้ที่พัฒนาทั้งผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและพัฒนาความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณ เพื่อให้นักเรียนพร้อมรับกระแสการปรับเปลี่ยนทางสังคมอันจะส่งผลต่อวิถีการดำรงชีพทางสังคม สามารถดำเนินชีวิตและเรียนรู้ตลอดชีวิตอย่างมีประสิทธิภาพ

2. วิธีดำเนินการ

2.1 ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนพระแท่นดงรังวิทยาคาร จังหวัดกาญจนบุรี จำนวน 4 ห้องเรียน รวมนักเรียน 121 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาวิจัยซึ่งได้มาจากการสุ่มอย่างง่ายเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ห้อง 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนพระแท่นดงรังวิทยาคาร จังหวัดกาญจนบุรี จำนวน 35 คน

2.2 ตัวแปรที่ใช้ในการศึกษา

ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่องลำดับ

ตัวแปรตาม ได้แก่

1. ประสิทธิภาพของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่องลำดับ
2. ดัชนีประสิทธิผลของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่องลำดับ

3. ความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่อง ลำดับ

2.3 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แผนการจัดการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่อง ลำดับ จำนวน 10 แผน ซึ่งแต่ละแผนผ่านการนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความถูกต้อง ความเที่ยงตรงของเนื้อหา และมีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ที่ระดับ 0.95

2. แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับ จำนวน 30 ข้อ ซึ่งผ่านการนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความถูกต้อง ความสอดคล้องระหว่างข้อสอบและจุดประสงค์การเรียนรู้ และมีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ที่ระดับ 0.93 และผ่านการทดลองใช้ (Try out) เพื่อวิเคราะห์ค่าความยากง่าย และมีค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับที่ระดับ 0.77

3. แบบวัดความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณ ของรองศาสตราจารย์ สุวพิชชา ประสิทธิธัญกิจ [9] ซึ่งมีค่าความเที่ยงของแบบทดสอบที่ระดับ 0.94

2.4 การดำเนินการวิจัย

1. เลือกกลุ่มตัวอย่างจากนักเรียนที่มีจำนวน 4 ห้อง

2. ชี้แจงให้ผู้เรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทราบถึงกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการคิดอย่างมีวิจารณญาณโดยใช้กิจกรรมการจัดการเรียนรู้แบบค้นพบ เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจที่ตรงกันและปฏิบัติกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง

3. นำแบบวัดการคิดอย่างมีวิจารณญาณ ไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด แล้วบันทึกคะแนนไว้เป็นคะแนนก่อนทดลอง ใช้เวลาในการทดสอบ 1 คาบ

4. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับ ที่ผู้ศึกษาสร้างขึ้นจำนวน 30 ข้อ ไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด แล้วบันทึกคะแนนไว้เป็นคะแนนก่อนทดลองใช้เวลาในการทดสอบ 1 คาบ

5. ดำเนินการสอนตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่อง ลำดับ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเอง ใช้เวลา 10 คาบ ตรวจให้คะแนนแบบฝึกประสบการณ์ สำหรับแต่ละแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

6. เมื่อดำเนินการทดลองโดยสอนครบทั้ง 10 คาบ เสร็จเรียบร้อยแล้ว นำแบบวัดการคิดอย่างมีวิจารณญาณ ไปทดสอบกับผู้เรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดอีกครั้ง แล้วบันทึกคะแนนไว้เป็นคะแนนหลังเรียน ใช้เวลาในการทดสอบ 1 คาบ

7. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับ จำนวน 30 ข้อ ไปทดสอบกับผู้เรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดอีกครั้ง แล้วบันทึกคะแนนไว้เป็นคะแนนหลังเรียนโดยใช้เวลาในการทดสอบ 1 คาบ

8. ตรวจให้คะแนนแบบวัดการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนแล้วนำผลการทดสอบทั้งหมดมาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อตรวจสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

9. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนแล้วนำผลการทดสอบทั้งหมดมาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อตรวจสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

2.5 สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยกำหนดสัญลักษณ์ในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

t	แทน	ค่าสถิติที่ใช้ในการพิจารณาการแจกแจงแบบ t
D	แทน	ความแตกต่างระหว่างคะแนนการทดสอบหลังและก่อนการจัดการเรียนรู้
n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง
$\overline{X}$	แทน	ค่าเฉลี่ยของคะแนน
s	แทน	ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน
E_1	แทน	ประสิทธิภาพของกระบวนการที่ได้จากการทำแบบฝึกประสบการณ์

E_2 แทน ประสิทธิภาพของของผลลัพธ์ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน

E.I. แทน ค่าดัชนีประสิทธิผลของแผนการจัดการเรียนรู้

3. ผลการศึกษา

ในการศึกษาครั้งนี้ ได้ผลการศึกษาดังนี้

1. แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่อง ลำดับ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สร้างมีประสิทธิภาพ E1/ E2 เท่ากับ 74.86/71.05 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์มาตรฐาน 70/70 แสดงว่าแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่อง ลำดับ ที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพสามารถนำไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้มีศักยภาพสูงขึ้นได้

ตารางที่ 1 ผลการศึกษาประสิทธิภาพของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ เรื่องลำดับ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 กับประสิทธิภาพตามเกณฑ์ E_1/ E_2

แบบฝึกที่	คะแนนเต็ม	คะแนนเฉลี่ย	ร้อยละ	แบบฝึกที่	คะแนนเต็ม	คะแนนเฉลี่ย	ร้อยละ
1	5	4.49	89.80	7	5	3.34	66.80
2	5	3.34	66.80	8	5	3.49	69.80
3	5	4.14	82.80	9	5	4.06	81.20
4	5	3.51	70.20	10	5	3.43	68.60
5	5	3.71	74.20	E_1	50	37.429	74.86
6	5	3.91	78.20	E_2	30	21.314	71.05

ประสิทธิภาพของแบบแผนการจัดการเรียนรู้ (E_1/ E_2) เท่ากับ 74.86/71.05

2. ดัชนีประสิทธิผลของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (E.I.) แบบค้นพบ เรื่องลำดับ มีค่าเท่ากับ 0.6108 แสดงว่า นักเรียนมีคะแนนเพิ่มขึ้น 0.61081 หรือคิดเป็นร้อยละ 61.08

ตารางที่ 2 ผลการศึกษาดัชนีประสิทธิผลของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ เรื่องลำดับ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

จำนวนผู้เรียน	คะแนนเต็ม	ผลรวมคะแนนทดสอบก่อนเรียน	ผลรวมคะแนนทดสอบหลังเรียน	ดัชนีประสิทธิผล
35	30	269	746	0.6108

3. ผลการทดสอบความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่อง ลำดับ พบว่า ความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนด้านความสามารถในการสรุปอ้างอิงและการตัดสินสรุปแบบอุปนัย ด้านความสามารถในการระบุข้อตกลงเบื้องต้น ด้านความสามารถในการนิรนัย ด้านความสามารถในการแปลความ และด้านความสามารถในการประเมินข้อโต้แย้ง หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบค้นพบสูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แบบค้นพบ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ทั้งห้าด้าน และภาพรวมพบว่าความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบค้นพบ สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้แบบค้นพบ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบค้นพบ เรื่อง ลำดับ

ประเด็นการประเมิน	การประเมิน	n	$\overline{X}$	S	t
ความสามารถในการสรุปอ้างอิงและการตัดสินสรุปแบบอุปนัย	ก่อนทดลอง	35	1.46	1.094	6.915^{**}
	หลังทดลอง	35	2.71	1.358	
ความสามารถในการระบุข้อตกลงเบื้องต้น	ก่อนทดลอง	35	4.83	1.200	5.878^{**}
	หลังทดลอง	35	6.03	1.294	
ความสามารถในการนิรนัย	ก่อนทดลอง	35	5.14	1.648	5.389^{**}
	หลังทดลอง	35	6.49	1.502	

ประเด็นการประเมิน	การประเมิน	n	$\overline{X}$	S	t
ความสามารถในการแปลความ	ก่อนทดลอง	35	4.43	1.650	4.645^{**}
	หลังทดลอง	35	5.86	1.375	
ความสามารถในการประเมินข้อโต้แย้ง	ก่อนทดลอง	35	4.71	1.708	6.341^{**}
	หลังทดลอง	35	6.80	1.568	
ภาพรวม	ก่อนทดลอง	35	20.57	3.80	11.196^{**}
	หลังทดลอง	35	27.91	3.899	

4. อภิปรายผล

ผลจากงานวิจัยนี้ทำให้เห็นว่าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์หากจัดกระบวนการเรียนรู้ที่เหมาะสมจะสามารถพัฒนาผู้เรียนทั้งในด้านวิชาการ และสามารถพัฒนาการคิดอย่างมีวิจารณญาณซึ่งถือว่าเป็นสิ่งที่จำเป็นในการดำรงชีวิตให้มีประสิทธิภาพในสังคมยุคปัจจุบันดังนั้นผู้สอนจำเป็นจะต้องหาวิธีการจัดการเรียนรู้ที่สามารถพัฒนาผู้เรียนทั้งในห้องเรียนและนอกห้องเรียน

5. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา และขอขอบคุณ คณะกรรมการประเมินบทความของวารสารคณิตศาตร์ MJ-MATh ที่ให้ข้อเสนอแนะในการพัฒนาผลงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] สำนักงานคณะกรรมการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ, *แผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ: ฉบับที่สิบเอ็ด พ.ศ. 2555-2559*, กทม: สำนักนายกรัฐมนตรี, 2554.

Office of the National Economics and Social Development Board, *The National Economic and Social Development Plan: The Eleventh Plan 2012-2016*, Bangkok: Prime Minister's Office, 2011 (in Thai).

[2] บุบผา เมฆศรีทองคำ, "การรู้เท่าทันสื่อ: การก้าวทันบนโลกข่าวสาร," *วารสารนักบริหาร*, ปีที่ 31, ฉบับที่ 1, pp. 117-123, 2554.

B. Makesrithongkum, “Media Literacy: Keeping Pace with Information Age,” Executive Journal, vol. 31, no. 1, pp. 117-123, 2011 (in Thai).

[3] พิมพันธ์ เดชะคุปต์, และพเยาว์ ยินดีสุข, *การจัดการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21*, กทม: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2558.

P. Dachakupt, and P. Yindeesuk, *The 21st Century Learning*, Bangkok: Chulalongkorn University Printing house, 2015 (in Thai).

[4] ศราวุธ จอมนำ, “ผลการเรียนรู้โดยใช้บริบทเป็นพื้นฐาน เรื่องอัตราส่วนและร้อยละที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ ความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณและคุณลักษณะใฝ่เรียนรู้ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2,” ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทร์วิโรฒ, กทม, 2557.

S. Jomnum, “The Effects of Context-Based Learning about the Ratio and Percentage on Mathematical Achievement, Critical Thinking Ability and Learning Curiosity of mathayomsuksa II Students,” Master’s Thesis M.Ed. (Secondary Education), Srinakharinwirot University, Bangkok, 2014 (in Thai).

[5] ประพันธ์ศิริ สุเสารัจ, *การพัฒนาการคิด*, กทม: โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัด 9119 เทคนิคพริ้นติ้ง, 2551.

P. Susaorat, *Thinking Development*, Bangkok: 9119 Technic Printing Limited Partnership, 2551 (in Thai).

[6] Boss. Judith A, *Think: Critical Thinking and Logic Skill for Everyday Life*, New York: McGraw-Hill Companies Inc., 2010.

[7] สุพรรณี คำนันท์, “ผลของการเรียนแบบผสมผสานโดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยวิธีอุปนัยและนิรนัยที่มีต่อการรับรู้ความสามารถของตนเองในวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน,” วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตร์มหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กทม, 2552.

S. Khamnan, “Effects of blended learning with discovery learning approach using inductive and deductive methods upon self-efficacy in mathematics subjects of ninth grade students with different mathematics learning ability levels,” Master’s Thesis M.Ed. (Audio-Visual Communications), Chulalongkorn University, Bangkok, 2009 (in Thai).

[8] A. Sokolowski and R. Rackley, “Teaching harmonic motion in trigonometry: Inductive inquiry supported by physics simulations,” *Australian Senior Mathematics Journal*, vol. 25, no. 1, pp. 45-53, 2011.

[9] สุวพิชชา ประสิทธิธัญกิจ, “การศึกษาการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยรามคำแหง,” *วารสารมหาวิทยาลัยรามคำแหง*, ปีที่ 8, ฉบับที่ 1, pp. 102-117, 2548

S. Prasitithunyakit, “A Student on Critical Thinking of the Upper Secondary School Students at the Demonstration School of Ramkhamhaeng University,” Ramkhamhaeng Journal, vol. 8, no.1, pp. 102-117, 2011 (in Thai).

DOI: 10.14456/mj-math.2017.4

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(691) Jan-Apr, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ปัญญาวิจิตร vs ปัญญาประดิษฐ์
Man vs Machine

รศ.ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์ และ รศ.ดร.พรฤดี เนติโสภากุล
Chartchai Leenawong[1] and Ponrudee Netisopakul[2]

[1]Faculty of Science
[2]Faculty of Information Technology
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung Rd, Bangkok, 10520

Email: [1]cleenawong@gmail.com [2]ponrudee@it.kmitl.ac.th

"The measure of intelligence is the ability to change."
"ความฉลาดวัดกันที่วิธีรับมือกับความเปลี่ยนแปลง"
อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์

"If you must play, decide on three things at the start:
the rules of the game, the stakes, and the quitting time"
"เมื่อต้องลงแข่ง จงรู้สามสิ่ง กติกา เดิมพัน และจังหวะจบเกม"
สุภาษิตจีน

ตื่นตะลึงกันไปทั่วโลก!! เมื่อเครื่องจักรเอาชนะมนุษย์อย่างขาดลอย ในเกมที่มีผู้เชื่อมั่นมาตลอดว่า จะไม่มีโปรแกรมคอมพิวเตอร์ใด เล่นเกมนี้ชนะมนุษย์ได้ **เกมอะไร? สำคัญอย่างไร? และเครื่องจักรเอาชนะมนุษย์ผู้มีปัญญาวิจิตรได้อย่างไร?** สองดอกเตอร์จะมาชี้แจงแถลงไขให้ฟัง

1. วันประวัติศาสตร์ (The History Made!)

12 มีนาคม ค.ศ. 2016 คงเป็นวันที่ประวัติศาสตร์ของวงการคอมพิวเตอร์จะจารึกชัยชนะครั้งสำคัญของการพิสูจน์ถึงความชาญฉลาดของเครื่องจักร เมื่อ**โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ชื่อว่าอัลฟาโก (AlphaGo) ได้เอาชนะแชมเปี้ยนหมากกระดานโกะในยุคนี้ คือ ลี ซีดอล (Lee Sedol) รวดสามเกมแรก** ในการ

แข่งขันกัน 5 เกม แม้ว่าสองวันถัดมา คุณลีจะเอาชนะได้ในเกมที่ 4 แต่อัลฟาโกก็กลับเอาชัยได้อีกในเกมสุดท้ายในอีกสองวันถัดมา นั่นคือ รวมแล้วอัลฟาโกได้ 4 ใน 5 เกม เครื่องจักรเป็นฝ่ายมีชัย!!

2. ผู้สร้าง (The Creator)

อัลฟาโกถูกพัฒนามาจากบริษัทดีพมายด์ (Deep Mind) ซึ่งกูเกิ้ลเป็นเจ้าของอีกทีหนึ่ง เมื่อพูดถึงกูเกิ้ล คงไม่มีใครไม่รู้จักว่าเก่งกาจเรื่องเสิร์ชเอนจิ้น (Search Engine) ขนาดไหน รวมถึง**ตำนานวิธีการจ้างงานและดูแลพนักงานที่แปลก แหวก** กว่าบริษัทอื่นๆ

เช่น คำถามสัมภาษณ์ที่ดูไร้สาระ แต่จริงๆ แล้วเป็นการดูกระบวนการคิด การให้สวัสดิการพนักงานอย่างสุดๆ ได้แก่ อาหารสามมื้อฟรี รักษาพยาบาลพบแพทย์รวมทำฟันฟรี ตัดผมนวดตัวฟรี ห้องปิงปอง โรงยิม สระว่ายน้ำ ซาวน่า รถยนต์ ฟรีหมด **รวมถึงการทำให้ที่ทำงานเป็นเหมือนสนามเด็กเล่น** การดูแลถึงขนาดนี้ทำให้พนักงานอยากมาทำงานทุกๆ วัน และให้ผลลัพธ์การทำงานที่ยอดเยี่ยมสุดๆ

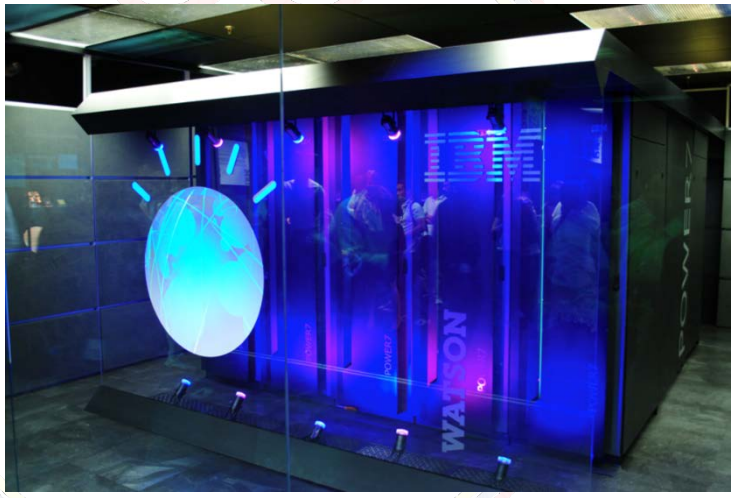
ดังนั้น การที่ทีมเฉพาะทางของกูเกิ้ล จะสร้างโปรแกรมอันยอดเยี่ยมนี้ขึ้นมาจึงเป็นสิ่งที่คาดหวังได้ ว่ากันตามจริงแล้ว **การที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์**

แข่งขันเอาชนะมนุษย์ได้ ครั้งนี้ก็ไม่ใช่ครั้งแรก แต่ทำไมการชนะครั้งนี้จึงแตกต่าง และน่าตื่นเต้นยิ่งกว่าครั้งที่ผ่านๆ มา เรามาลองติดตามกันดู

3. ปัญญาประดิษฐ์ (AI-Artificial Intelligence)

เมื่อกล่าวถึงโปรแกรมชาญฉลาด คงจะไม่กล่าวถึง**ปัญญาประดิษฐ์** (Artificial Intelligence หรือ AI) ไม่ได้ ศาสตร์นี้เกิดขึ้นในปี ค.ศ. 1956 โดยมีนิยามที่แสนคลุมเครือว่าคือ **การศึกษาวิธีการทำให้คอมพิวเตอร์ทำงานบางอย่างที่ "ชาญฉลาด"** โดยความชาญฉลาดหมายถึง สิ่งที่มนุษย์มักจะทำได้ดีกว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในขณะนั้น เช่น การเล่นเกม การสนทนา การมองเห็นและได้ยิน การใช้เหตุผล และการใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาต่างๆ เป็นต้น

ดังนั้นนิยามนี้จึงครอบคลุมแสนกว้างขวาง โดย**เป้าหมายสุดท้ายก็คงเป็นหุ่นยนต์ AI ที่ฉลาดเท่าเทียมหรือยิ่งกว่ามนุษย์!!!**



4. ลึกล้ำน้ำเงินเข้ม.. (IBM Deep Blue)

ดีพบลู คือชื่อของโปรแกรมเล่นหมากรุกที่เอาชนะแชมเปี้ยนหมากรุก คือ แกรี่ แคสแปโรฟ Garry Kasparov ได้ในปี ค.ศ. 1997 อย่างไรก็ตาม **การแข่งขันครั้งนั้น และครั้งก่อนหน้าในปี 1996 มีการผลัดกันรุกผลัดกันรับพอสมควร และเป็นการชนะคะแนนแบบเฉียดฉิว** คือ 3.5 ต่อ 2.5 จาก 6 เกม และแม้ว่าคุณแคสแปโรฟได้ขอท้าชิงใหม่ แต่ไอบีเอ็มก็ไม่ยอมส่งดีพบลูมาแข่งต่อ ดังนั้น ถึงจะถูกจารึกในประวัติศาสตร์ แต่**การที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์เอาชนะมนุษย์ได้ในครั้งนั้น ก็ยังค้างคาใจผู้คนในวงการเสมอมา**

5. วัตสันนักตอบ.. (IBM Watson)

ประวัติศาสตร์ครั้งที่สองที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์เอาชนะมนุษย์ไม่ใช่เกมหมากกระดาน แต่เป็นเกมแข่งขันตอบคำถามความรู้รอบตัว โดยแข่งเรื่องความเร็วในการกดปุ่มขอตอบด้วย **เกมนี้ชื่อเจพพาดี้ (Jeopardy!) เป็นรายการทีวีเกมโชว์ที่ฮิตต่อเนื่องยั่งยืนในประเทศอเมริกามาอย่างยาวนาน เรียกว่า รู้จักกันดีทุกครัวเรือน**

คอมพิวเตอร์วัตสันมีขนาดใหญ่โตมาก นอกจากบรรจุความรู้มหาศาลแล้ว **โปรแกรมวัตสันยังประยุกต์ศาสตร์ปัญญาประดิษฐ์หลายแขนงเข้าร่วมด้วยช่วยกันทำงาน ได้แก่ การประมวลผลภาษา การค้นคืนข้อความ การแทนความรู้ การใช้เหตุผล และการเรียนรู้อัตโนมัติ** มันได้ถูกทดสอบอย่างหนักหน่วงเป็นเวลาหลายปี

จนเมื่อพร้อมแล้ว ไอบีเอ็มจึงท้าชิงแชมเปี้ยนเกมเจพพาดี้ ในขณะนั้นคือ แบรด รัทเทอร์ (Brad Rutter) กับเคน เจนกิ้นส์ (Ken Jennings) และนี่เป็นอีกครั้งหนึ่งที่เครื่องจักรชนะมนุษย์ได้ **โปรแกรมวัตสันกำชัย ได้เงินรางวัลไป 1 ล้านเหรียญ ในปี ค.ศ. 2011!**

แม้ว่าโปรแกรมวัตสันจะชนะ แต่จากการวิเคราะห์เกม พบว่า **บางคำถามง่าย ๆ วัตสันกลับตอบผิดอย่างไม่น่าเชื่อ ทำให้ดูเหมือนว่าวัตสันจะยังโง่งมกว่ามนุษย์อยู่พอสมควร**

6. เกมโกะ (The Go Game)

เกมโกะเป็นเกมที่มีต้นกำเนิดมาจากจีนโบราณ มีงานเขียนกล่าวถึงเกมโกะตั้งแต่ 400 ปีก่อนคริสต์ศักราช และมีหลักฐานการขุดค้นพบหมากกระดานเกมโกะในมณฑลส่านซี จากยุคสมัยราชวงศ์ฮั่น คือประมาณ 200 ปีก่อนคริสต์ศักราช

นอกจากนี้ **เกมโกะยังเป็นหนึ่งในสี่ศิลปศาสตร์ที่บัณฑิตจีนควรต้องรอบรู้**ด้วย สี่ศิลปศาสตร์นั้นได้แก่ การดีดพิณ การเล่นโกะ การเขียนอักษรด้วยพู่กัน และการวาดภาพงานศิลป์

ปัจจุบัน **เกมโกะได้แพร่ขยายและนิยมไปทั่วโลก ความพิเศษของเกมโกะ คือความเรียบง่ายแต่ลึกล้ำสุดหยั่งคาด!**

ความเรียบง่ายคือ กติกาที่เรียบง่าย หมากขาวดำที่เรียบง่าย เนื้อที่บนกระดานที่สามารถวางหมากได้มากมาย และ**การเอาชนะที่ต้องไม่อาศัยความรุนแรงใจร้อน แต่ใช้ความใจเย็นอดทน** แต่ละเกมใช้เวลานาน ใช้สมองและกลยุทธ์ระยะยาวมากกว่าระยะสั้น แต่ก็ไม่มีกลยุทธ์ใดที่ตายตัว

ความลึกล้ำคือ ความได้เปรียบเสียเปรียบบนกระดาน แปรเปลี่ยนไปดั่งสายน้ำไหลตลอดเวลา **หมากบนกระดานแม้นิ่งก็เหมือนเคลื่อนไหว แม้ตั้งรับก็เหมือนโจมตี** กล่าวกันว่า ไม่มีเกมโกะสองเกมใดๆ เลย ที่เหมือนกันเป๊ะๆ สักครั้ง

เนื่องจากความพิเศษเฉพาะตัวเหล่านี้ ทำให้เกมโกะเป็นหนึ่งในปัญหากลุ่มฮาร์ด (Hard Problem) ที่หากแก้ได้คือเอาชนะมนุษย์ได้ ก็หมายถึงว่า คอมพิวเตอร์ได้ล้ำหน้าไปอีกขั้นหนึ่ง ซึ่งก็หมายถึงว่า **ใกล้เวลาที่คอมพิวเตอร์จะฉลาดจนสามารถครองโลกได้จริง ๆ แล้ว!!**

7. เรียนรู้ด้วยโครงข่ายประสาท (Neural Network Learning)

ตอนนี้ ท่านผู้อ่านบางท่านคงสงสัยว่า โปรแกรมอัลฟาโก (AlphaGo) ทำงานอย่างไร เมื่อเปรียบเทียบกับโปรแกรมดีพบลูและวัตสันแล้ว อัลกอริทึมของอัลฟาโกจะใช้ทำงานกับปัญหาทั่วๆ ไปได้มากกว่า **คือใช้โครงข่ายประสาทเทียมเชิงลึก (Deep Neural Networks) หลาย ๆ โครงข่ายมาช่วยกันทำงาน ซึ่งเป็นการเลียนแบบการทำงานของสมองมนุษย์เรานั่นเอง!**

ในสาขาปัญญาประดิษฐ์ โครงข่ายประสาทเทียมมักจะใช้ในการรู้จำตัวเลขและตัวอักษร โดยเฉพาะลายมือเขียน หรือใช้รู้จำเสียง ลายนิ้วมือ จดจำใบหน้า และอื่นๆ ซึ่งจะเห็นว่า เป็นงานรู้จำรูปแบบ (Pattern Recognition) บางอย่างที่คล้ายคลึงแต่ไม่เหมือนกันทีเดียว

ตัวโครงข่ายประสาทเทียมจะเรียนรู้จากข้อมูลฝึกสอน และปรับตัวให้ทำงานได้เมื่อพบข้อมูลอื่นๆ ที่คล้ายคลึงกัน

ในการฝึกสอนหรือเทรนอัลฟาโก มีการนำเกมของแชมเปี้ยนมาเป็นตัวอย่าง นอกจากนั้น ยังมีการให้ตัวโปรแกรมจำลองตัวเอง และจำลองเกมใหม่ ๆ มากมาย มาแข่งขันกับตัวเอง ไปเรื่อยๆ จำนวนมาก ทำให้อัลฟาโกเรียนรู้และปรับตัวเองให้เล่นเก่งขึ้น เก่งจนถึงขั้นสามารถเอาชนะแชมเปี้ยนมนุษย์ได้ในที่สุด!

คอมพิวเตอร์ใกล้จะครองโลกแล้วหรือไม่? **ศาสตร์ปัญญาประดิษฐ์ AI จะทำให้เครื่องจักรฉลาดขึ้น ฉลาดกว่ามนุษย์ผู้สร้าง ผู้มีปัญญาวิจิตรจริง ๆ** แล้วใช่มั้ย? น่ากลัวมาก!!

** ตีพิมพ์ครั้งแรกในนิตยสาร “New Silk Road” ปีที่ 2 ฉบับที่ 5 เดือนมิถุนายน 2559

รูปแบบการตีพิมพ์ (Template)

DOI: 10.14456/mj-math.20xx.x

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 6x(xxx) xxx–xxx, 20xx
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ชื่อบทความภาษาไทยใช้ Browallia New ขนาด 20 ตัวหนา
English Title (16-pt Times New Roman)

ชื่อผู้เขียน ชื่อผู้เขียน และ ชื่อผู้เขียน
Author[1] Author[2] and Author[3]

[1]Affiliation (หน่วยงาน/ที่อยู่ เป็นภาษาอังกฤษ)
[2]Affiliation (หน่วยงาน/ที่อยู่ เป็นภาษาอังกฤษ)
[3]Affiliation (หน่วยงาน/ที่อยู่ เป็นภาษาอังกฤษ)

Email: [1]xxx@mail.com [2]xxx@mail.edu [3]xxx@mail.ac.th

บทคัดย่อ

การเขียนบทคัดย่อภาษาไทย จะต้องจัดทำให้เป็น 1 ย่อหน้า โดยใช้ภาษาไทย 15-pt Browallia New ภาษาอังกฤษ 11-pt Times New Roman สรุปการเขียนบทคัดย่อให้กะทัดรัดและได้ใจความ ไม่ควรเกิน 300 คำ ห้ามมีรายการอ้างอิง และให้มีสมการเท่าที่จำเป็นเท่านั้น บทคัดย่อ บทคัดย่อ บทคัดย่อ บทคัดย่อ บทคัดย่อ บทคัดย่อ บทคัดย่อ บทคัดย่อ

คำสำคัญ: คำที่ 1 คำที่ 2 คำที่ 3 คำที่ 4 (เว้น 2 ช่องว่าง ระหว่างคำ ไม่ต้องมีจุลภาค)

ABSTRACT

การเขียนบทคัดย่อภาษาอังกฤษ จะต้องจัดทำให้เป็น 1 ย่อหน้า โดยใช้ 11-pt Times New Roman สรุปการเขียนบทคัดย่อให้กะทัดรัดและได้ใจความ ไม่ควรเกิน 200 คำ Abstract

Keywords: Word 1, Word 2, Word 3, Word 4

1. บทนำ

ขอให้ผู้เขียนปฏิบัติตามข้อกำหนดการพิมพ์ตามรูปแบบที่ปรากฏใน Template นี้อย่างเคร่งครัด

บทนำในวารสารเป็นส่วนของความสำคัญและมูลเหตุที่นำไปสู่การวิจัย พร้อมวัตถุประสงค์ และอาจมีส่วนการสำรวจเอกสาร/งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง รูปแบบของตัวหนังสือในส่วนเนื้อหาหลักทั้งหมด เป็นดังนี้: ภาษาไทยใช้ 16-pt Browallia New ภาษาอังกฤษใช้ 12-pt Times New Roman

ผู้เขียนบทความควรตรวจสอบความถูกต้องของการพิมพ์ เช่น ตัวสะกด วรรคตอน และความเหมาะสม รวมถึงความไพเราะของการใช้ภาษา โดยใช้คำศัพท์ตามราชบัณฑิตยสถาน และระบุประเภทของบทความให้ชัดเจนว่าเป็นบทความประเภทใด

2. คำแนะนำในการพิมพ์

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงข้อควรปฏิบัติทั่วไปในการพิมพ์บทความ โดยมีสาระสำคัญสังเขปดังนี้

2.1 คำแนะนำทั่วไป

พิมพ์บทความภาษาไทยใช้ 16-pt Browallia New ภาษาอังกฤษใช้ 12-pt Times New Roman การขึ้นย่อหน้าใหม่ใช้ First Line Indent เท่ากับ 0.5 inches

เว้นทุกอย่างเพียง 1 ช่องว่าง (1 Space Bar) เช่นระหว่างประโยค ระหว่างคำภาษาอังกฤษ ระหว่างตัวเลข หรือ ตัวแปร หรือ การแจงรายการสิ่งของ เช่น 1, 2, 3 หรือ x, y, n และเว้นหลังเครื่องหมาย “ๆ” เช่น “ศึกษาและลงมือทำซ้ำๆ จนกว่าจะเข้าใจ”

ถ้ามีคอมม่า ให้พิมพ์เครื่องหมายคอมม่าติดตัวอักษรสุดท้าย แล้วจึงเว้น 1 ช่อง ก่อนตามด้วยข้อความถัดไป เช่น 1, 2, 3 ไม่ใช่ 1 ,2 , 3 และไม่ใช่ 1 , 2 , 3

ถ้ามีวงเล็บ ให้เว้น 1 ช่องว่างก่อนเปิดวงเล็บ จากนั้นตามด้วยข้อความในวงเล็บ และวงเล็บปิดติดตามมาเลย จากนั้นเว้น 1 ช่องว่าง ก่อนขึ้นข้อความถัดไป เช่น พีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) หรือ A = $\{a, b, c\}$

เครื่องหมายลบ อย่าใช้ - (Hyphen) ให้ใช้เป็น – (Dash) ซึ่งได้จากการกด Ctrl พร้อมเครื่องหมายลบที่แป้นตัวเลข

ถ้ามีตัวแปร หรือ ตัว Parameter ต่างๆ เช่น x, y, n ให้พิมพ์ด้วยตัวเอนให้หมด ที่เฉพาะตัวเหล่านั้น โดยไม่รวมเครื่องหมายคอมม่าหรือวงเล็บ เช่น (x, y, n) ไม่ใช่ (x, y, n) เช่น (x_i, y_j, n_5) ไม่ใช่ $(x_{\mathrm{i}}, y_{\mathrm{j}}, n_5)$ สังเกตว่าตัวห้อย i, j ต้องเอน เนื่องจากเป็น Parameter แต่เลข 5 เป็นค่าคงที่ จึงไม่ต้องเอน

การพิมพ์คำเฉพาะตัวภาษาอังกฤษ ให้ขึ้นต้นแต่ละคำด้วยตัวใหญ่ แล้วตามด้วยตัวเล็ก เช่น Management Information Systemไม่ใช่ Management information system

2.2 หัวข้อและหัวข้อย่อย

หัวข้อและหัวข้อย่อยให้วางชิดขอบซ้าย การลำดับหัวข้อในส่วนของเนื้อหาให้ใช้เลขกำกับ โดยให้บทนำเป็นหัวข้อหมายเลข 1 และหากมีการแบ่งหัวข้อย่อยให้ใช้เลขระบบทศนิยมกำกับหัวข้อย่อย เช่น 2.1 เป็นต้น

3. การเขียนสมการ

ถ้ามีสมการ ห้าม crop เป็นภาพมา ต้องเขียนขึ้นใหม่ หลีกเลี่ยงการใช้ *Equation* หรือ *MathType* ให้มากที่สุด ตัวแปร ตัวเอน ตัวหนา ต่างๆ สามารถทำได้ใน Word ปกติ ตัวห้อย (กด Ctrl + =) ตัวยก (กด Ctrl + Shift + =) อักษรพิเศษให้เลือกจาก Insert Symbol เลือก Font เป็น Symbol

ให้เขียนสมการตรงกลางของหน้ากระดาษ และทุกสมการจะต้องมีลำดับหมายเลขกำกับโดยเขียนอยู่ในวงเล็บวางไว้ชิดขอบขวา ดังตัวอย่าง ตัวอักษรในสมการใช้ 12-pt Times New Roman ตัวอย่างของการเขียนสมการเป็นดังนี้

$$a = b + c \tag{1}$$

ส่วนการอ้างอิงให้ใช้คำว่า สมการที่ ตามด้วยตัวเลข เช่น สมการ (1)

4. การใส่รูปภาพและตาราง

รูปภาพควรมีความคมชัด และมีขนาดใหญ่พอที่จะสามารถมองเห็นรายละเอียดและอ่านตัวหนังสือในภาพได้ชัดเจน รูปภาพลายเส้นจะต้องใช้เส้นหมึกสีดำ ส่วนรูปถ่ายควรจะเป็นภาพขาวดำที่มีความคมชัด นอกจากนี้รูปทุกรูปจะต้องมี

หมายเลขและคำบรรยายภาพกำกับใต้รูป โดยควรมีความยาวมากที่สุดไม่เกิน 2 บรรทัด จัดเรียงชิดซ้าย ตัวอักษรภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New ภาษาอังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman

This is a figure.

รูปที่ 1 ตัวอย่างรูปและการเขียนคำบรรยายใต้รูป
ที่มา/Source: แหล่งที่มาของข้อมูล (ถ้ามี)

กรณีตาราง หมายเลขและคำบรรยายกำกับตารางจะอยู่เหนือตาราง โดยมีความยาวมากไม่เกิน 2 บรรทัด จัดเรียงชิดซ้าย ตัวอักษรคำบรรยายตารางและตัวอักษรในตาราง ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New ภาษาอังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman

จงวางตารางและรูปในตำแหน่งที่ใกล้เคียงกับจุดที่อ้างถึงให้มากที่สุด เมื่อต้องการอ้างอิง ให้ใช้คำว่า ตารางที่ หรือ รูปที่ ตามด้วยหมายเลข เช่น ตารางที่ 1 หรือ รูปที่ 1 หากมีรูปย่อย ให้ใช้ (a) (b) หรือ (c) และเมื่ออ้างถึง ให้ใช้ว่า รูปที่ 1(a)

ตารางที่ 1 ตัวอย่างการเขียนตาราง

หัวข้อ	หัวข้อ	หัวข้อ	หัวข้อ
ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New อังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman	ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New อังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman	ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New อังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman	ภาษาไทยใช้ 14-pt Browallia New อังกฤษใช้ 10-pt Times New Roman
จัดให้สวยงาม มองเห็นชัด อ่านได้	จัดให้สวยงาม มองเห็นชัด อ่านได้	จัดให้สวยงาม มองเห็นชัด อ่านได้	จัดให้สวยงาม มองเห็นชัด อ่านได้

ที่มา/Source: แหล่งที่มาของข้อมูล (ถ้ามี)

5. สรุป

ผู้เขียนบทความกรุณาตรวจบทความอย่างรอบคอบโดยใช้เวลาอย่างพอเพียง ก่อนส่งให้กรรมการพิจารณา จะทำให้บทความของท่านมีคุณภาพสูงและผ่านการพิจารณาได้ง่ายขึ้น

6. กิตติกรรมประกาศ (ถ้ามี)

ขอขอบคุณผู้ส่งบทความทุกท่านที่ปฏิบัติตามข้อกำหนดการพิมพ์ตามรูปแบบใน Template นี้อย่างเคร่งครัด

เอกสารอ้างอิง

ทุกรายการเอกสารอ้างอิงต้องเป็นไปตามลำดับก่อน-หลัง (in order of appearance) ในเนื้อหา และทุกรายการต้องปรากฏในเนื้อหา (in-text citations) โดยใช้การอ้างอิงรูปแบบ [1] หรือ [2, 3] หรือ [4-6] เป็นต้น สำหรับรายการภาษาไทย นอกจากการเขียนรายการอ้างอิงนั้นเป็นภาษาไทยแล้ว จะต้องแปลเป็นภาษาอังกฤษด้วย แต่ยังอยู่ในลำดับเลขข้อเดียวกัน แล้ววงเล็บ (in Thai) ไว้

ในกรณีที่มีผู้เขียนมากกว่า 1 คน ให้แจกแจงรายชื่อออกมาทั้งหมด (ห้ามใช้ et al.) กรณีรายการภาษาไทย ให้เว้นวรรคระหว่างรายชื่อ ไม่ต้องคั่นด้วยเครื่องหมายคอมม่า หน้าชื่อสุดท้ายให้ใช้คำว่า และ กรณีรายการภาษาอังกฤษ ถ้ามีผู้เขียนเพียง 2 คน ไม่ต้องใช้เครื่องหมายคอมม่า , ใช้คำว่า and คั่นกลาง ถ้ามีผู้เขียนตั้งแต่ 3 คนขึ้นไป ให้คั่นระหว่างรายชื่อด้วยคอมม่า , และชื่อสุดท้ายให้เพิ่มคำว่า and เข้าไปด้วย

<u>*For books*</u>

[1] ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์, *การวิจัยดำเนินงาน*, กทม: หจก. มีน เซอร์วิส ซัพพลาย, 2554.
C. Leenawong, *Operations Research*, Bangkok: Mean Service Supply, 2011 (in Thai).

[2] J. K. Lastname1, C. R. Lastname2, and A. B. Lastname3, *Title of the Published Book*, *x*th ed. City of Publisher, Country: Publisher, year.

For periodicals and journals

[3] ปรัชญา บุญขวัญ และเทพชัย ทรัพย์นิธิ, “ภาษาซ่อนคณิต,” *วารสารคณิตศาสตร์ โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์*, ปีที่ 59, ฉบับที่ 667-669, pp. 13-22, 2558.

P. Boonkwan and T. Subnithi, “Hidden Math in Language,” *Math Journal by the Mathematical Association of Thailand*, vol. 59, no. 677-679, pp. 13-22, 2015 (in Thai).

[4] J. K. Author, “Name of Paper,” *Title of Periodical*, vol. x, no. xx, pp. xxx-xxx, year.

For reports

[5] ธนาคารแห่งประเทศไทย, “สภาพเศรษฐกิจของประเทศไทยในปี 2555,” ธนาคารแห่งประเทศไทย, กทม., 2556.

Bank of Thailand, “Thailand's Economic Conditions in 2012,” Bank of Thailand, Bangkok, 2013 (in Thai).

[6] J. K. Author, “Title of Report,” Name of Co., City of Co., Abbrev. State, Report xxx, year.

For conference articles

[7] กัญญาณี แซ่ฉั่ว จุฑารัตน์ จันชัยภูมิ ณภัทร วิไลโรจน์วรกุล และฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์, “การหาปริมาณการสั่งซื้อเมื่อพิจารณาการแบ่งกลุ่ม ABC แบบถ่วงน้ำหนักหลายเกณฑ์สินค้าคลังสำรอง และการพยากรณ์อุปสงค์,” ใน *การประชุมวิชาการมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลตตะวันออก ครั้งที่ 9*, พัทยา, 11-13 พฤษภาคม 2559, pp. 55-62.

K. Saechou, J. Junchaiyapoom, N. Wilairojworakul, and C. Leenawong, Order Quantity Incorporating Weighted Multiple ABC, Safety Stock, and Demand Forecasting,” in *the 9th Rajamangala University of Technology Tawan-ok Academic Conference*, Pattaya, 11-13 May 2016, pp. 55-62 (in Thai).

[8] J. K. Author, “Title of Paper,” in *Name of Conf.*, City of Conf., State, days month year, pp. xxx-xxx.

For senior projects, theses, and dissertations

[9] ปิยพรรณ กลั่นกลิ่น, “ปัจจัยด้านส่วนประสมการตลาดบริการที่มีผลต่อผู้บริโภคในการเลือกใช้บริการโรงพยาบาลเอกชนในเขตอำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่,” วิทยานิพนธ์บริหารธุรกิจมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่, 2546.

[10] คฑา ถิตย์เจิม และศุภโชค ซื่อตรง, “หุ่นยนต์บังคับด้วยระบบไร้สายผ่านคอมพิวเตอร์,” โครงงานนักศึกษาวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น, 2554.

K. Titjerm and S. Suetrong, “A Wireless-Remote-Controlled Robot,” Senior Project, Faculty of Engineering, Khonkaen University, 2011 (in Thai).

[11] J. K. Author, “Title of Thesis,” M.S. thesis, Dept., Univ., City of Univ., State, year.

For online sources

[12] กระปุกดอทคอม. 2016. *เปิดเรตค่าจ้างเน็ตไอดอล*. สืบค้นวันที่ 1 มิถุนายน 2559 จาก http://money.kapook.com/view149609.html

Kapook.com. 2016. *Net Idol’s Hiring Rate Revealed*. Retrieved 1 June 2016 from http://money.kapook.com/view149609.html (in Thai)

[13] Wikipedia. 2009. *Corporate Social Responsibility*. Retrieved 28 May 2009 from http://en.wiki pedia.org/wiki/Corporate_Social_Responsibility

[14] J. K. Author. year. *Title*. Retrieved dd mmm yyyy from http:...

รวมพลกองบรรณาธิการ
วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh

รายชื่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ ปี 2559 - 2561

ลำดับที่	ชื่อ – นามสกุล	ตำแหน่ง
1	ผศ.ดร.รจิต วัฒนสินธุ์	นายกสมาคม
2	ดร.ฉวีวรรณ กีรติกร	อุปนายก
3	รศ.ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	เลขาธิการ
4	รศ.ดร.อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์	รองเลขาธิการ
5	รศ.สุรวิทย์ ตันเต่งผล	เหรัญญิก
6	ผศ.ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ	ผู้ช่วยเหรัญญิก
7	รศ.ภรณี เจริญภักตร์	ปฏิคม
8	รศ.ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์	บรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์
9	ศ.ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช	กรรมการ
10	รศ.ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
11	รศ.ดร.นพพร แหยมแสง	กรรมการ
12	รศ.ดร.พัชรา ไชยสุริยา	กรรมการ
13	รศ.ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์	กรรมการ
14	รศ.ดร.อมร วาสนาวิจิตร์	กรรมการ
15	รศ.ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล	กรรมการ
16	รศ.ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	กรรมการ
17	รศ.ศรีเสงี่ยม จักรใจ	กรรมการ
18	ผศ.ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
19	ผศ.ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
20	ผศ.สุพพัดดา ปวนะฤทธิ์	กรรมการ
21	ผศ.ลออ ชนวิริยะ	กรรมการ
22	ดร.ปานทอง กุลนาถศิริ	กรรมการ
23	ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์	กรรมการ
24	ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์	กรรมการ
25	อ.นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
26	ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	
27	ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์ฯ	

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

อาคารมหาวชิรุณหิศ ชั้น 9 คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปทุมวัน กทม. 10330

THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF THAILAND
UNDER THE PATRONAGE OF HIS MAJESTY THE KING

The 9th floor of Maha Vajirunhis Building, Faculty of science, Chulalongkorn University, Pathumwan Bangkok10330.
Tel./Fax 02-2527980 http://www.mathassociation.net

ที่ ส.ค.ท. 67 / 2560

31 มีนาคม 2560

เรื่อง ขอเชิญประชุมใหญ่สามัญประจำปี 2559

เรียน สมาชิก สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ขอเชิญสมาชิกประชุมใหญ่สามัญประจำปี 2559 **วันศุกร์ที่ 28 เมษายน 2560 เวลา 08.00 – 09.00 น.** ณ ห้องประชุม 101 อาคาร 3 คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โดยมีวาระการประชุมดังนี้

วาระที่ 1 เรื่องแจ้งเพื่อทราบ

วาระที่ 2 การรับรองรายงานการประชุมใหญ่สามัญประจำปี 2558 เมื่อวันพุธที่ 20 เมษายน 2559

วาระที่ 3 รายงานผลงานประจำปี 2559

วาระที่ 4 เรื่องเสนอเพื่อพิจารณา

4.1 ฐานะการเงินสมาคม

4.2 เสนอแต่งตั้งผู้ตรวจสอบบัญชี

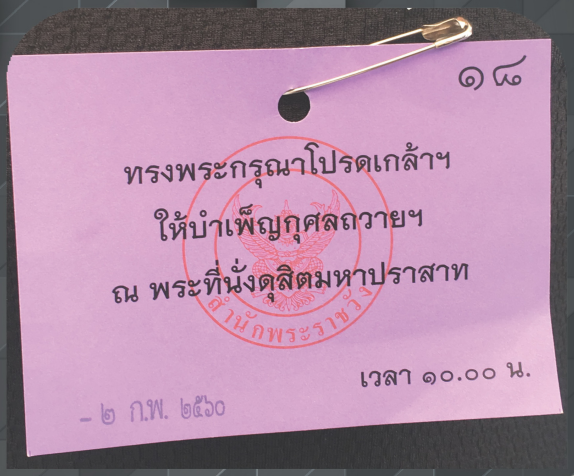
วาระที่ 5 เรื่องอื่นๆ (ถ้ามี)

จึงขอเรียนเชิญท่านเข้าประชุมใหญ่สามัญประจำปี สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ตามวัน เวลา และสถานที่ข้างต้น จักขอบคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อุทุมพร พลาวงศ์)

เลขาธิการ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์



กรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ

และกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh

ร่วมกิจกรรมน้อมรำลึกถึงพระมหากรุณาธิคุณหาที่สุดมิได้ของ

พระบาทสมเด็จพระปรมินทรมหาภูมิพลอดุลยเดช

คณิตศาสตร์

เสาหลักแห่งความรู้...ไม่รู้จบ!

วารสารคณิตศาสตร์
MJ - MATh

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Math Journal by the Mathematical Association of Thailand

www.MathThai.Org Email: MathThaiOrg@gmail.com

ISSN: 0858-4788