



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๔ ฉบับที่ ๖๙ กันยายน-ธันวาคม ๒๕๖๒

Volume 64 Number 699 September – December 2019

บทความทั่วไป *General Article*

- คำคม คณิตศาสตร์ เพลโต : ทรงตันเพลโต 1
Mathematician Quote Plato : Platonic Solid
จินตนิมิต ละอองปักษิณ และ รตินันท์ บุญเคลือบ

บทความวิชาการ *Academic Article*

- เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ 6
Mathematics Teaching Technique
สิริพร ทิพย์คง
- กลไพ่กับระบบเลขฐาน 25
Card Trick with Base Number System
เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

บทความวิจัย *Research Article*

- ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$ 36
Integral Solutions of the Diophantine Equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$
อภิสิทธิ์ ภาคพงศ์พันธุ์

- รูปแบบจำนวนเฉพาะที่ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ $(2p_1 p_2 / p)$ 44
Forms of Odd Prime Numbers p in Legendre Symbol $(2p_1 p_2 / p)$
อภิรัฐ ศิริวรรณกุล

- การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ 64
Closed Knight's Tour on Ring Board $(n, n, 1)$
รตินันท์ บุญเคลือบ ปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ และ วสุพล ศรีโชติ



วารสารคณิตศาสตร์

ISSN 0858-4788

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา ๖๔ ฉบับที่ ๖๙๙ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๒

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand

Under The Patronage of His Majesty The King

Volume 64 Number 699 September - December 2019

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาชิรฐานิศา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

พิมพ์ที่ สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร 0-2218-3562 ถึง 63

<http://www.cuprint.chula.ac.th>

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ มีภารกิจหลักในการสนับสนุนการศึกษาและพัฒนาด้านคณิตศาสตร์ จึงได้จัดทำวารสารคณิตศาสตร์ขึ้น เพื่อเผยแพร่ผลงานวิชาการและวิจัยด้านคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ประยุกต์ คณิตศาสตร์ศึกษา รวมถึงศาสตร์อื่น ๆ ที่ได้นำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้งาน

กิจกรรมหนึ่งที่เป็นการสนับสนุนการศึกษาและพัฒนาด้านคณิตศาสตร์ ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ คือ การจัดประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี โครงการที่ผ่านการคัดเลือกรอบแรกต้องมาจัดแสดงและเสนอผลงานในช่วงสัปดาห์วันวิทยาศาสตร์แห่งชาติ ซึ่งปีนี้ตรงกับวันอาทิตย์ที่ 18 สิงหาคม 2562 ภายในเล่มนี้จะมีผลการประกวดโครงงานวิทยาศาสตร์ดังกล่าว และกองบรรณาธิการฝ่ายบริหารวารสารคณิตศาสตร์ ขอแสดงความยินดีกับโรงเรียนและนักเรียนที่ได้รางวัลทุกคนด้วย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหารหวังเป็นอย่างยิ่งว่าทุกบทความที่น่าสนใจ จะเป็นประโยชน์แก่ท่านผู้อ่าน รวมทั้งจะเป็นการพัฒนางานด้านคณิตศาสตร์ให้ก้าวหน้าต่อไป ทั้งนี้ขอเชิญชวน นักเรียน นิสิตนักศึกษา ครู อาจารย์ นักวิจัย และผู้สนใจ ร่วมเสนอบทความเพื่อเผยแพร่ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยทุกบทความจะผ่านกระบวนการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิ (peer review) หากท่านมีข้อเสนอแนะ ดิฉันเกี่ยวกับวารสารคณิตศาสตร์ ท่านสามารถติดต่อได้ที่ อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

ในโอกาสที่ใกล้ถึงวันปีใหม่แล้ว ในช่วงเวลาที่พิเศษนี้กองบรรณาธิการฝ่ายบริหารขอส่งความปรารถนาดีให้ทุกท่านมีความสุข สมหวัง มีบ้านและครอบครัวที่อบอุ่น มีมิตรสหายที่ดี สวัสดีวันปีใหม่ 2563

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานดี
รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล
ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิช์

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ณัฐชัย สีนาวงค์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.นพพร แหยมแสง | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 4. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี |
| 5. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 6. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 7. รศ. ดร.อุทุมพร พลวางค์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 3. ศ. ดร.ไพศาล นาคมหาชาสินธุ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 4. รศ. ดร.กาญจน์ภา อมรชกุล | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 6. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 7. รศ. ดร.พิรุทธิ์ ขาญเศรษฐีกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 8. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |
| 9. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 10. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 11. ผศ. ดร.ศิริรัตน์ สิงห์ตัน | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 12. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิแก้ว | มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ |
| 13. ผศ. ดร.สุริย์พร ขาวแพรกน้อย | มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| 14. อ. ดร.มณฑิรา ดวงสาพล | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 15. อ. ดร.เอื้ออารีย์ บุญเพิ่ม | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 16. นายพิเชฐ เจียรมนิวัติน | นายกสมาคมนักคณิตศาสตร์ประกันภัย |

รายชื่อคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี 2562 - 2563

1. ผศ.รจิต วัฒนสินธุ์	นายกสมาคม
2. อ. ดร.ฉวีวรรณ กิริติกร	อุปนายก
3. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงค์	กรรมการและเลขาธิการ
4. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์	กรรมการและรองเลขาธิการ
5. ผศ.ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ	กรรมการและเหรัญญิก
6. รศ.สุรวิทย์ ต้นเต่งผล	กรรมการและผู้ช่วยเหรัญญิก
7. ผศ.ลออ ชนวิริยะ	กรรมการและผู้ช่วยเหรัญญิก
8. ผศ.วาสนา สุขกระสานติ	กรรมการและบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์
9. ว่าที่ ร.อ. ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์	กรรมการและประชาสัมพันธ์
10. อ. ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์	กรรมการและผู้ช่วยประชาสัมพันธ์
11. รศ.ภรณ์ เจริญภักตร์	กรรมการและปฏิคม
12. รศ. ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	กรรมการและฝ่ายดูแลเว็บไซต์
13. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	กรรมการ
14. รศ. ดร.ณัฐไชย์ สีนาวงค์	กรรมการ
15. รศ. ดร.นพพร แหยมแสง	กรรมการ
16. รศ. ดร.พัชรา ไชยสุริยา	กรรมการ
17. รศ. ดร.วิชาญ ลีวศิริตฤกุล	กรรมการ
18. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
19. รศ. ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
20. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
21. รศ. ดร.อมร วาสนาวิจิตร	กรรมการ
22. รศ. ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์	กรรมการ
23. รศ.ศรีเสงี่ยม จักรใจ	กรรมการ
24. ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
25. อ.นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
26. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการ
27. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ ที่จัดทำขึ้นโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นภาษาไทยหรือภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณ และเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้นจึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของ บทความที่จะรับ ตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือ คณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น - วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี - เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย - บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน - วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่าง ถูกต้อง

การพิจารณา กลั่นกรองบทความ ของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจาก ผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้อง โดยผู้ทรงคุณวุฒิไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับ ผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จาก ผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่ง บทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่อยู่ ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตาม ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่าง เคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่ง กองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสาร คณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือ หน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือ กระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคม คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่
www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตาม
 ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้น
 อัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อม
 ไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความ
 MJMATH.docx) ขึ้นที่ระบบการส่งบทความ ที่ <https://www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการ
 ได้ที่อีเมล MathThaiOrg@gmail.com



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์

Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๔ ฉบับที่ ๖๙ กันยายน-ธันวาคม ๒๕๖๒

Volume 64 Number 699 September – December 2019

บทความทั่วไป *General Article*

- คำคม คณิตศาสตร์ เพลโต : ทรงตันเพลโต 1
Mathematician Quote Plato : Platonic Solid
จิตติษฐ์ ละออบักสิน และ รตินันท์ บุญเคลือบ

บทความวิชาการ *Academic Article*

- เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ 6
Mathematics Teaching Technique
สิริพร ทิพย์คง
- กลไพ่กับระบบเลขฐาน 25
Card Trick with Base Number System
เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

บทความวิจัย *Research Article*

- ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$ 36
Integral Solutions of the Diophantine Equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$
อภิสิทธิ์ ภาคพงศ์พันธุ์
- รูปแบบจำนวนเฉพาะที่ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ $(2p_1p_2 / p)$ 44
Forms of Odd Prime Numbers p in Legendre Symbol $(2p_1p_2 / p)$
อภิรัฐ ศิระวรกุล
- การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ 64
Closed Knight's Tour on Ring Board $(n, n, 1)$
รตินันท์ บุญเคลือบ ปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ และ วสุพล ศรีโชติ



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 64(699) กันยายน – ธันวาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

คำคม คณิตศาสตร์

เพลโต : ทรงตันเพลโต

Mathematician Quote

Plato : Platonic Solid

จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ และ รตินันท์ บุญเคลือบ

Jinnadit Laorpaksin¹ and Ratinan Boonklurb²

¹Division of Mathematics Education, Department of Curriculum and Instruction,
Faculty of Education, Chulalongkorn University, Bangkok 10330

²Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: ¹ljinnadit@hotmail.com ²ratinan.b@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 2 กรกฎาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 15 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 24 กรกฎาคม 2562

บทคัดย่อ

บทความทั่วไปฉบับนี้นำเสนอเกร็ดชีวประวัติที่น่าสนใจของเพลโต และคำคมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เพลโตเคยเขียนไว้

คำสำคัญ: เพลโต ชีวประวัติ คำคมคณิตศาสตร์

ABSTRACT

This general article presents an interesting part of Plato's biography and his mathematician quote.

Keywords: Plato, Biography, Mathematician quote

บรรยายกาศสังคมกรีกโบราณในสมัยเฮลเลนิก เมื่อประมาณ 507 – 323 ปีก่อนคริสตกาลนั้น เต็มไปด้วยการใช้เหตุผลอย่างเสรี ผู้คนถือเอาการอธิบายทางความรู้และการเมืองเป็นวิถีชีวิต ซึ่งนับเป็นรากฐานสำคัญของการนำไปสู่การเข้าใจธรรมชาติ การก่อร่างสร้างแนวคิดเชิงปรัชญา การแสวงหาความรู้เกี่ยวกับโลก คณิตศาสตร์ และศิลปะ อย่างที่ไม่มีอารยธรรมใดจะมาเปรียบ



รูปที่ 1 เฟลโต

เพลโต (Plato : 428 - 348 ปีก่อนคริสตกาล) เป็นหนึ่งในนักปราชญ์นามอุโฆษในยุคนั้น เขาเป็นศิษย์คนสำคัญของโสกราตีส (Socrates : 470 - 399 ปีก่อนคริสตกาล) และเป็นครูคนสำคัญของอริสโตเติล (Aristotle : 384 - 322 ปีก่อนคริสตกาล) ซึ่งทั้งสามท่านนับได้ว่าเป็นปรัชญาเมธีคนสำคัญของกรีกที่มีบทบาทอย่างสูงต่อแนวคิดทางปรัชญาของโลกตะวันตก นอกจากนี้เพลโตยังได้รับอิทธิพลทางความคิดอย่างมากจาก พิตาโกรัสแห่งซามอส นักคณิตศาสตร์ชื่อดังแห่งยุคอีกด้วย เฟลโตเชื่อว่าโลกนั้นมีสองแบบ หนึ่งเป็นโลกที่ปรากฏให้สามารถเข้าถึงได้ด้วยประสาทสัมผัสทั้งห้า และความรู้ที่ได้มาจากการเข้าถึงนั้นก็นับเป็นความรู้เฉพาะ ส่วนอีกหนึ่งเป็นโลกที่แท้จริง หรือโลกของแบบซึ่งแม้ไม่ปรากฏให้เห็น แต่เข้าถึงได้ด้วยปัญญาความคิด และความรู้ที่ได้มานั้นก็เป็นสิ่งสากล เฉกเช่นเดียวกันความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่นักคณิตศาสตร์สามารถเข้าใจความจริงได้โดยผ่านเพียงความคิด [1]

ที่เอเธนส์ เพลโต ได้ก่อตั้ง อะแคเดมี (The Academy) ซึ่งเป็นสำนักศึกษาที่สอนเกี่ยวกับปรัชญา วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ ดาราศาสตร์ และการเมือง มีวิธีการสอนที่ทันสมัย เน้นการมีส่วนร่วมในการตั้งคำถาม การตอบคำถามด้วยเหตุผล และการค้นหาความจริงด้วยตนเอง เพลโต ให้ความสำคัญกับวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับเรขาคณิต ว่ากันว่าเหนือประตูทางเข้าอะแคเดมี มีการจารึกข้อความคล้ายเป็นคำเตือนใจสำหรับผู้ที่จะผ่านเข้ามาว่า “หากผู้เจ้าไม่ใส่ใจในเรขาคณิต ก็หาควรก้าวเข้ามาที่นี่ไม่ (Let no-one ignorant of geometry enter here.)” [2] ด้วยความยิ่งใหญ่ของอะแคเดมี จึงอาจกล่าวได้ว่า สำนักศึกษาแห่งนี้มีศักดิ์เทียบเสมอมหาวิทยาลัยแห่งแรกของโลก [3]

เพลโต มีผลงานเป็นงานเขียนมากมาย ทั้งด้านปรัชญา จริยศาสตร์ การเมือง การศึกษา วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ โดยมากเขาใช้เทคนิคการเล่าเรื่องผ่านบทสนทนา หนึ่งในงานเขียนสำคัญที่เป็นที่รู้จักกันดี คือ ไทมาอัส (Timaeus) ซึ่งมีเนื้อความอธิบายเกี่ยวกับหลักปรัชญาตามแบบของเพลโต และในหนังสือเล่มนี้เอง เพลโต ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับ ทรงตันเพลโต (Platonic Solid) หรือทรงหลายหน้าปรกติ (regular polyhedron) ไว้ว่า เป็นทรงหลายหน้า ที่จุดยอดทุกจุดประกอบด้วยรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าชนิดเดียวกันที่มีขนาดเท่ากันในจำนวนที่เท่ากัน ซึ่งมีเพียง 5 แบบเท่านั้น ได้แก่ ทรงสี่หน้า (tetrahedron) ทรงหกหน้าหรือลูกบาศก์ (hexahedron or cube) ทรงแปดหน้า (octahedron) ทรงสิบสองหน้า (dodecahedron) และทรงยี่สิบหน้า (icosahedron) นอกจากนี้ เพลโตยังเชื่อว่าทรงเหล่านี้เป็นธาตุมูลฐานของจักรวาล กล่าวคือ ทรงสี่หน้าเป็นตัวแทนของธาตุไฟ ลูกบาศก์เป็นตัวแทนของธาตุดิน ทรงแปดหน้าเป็นตัวแทนของธาตุน้ำ และทรงสิบสองหน้าเป็นทรงตันซึ่งพระผู้เป็นเจ้าใช้รังสรรค์ดารารัจกรในสรวงสวรรค์ของพระองค์ [4] โดยต่อมาภายหลังยุคลิแธแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria) ได้นำเสนอบทพิสูจน์ที่สมบูรณ์เกี่ยวกับทรงตันเพลโตไว้ในทฤษฎีบทในช่วงสุดท้ายของดิเอิลลิเมนต์เล่มสุดท้าย [5]

แม้ว่าผลงานทางคณิตศาสตร์ของเพลโต จะไม่ได้มีมากมายหรือโดดเด่นเทียบชั้นแก่นักคณิตศาสตร์ชื่อดังท่านอื่น ๆ แต่ก็เป็นที่ยอมรับกันโดยคุณิว่า เพลโต เป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่ ด้วยการเป็นผู้สร้างนักคณิตศาสตร์คนสำคัญให้กับโลกใบนี้ ช่วงชีวิต 80 ปีของเพลโต และราว 300 ปีของอะแคเดมี นับเป็นช่วงเวลาที่ยิ่งคุณค่า ปัญญาความคิดและสรรพวิทยาที่เขาได้วางรากฐานไว้นั้น ได้รับการสานต่อ จากรุ่นสู่รุ่น และดำรงอยู่นับเนื่องเป็นพัน ๆ ปี

ผลงานสำคัญของเพลโตอีกหนึ่งชิ้น เป็นหนังสือที่อธิบายถึงลักษณะของสังคมสมบูรณ์แบบชื่อ อุดมรัฐ (The Republic) โดยความตอนหนึ่งได้กล่าวถึงการศึกษาเรขาคณิตไว้ได้อย่างลึกซึ้งกินใจ และสะท้อนความงดงามของเรขาคณิตได้อย่างจับใจว่า

They are not thinking about these figures but of those things which the figures represent; thus, it is the square in itself and the diameter in itself which are the matter of their arguments, not that which they draw; similarly, when they model or draw objects, which may themselves have images in shadows or in water, they use them in turn as images, endeavouring to see those absolute objects which cannot be seen otherwise than by thought. [6]

เรามีได้ คิดคำนึง ถึงรูปนี้	แต่มุ่งหมาย ในฤดี ที่สิ่งนั้น
สิ่งซึ่งอาจ วาดรูปไว้ ใช้แทนกัน	และรูปนั้น ก็แค่เป็น เช่นตัวแทน
จัดรัส จิงจัดรัส เพราะจัดรัส	ปรากฏชัด ด้วยนิยาม งามหนักแน่น
ผ่านศูนย์กลาง เส้นที่สร้าง ทั้งดินแดน	ก็ไม่แม่นยำ เส้นผ่านกลาง อย่างแบบตน
จึงความคิด เอียงนี้ สักได้ใช้	อำนวยการ เสริมหรือล้าง อ้างเหตุผล
ต้องหมายอิง สิ่งนั้นไว้ ในกมล	ใช้บันดล ที่รูปลักษณะ ประจักษ์ตา
อุปมา เหมือนเขาสร้าง ร่างรูปไว้	แทนความคิด ในหทัย ที่หมายว่า
นั่นคือเงา สิ่งจำลอง ของมายา	เป็นภาพย้อน สะท้อนตา ธาราธาร
แล้วจึงใช้ รูปจำลอง ให้มองเห็น	สิ่งสมบูรณ์ อันงามเด่น เป็นแก่นสาร
ซึ่งเพียงเนตร มีอาจพบ ประสบพาน	เพราะสมบูรณ์ เฉพาะผ่าน ทางความคิด

เอกสารอ้างอิง

- [1] ปรีชา ช้างขวัญยืน และคณะ. (2540). *อารยธรรม สมัยโบราณ – สมัยกลาง*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Changkwanyun, P. et al. (1997). *Civilization: Prehistoric – Middle Age*. Bangkok: Chulalongkorn University Publisher.

- [2] The Story of Mathematics. Retrieved June 27, 2019, from
https://www.storyofmathematics.com/greek_plato.html.
- [3] Greek Greece Reporter. Retrieved June 20, 2019, from
<https://greece.greekreporter.com/2018/11/12/the-platonic-academy-of-athens-the-worlds-first-university>.
- [4] Pickover, C.A. (2013). *The Math Book: 250 Milestones in the History of Mathematics*. New York: Barnes & Noble, Inc.
- [5] Thomas L., Heath. (2013). *Euclid's Elements : all thirteen books complete in one volume*. Michigan: Sheridan Books, Inc.
- [6] Newman, J.R. (1956). *The World of Mathematics (Vol. 1)*. New York: Dover Publications, Inc.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 64(699) กันยายน – ธันวาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์

Mathematics Teaching Technique

สิริพร ทิพย์คง

Siriporn Thipkong

Department of Education, Faculty of Education, Kasetsart University, Bangkok 10900

Email: fedusit@ku.ac.th

วันที่รับบทความ : 3 กรกฎาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 31 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 5 สิงหาคม 2562

บทคัดย่อ

เทคนิคการสอนมีความสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนมีความตั้งใจในการเรียน ทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากขึ้น นักเรียนสนุกสนานในการเรียนและมีความรู้ เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ ได้แก่ (1) เทคนิคการนำเข้าสู่บทเรียน โดยการเล่าประวัติคณิตศาสตร์และการทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนการเรียนรู้เรื่องใหม่ (2) เทคนิคการถามคำถาม การถามคำถามของครูจะช่วยกระตุ้นความคิดของนักเรียน ตรวจสอบความเข้าใจ และความมีเหตุผลของนักเรียน (3) เทคนิคการสร้างแรงจูงใจ ครูควรให้แบบฝึกหัดที่เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน ทำให้นักเรียนรู้สึกว่าการเรียนประสบความสำเร็จ (4) เทคนิคการยกตัวอย่าง โดยเริ่มจากการให้ตัวอย่างที่ง่ายก่อน และมีตัวอย่างหลายตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริงและสิ่งแวดล้อม (5) เทคนิคการใช้สื่อการเรียนรู้ ครูอาจใช้สื่อที่ครูประดิษฐ์ขึ้นเอง สื่อสำเร็จรูป หรือสื่อเทคโนโลยี ที่จะช่วยกระตุ้นความสนใจของนักเรียน (6) เทคนิคการสรุปบทเรียน นักเรียนต้องสรุปสิ่งที่นักเรียนได้เรียนในแต่ละคาบ เพื่อนำความรู้นั้นไปใช้ในการแก้ปัญหาและการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

คำสำคัญ: เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ เทคนิคการนำเข้าสู่บทเรียน เทคนิคการสร้างแรงจูงใจ

ABSTRACT

Teaching technique is important for helping students' intention in learning and making instruction more effectively. The students enjoy learning and have knowledge. There are many technique for teaching mathematics such as (1) The introductory lesson technique: telling mathematics history and reviewing students' background knowledge before starting a new topic. (2) Asking question technique: the teacher's questions will help students' thinking impulse and test their understanding and reasoning. (3) Constructed reinforcement technique: the teacher should give students appropriate exercises according to their ability so that they feel successful. (4) Giving example technique: starting from easy example and there are many examples related to real life and the environment. (5) Using learning materials technique: there are learning materials that the teacher made, ready-made materials, and technology materials. These will help stimulate students' interest. (6) Summary lesson technique: students have to summarize what they learn in each period. They can bring their knowledge in solving problems and further study in higher mathematics.

Keywords: Mathematics teaching technique, Introductory lesson technique, Constructed reinforcement technique

คำว่า “เทคนิค” (technique) เป็นคำนามตามพจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2556 หน้า 580 [2] แปลว่า ศิลปะหรือกลวิธีเฉพาะวิชานั้น ๆ การสอนเป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ ครูผู้สอนจึงต้อง มีความรู้ ทักษะและเทคนิคต่าง ๆ ที่จะนำมาใช้ในการสอน เพื่อช่วยให้นักเรียนเกิดการรับรู้มีการเรียนรู้ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม นักเรียนมีความรู้ มีความสนุกสนานในการเรียน ตั้งใจเรียน ทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากขึ้น

การสอนคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นต่าง ๆ นั้นแตกต่างกัน ในระดับปฐมวัย นักเรียนชอบการเคลื่อนไหว อยากรู้ อยากเห็น อยากทดลอง ชอบถามคำถาม ดังนั้นในการจัดการเรียนการสอนครูต้องจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ และช่วงความสนใจของนักเรียนจะเป็นช่วงสั้น ๆ ครูจึงต้องจัดกิจกรรมอย่างหลากหลาย มีการบูรณาการการสอนวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น ๆ นักเรียน

เรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยการสังเกต การแยกแยะสิ่งของต่าง ๆ ตามลักษณะของสี รูปร่าง ขนาด นักเรียนได้จับต้องสื่อการเรียนรู้ เช่น ในการสอนเรื่องจำนวนนับ ตั้งแต่ 1 ถึง 9 นักเรียนต้องได้นับ สิ่งของต่าง ๆ ได้แก่ ตัวนับไม้ไอศกรีม ซึ่งนักเรียนจะได้เรียนรู้คณิตศาสตร์จากรูปธรรม (concrete) ก่อนสื่อกึ่งรูปธรรม (semi-concrete) ได้แก่ รูปภาพ และนามธรรม (abstract) ได้แก่ สัญลักษณ์ เครื่องหมาย ตัวเลข การลงมือปฏิบัติในการเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนจะเรียนด้วยความสนุก ได้ความรู้ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ได้ การสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา นักเรียนจะเรียนเรื่องการดำเนินการ (การบวก การลบ การคูณ และการหาร) ด้วยความเข้าใจ เมื่อครูใช้สื่อการเรียนรู้ที่เป็นรูปธรรม ทำให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดในเรื่องนั้น ๆ สำหรับการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา สื่อการเรียนรู้ยังมีความสำคัญที่จะช่วยให้เนื้อหาสาระที่มีความเป็นนามธรรมนั้นเข้าใจได้ง่ายขึ้น และการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นที่สูงขึ้น ต้องอาศัยความรู้พื้นฐานที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว ดังนั้นก่อนการสอน ครูต้องทราบว่านักเรียนต้องมีความรู้เรื่องใดมาก่อน การเรียนเรื่องใหม่

1. เทคนิคการนำเข้าสู่บทเรียน

ครูอาจใช้การทบทวนความรู้ที่นักเรียนได้เรียนไปแล้วเมื่อชั่วโมงที่แล้วก่อนที่จะเริ่มสอนบทเรียนใหม่ ซึ่งต้องใช้ความรู้เดิมที่เรียนไป ซึ่งเป็นการย้ำความรู้ที่นักเรียนได้เรียนไป เพื่อนักเรียนจะได้เชื่อมโยงความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ ทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนได้รวดเร็วขึ้น ตัวอย่างเช่น การทบทวนความรู้เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะก่อนการเรียนเรื่องการหา ห.ร.ม. และ ค.ร.น. เป็นต้น การทบทวนอาจจะทำได้โดยการให้นักเรียนตั้งคำถามซึ่งกันและกัน สรุปสิ่งที่นักเรียนเรียนไปแล้วอย่างสั้น ๆ การร้องเพลงเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ เช่น เพลงการสลับที่ การบวก การลบ การคูณ การหาร เนื้อร้อง ศาสตราจารย์ ยุพิน พิศกุล ทำนองพม่ารำหวาน [1]

หกลบห้าเท่ากับห้าลบหก (ห้า)	แต่หกลบห้าไม่เท่ากับห้าลบหก (ห้า)
หกคูณห้าเท่ากับห้าคูณหก	แต่หกหารห้าไม่เท่ากับห้าหารหก
จะขอหยิบยกสลับที่ได้เมื่อบวกคูณ	

การเล่นเกมน 24 โดยให้นักเรียนนำจำนวนนับมาบวกลบคูณหารกันแล้วได้ผลลัพธ์เท่ากับ 24 เช่น $2 \times (6 - 4) \times (14 - 8) = 24$ การอภิปรายเกี่ยวกับพาราโบลาที่นักเรียนมองเห็นในชีวิตจริง เช่น

งานดาวเทียม งานสะท้อนแสงของไฟฉาย ไฟหน้ารถยนต์ เตารุ่นดัดด้วยพลังงานแสงอาทิตย์ ซึ่งมีพื้นผิวเป็นพาราโบลา นอกจากนี้ในการสอนคณิตศาสตร์ ครูอาจนำเข้าสู่บทเรียนโดยการเล่าประวัติ นักคณิตศาสตร์ และมีรูปของนักคณิตศาสตร์ประกอบ เช่น ในการสอนเรื่องอนุกรม ครูเล่าประวัติของ Carl Friedrich Gauss (ค.ศ. 1777 – 1855)



รูปที่ 1 Gauss

ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน และสามารถคิดหาผลบวกของจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 100 ได้ ตั้งแต่เกาส์อายุ 7 ขวบ โดยได้คำตอบของผลบวกของจำนวนเหล่านี้เท่ากับ 5,050 ซึ่งเกาส์มีวิธีการคิด [3] ดังนี้

ให้ S แทน ผลบวกของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100

$$\text{ดังนั้น } S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \quad \dots(1)$$

$$\text{และ } S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \quad \dots(2)$$

นำ (1) และ (2) มารวมกันได้ (ดังภาพที่แสดงข้างล่าง)

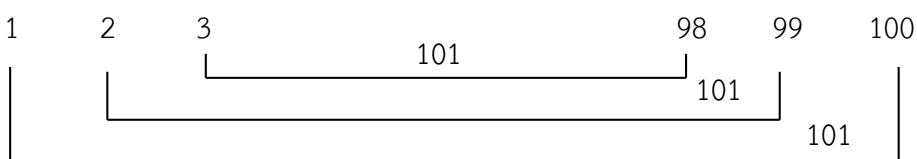
$$2S = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101$$

$$= 101 \times 100$$

$$= 10,100$$

$$S = \frac{10,100}{2} = 5,050$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100 เท่ากับ 5,050



การเล่าประวัติการคิดคำนวณแบบอียิปต์ในสมัยโบราณ ที่เขียนอยู่บนกระดาษไรริน ปาปิรัส (Rhind Papyrus) ซึ่งค้นพบเมื่อประมาณปี ค.ศ. 1858 และปัจจุบันเก็บรักษาไว้ที่พิพิธภัณฑ์ ในประเทศอังกฤษ [4]

เลขคณิตแบบอียิปต์นี้มีวิธีการคิดคำนวณเกี่ยวกับการคูณและการหารในรูปของการบวกดังนี้ เช่น

(1) จงหาผลคูณของ 19 กับ 71

กรณีที่ 71 เป็นตัวคูณ

จำนวนเต็มบวก	ผลคูณของ 71	
1	71	✓
2	142	✓
4	284	
8	568	
16	1,136	✓
$1 + 2 + 16 = 19 \xrightarrow{\text{ผลรวม}} 1,349$		

กรณีที่ 19 เป็นตัวคูณ

จำนวนเต็มบวก	ผลคูณของ 19	
1	19	✓
2	38	✓
4	76	✓
8	152	
16	304	
32	608	
64	1,216	✓
$1 + 2 + 4 + 64 = 71 \xrightarrow{\text{ผลรวม}} 1,349$		

ดังนั้นผลคูณของ 19 กับ 71 เท่ากับ 1,349

สำหรับวิธีการคิดแบบดังกล่าวข้างต้น ปัจจุบันเรียกว่า วิธีการคูณแบบรัสเซีย (Russian multiplied) ซึ่งยังมีการสอนในประเทศรัสเซีย

(2) จงหาผลหารต่อไปนี้

ก. 91 หารด้วย 7

จำนวนเต็มบวก	ผลคูณของ 7	
1	7	✓
2	14	
4	28	✓
8	56	✓

$$1 + 4 + 8 = 13 \xrightarrow{\text{ผลรวม}} 91$$

ดังนั้นผลลัพธ์ของ $91 \div 7$ เท่ากับ 13

ข. 35 หารด้วย 8

จำนวนเต็มบวก	ผลคูณของ 8	
1	8	
2	16	
4	32	✓
$\frac{1}{2}$	4	
$\frac{1}{4}$	2	✓
$\frac{1}{8}$	1	✓

$$4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 4\frac{3}{8} \xrightarrow{\text{ผลรวม}} 35$$

ดังนั้นผลลัพธ์ของ $35 \div 8$ เท่ากับ $4\frac{3}{8}$

การนำเข้าสู่บทเรียน โดยใช้สื่อการเรียนรู้ประเภทเทคโนโลยี เช่น การสอนเรื่องเส้นขนาน ครูอาจนำเสนอภาพสิ่งแวดล้อมในชีวิตที่นักเรียนมองเห็น เช่น รางรถไฟ ห้องเรียน ที่มีอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่

ประกอบด้วยเส้นขนาน ให้นักเรียนอภิปรายร่วมกัน ซึ่งจะทำให้เห็นว่าการเรียนเห็นว่าวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับนักเรียนอย่างไร

2. เทคนิคการใช้คำถาม

การใช้คำถามของครูช่วยดึงดูดความสนใจของนักเรียน เป็นการกระตุ้นให้นักเรียนคิดและตอบคำถาม อาจเป็นการทบทวนความรู้ในสิ่งที่นักเรียนได้เรียนไปแล้ว ช่วยตรวจสอบและประเมินผลความรู้ความเข้าใจของนักเรียน ทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอน และอาจช่วยระงับพฤติกรรมที่ไม่พึงประสงค์ได้ เพราะขณะที่ครูถามคำถามนักเรียนจะต้องตั้งใจฟังคำถามนั้นเพื่อคิดหาคำตอบ ช่วยในการวินิจฉัยข้อบกพร่องของนักเรียน และปรับปรุงการสอนของครู

ประเภทของคำถามมี 5 ประเภท คือ [3]

1. คำถามเพื่อตรวจสอบความคิดของนักเรียนในสิ่งที่นักเรียนเพิ่งเรียนรู้ไป เช่น มุมฉากคือมุมที่มีขนาดกี่องศา

2. คำถามเฉพาะเนื้อหาใดเนื้อหาหนึ่ง เช่น $68 + 97 = \square$ หรือความคิดรวบยอดเรื่องใดเรื่องหนึ่ง เช่น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคืออะไร ซึ่งคำตอบที่ถูกต้องจะมีเพียงคำตอบเดียว

3. คำถามปลายเปิด เป็นคำถามที่นักเรียนต้องใช้ความคิดก่อนที่จะตอบ คำถามนั้นจะไม่ถามว่า ถูกหรือผิด ใช่หรือไม่ใช่ แต่เป็นคำถามที่ถามว่า “ทำไม” “อย่างไร” “เพราะเหตุใด” โดยต้องมีเหตุผลประกอบ ซึ่งคำถามประเภทนี้จะช่วยส่งเสริมความคิดของนักเรียน เช่น $m^{-1} + n^{-1}$ กับ $(m + n)^{-1}$ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด คำตอบ ไม่เท่ากัน เพราะ $m^{-1} + n^{-1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}$ และ $(m + n)^{-1} = \frac{1}{m + n}$

4. คำถามเปิด ซึ่งภาษาอังกฤษเรียกว่า open question เป็นคำถามที่มีคำตอบได้มากกว่าหนึ่งคำตอบ เช่น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย มีด้านกว้างและด้านยาวเป็นเท่าไร คำตอบ (1) ด้านกว้าง 1 หน่วย ด้านยาว 24 หน่วย (2) ด้านกว้าง 2 หน่วย ด้านยาว 12 หน่วย (3) ด้านกว้าง 3 หน่วย ด้านยาว 8 หน่วย และ (4) ด้านกว้าง 4 หน่วย ด้านยาว 6 หน่วย

5. คำถามเพื่อประเมินความรู้ที่นักเรียนได้เรียนไปแล้ว เป็นคำถามที่นักเรียนต้องคิดหาคำตอบ และแสดงความคิดเห็นของตนเองด้วย เช่น

ให้นักเรียนเลือกจำนวนต่อไปนี้ 104 12 640 20 32 3 10 8 เติมลงในช่องว่าง

สนามบาสเกตบอลของโรงเรียนมีความยาว.....เมตร และมีความกว้าง.....เมตร
ด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง.....เมตร ความยาวของรั้วรอบสนามบาสเกตบอล.....เมตร และ
พื้นที่ของสนามบาสเกตบอล.....ตารางเมตร ห่วงบาสเกตบอลอยู่สูงจากพื้นดิน.....เมตร

สมมติว่า นักเรียนตอบว่า “ความยาวของสนามบาสเกตบอล 32 เมตร และความกว้างของสนามบาสเกตบอล 20 เมตร” ครูกระตุ้นให้นักเรียนบอกเหตุผล โดยถามว่า “ทำไมคุณจึงคิดว่า ความยาวของสนามบาสเกตบอลเป็น 32 เมตร และความกว้างเป็น 20 เมตร” ซึ่งนักเรียนอาจจะตอบว่า “104 เมตรนั้นยาวไป 12 เมตรนั้นสั้นไป และ 640 เมตรนั้นมากเกินไป และ 3 10 8 เมตรนั้นสั้นไปสำหรับความยาวของสนามบาสเกตบอล” และ “เมื่อนำความยาวของสนามบาสเกตบอลมาเปรียบเทียบกับความกว้าง จะได้ความยาวของสนามบาสเกตบอลยาวกว่าความกว้าง 12 เมตร ซึ่งตรงกับจำนวนที่โจทย์กำหนด” ครูอาจจะถามนักเรียนว่า “นักเรียนจะหาความยาวของรั้วรอบสนามบาสเกตบอลได้อย่างไร” ครูอาจจะชี้แนะในกรณีที่นักเรียนตอบไม่ได้ว่า “สนามบาสเกตบอลนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และความยาวของเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ $(2 \times \text{ความยาวของสนาม}) + (2 \times \text{ความกว้างของสนาม})$ ซึ่งในที่นี้ $(2 \times 32) + (2 \times 20) = 64 + 40 = 104$ ” ครูถามนักเรียนต่อไปว่า “ใครสามารถบอกได้ว่าพื้นที่สนามบาสเกตบอลเท่ากับเท่าไร” นักเรียนตอบได้ว่า “ $32 \times 20 = 640$ ตารางเมตร” และครูถามนักเรียนว่า “ห่วงบาสเกตบอลสูงจากพื้นดินกี่เมตร” จำนวนที่เหลือคือ 3 10 8 เมตร นักเรียนตอบ “3 เมตร” ครูถามว่าเพราะเหตุใด นักเรียนตอบ “10 เมตร และ 8 เมตร สูงมากเกินไป” และการวาดรูปสนามบาสเกตบอลจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจได้มากขึ้น สำหรับนักเรียนที่ยังสับสนระหว่างความยาวของเส้นรอบรูปและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ลักษณะของคำถามที่ดี [3]

1. คำถามนั้นสั้น กระชับ ได้ใจความ ใช้ภาษาที่ง่าย ๆ ชัดเจน ทำให้นักเรียนเข้าใจได้ดี
2. ช่วยกระตุ้นความคิดของนักเรียน เหมาะสมกับอายุ ความสามารถ และความสนใจของนักเรียน
3. สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของบทเรียน เมื่อนักเรียนเรียนอะไรก็ถามสิ่งนั้น ชื่อของบุคคลในโจทย์อาจจะใช้ชื่อดารานักแสดงหรือนักกีฬาที่มีชื่อเสียงที่นักเรียนสนใจก็ได้ เพื่อเป็นการกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

ในการถามคำถามครูควรจะถามนักเรียนด้วยท่าทางเป็นกันเอง ยิ้มแย้มและใจเย็น ครูควรเว้นระยะเวลาให้นักเรียนคิดหาคำตอบอย่างน้อย 3 ถึง 5 วินาที เพื่อแสดงว่าครูต้องการคำตอบที่ถูกต้องและมีเหตุผล แล้วจึงเรียกชื่อให้นักเรียนคนใดคนหนึ่งตอบ เพราะการที่นักเรียนไม่ทราบว่าครูจะถามนักเรียนคนใดนั้นจะให้นักเรียนตื่นตัวและสนใจ ตั้งใจฟังคำถามที่ครูถามมากขึ้น ครูไม่ควรถามคำถามนั้นซ้ำหลาย ๆ ครั้ง ถ้านักเรียนไม่ได้ยินครูก็สามารถทวนคำถามนั้นได้ แต่ถ้านักเรียนไม่ได้ยินเพราะไม่สนใจ ครูก็ควรจะว่ากล่าวตักเตือน

ในกรณีที่นักเรียนไม่สามารถตอบคำถามที่ครูถามได้ ครูอาจเปลี่ยนไปถามนักเรียนคนอื่นที่ครูคิดว่าสามารถตอบคำถามได้ ครูอย่าไปเคຍັນเคຍอนนักเรียนที่ไม่สามารถตอบคำถามครั้งแรกได้ เพราะนักเรียนอาจเกิดความรู้สึกกละอายแล้วไม่อยากเรียนต่อไป ครูจึงควรเปลี่ยนไปถามคนอื่นก่อนแล้วจึงกลับมาถามนักเรียนคนเดิมที่ตอบไม่ได้ด้วยคำถามใหม่ และถ้าไม่มีนักเรียนคนใดตอบได้ครูควรชี้แนะคำตอบ ดังนั้นในการถามคำถาม ครูควรเลือกคำถามให้เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน โดยคำถามยากสำหรับนักเรียนที่เรียนเก่ง และคำถามง่ายสำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อน ครูไม่ควรบอกระดับความยากของคำถามหรืองานที่มอบหมายให้นักเรียนทำ เพราะถ้าครูบอกว่ายาก นักเรียนที่เรียนอ่อนก็เกิดความท้อแท้ไม่อยากทำ แต่ถ้าครูบอกว่าง่าย นักเรียนที่เรียนเก่งก็ไม่อยากทำเพราะไม่ท้าทายความสามารถของนักเรียน นอกจากนี้ครูไม่ควรถามคำถามแล้วให้นักเรียนตอบพร้อมกันทั้งห้องเนื่องจากครูจะไม่ทราบว่าใครเข้าใจ ใครตอบได้ และใครไม่เข้าใจและไม่ตอบบ้าง และครูควรถามคำถามนักเรียนที่นั่งในตำแหน่งที่ต่าง ๆ ของห้อง

ดังนั้นในการถามคำถามครูควรถามคำถามที่น่าสนใจ ช่วยกระตุ้นความคิดของนักเรียน คำถามที่ไม่มีคำตอบ คำถามที่ไม่ชัดเจนไม่ทราบว่าถามอะไรนั้นครูไม่ควรถามนักเรียน เพราะนักเรียนจะเกิดความรู้สึกเบื่อหน่ายไม่อยากเรียน และคำถามนั้นควรเป็นคำถามที่นักเรียนสามารถอภิปรายคำตอบ แสดงความคิดเห็นและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน

ตัวอย่างคำถามในการสอนพีชคณิต เรื่อง สมการกำลังสอง (Quadratic equation)

1. สมการ $x^2 = 10$ คือสมการอะไร
2. สมการ $x^2 = 10$ สามารถหารากของสมการได้กี่ราก
3. นักเรียนมีวิธีการหาค่าของรากสมการได้อย่างไร
4. สมการ $x^2 = 10$ และ $x^2 - 10 = 0$ ทั้งสองสมการนี้สมมูลกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
5. นักเรียนสามารถหาค่าของรากของสมการ $3x^2 + 4 = 31x$ ได้อย่างไร

6. รากของสมการ $2x^2 - 10 = 5$ และ $x^2 = 5$ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

7. ทำไมรากของสมการ $x^2 + 9 = 18$ และ $x + 3 = 6$ จึงไม่เท่ากัน

3. เทคนิคการสร้างแรงจูงใจ

การที่ครูทราบเกี่ยวกับแรงจูงใจในตัวนักเรียน จะทำให้ครูทราบถึงความต้องการของนักเรียนในวัยนั้น สามารถให้กำลังใจนักเรียนและจัดกิจกรรมเพื่อตอบสนองได้ถูกต้อง และแรงจูงใจ หมายถึง ตัวกระตุ้นที่ทำให้คนเราแสดงพฤติกรรมต่าง ๆ กัน

การที่คนเรามีความต้องการในสิ่งใดสิ่งหนึ่ง แสดงว่าเราขาดในสิ่งนั้นซึ่งจะเป็นแรงผลักดันให้เราแสดงพฤติกรรมเพื่อให้ได้สิ่งนั้นมา เมื่อเราได้สิ่งที่สนองความต้องการแล้ว เราก็จะหยุดพฤติกรรมนั้น แต่คนเราก็มีความต้องการอย่างไม่มีที่สิ้นสุดจึงมีการแสดงพฤติกรรมต่าง ๆ อยู่ตลอดเวลา และถ้าครูมีความเข้าใจในพฤติกรรมของนักเรียนว่านักเรียนทุกคนมีความต้องการที่จะประสบความสำเร็จในการเรียน ซึ่งความสำเร็จนั้นจะก่อให้เกิดกำลังใจและมีแรงจูงใจให้กระทำงานอื่น ๆ ต่อไป ดังนั้นครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์สามารถสร้างแรงจูงใจให้เกิดขึ้นกับนักเรียนได้ด้วยการจัดประสบการณ์ให้นักเรียนได้ประสบความสำเร็จซ้ำ ๆ ติดต่อกันเป็นเวลานาน เช่น ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ให้นักเรียนทำ อาจทำให้เกิดแรงจูงใจในการเรียนสูงหรือต่ำได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความยากง่ายของโจทย์ปัญหา นอกจากนี้ความน่าสนใจของบทเรียนก็มีผลในด้านแรงจูงใจ บทเรียนหรือแบบฝึกหัดที่ทำท่ายความสามารถ การเปิดโอกาสให้นักเรียนเลือกทำ เหล่านี้ล้วนเป็นแรงจูงใจให้นักเรียนเกิดความต้องการที่จะทำสำเร็จ

แรงจูงใจนั้นมี 2 ลักษณะ [3] คือ แรงจูงใจภายนอก ได้แก่ ผลการเรียน และแรงจูงใจภายใน ได้แก่ ความอยากรู้อยากเห็น อยากสำรวจตรวจสอบ อยากจัดการ ดังนั้นครูสามารถพัฒนาความรู้ความสามารถและทักษะในด้านต่าง ๆ ของนักเรียนให้เกิดผลดีด้วยการพัฒนาแรงจูงใจ สร้างขวัญและกำลังใจ จัดสภาพการเรียนและการทำงานให้เหมาะสมกับสติปัญญาและความสามารถของนักเรียน แรงจูงใจที่สำคัญและจำเป็นสำหรับนักเรียน คือ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ (Achievement motive) ซึ่งเป็นแรงจูงใจที่จะทำสิ่งต่าง ๆ ให้ได้รับความสำเร็จ เช่น การแก้โจทย์ปัญหาเศษส่วน การพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ นักเรียนที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูงจะเป็นคนที่มีความมานะพยายาม อดทน วางแผนการทำงานของตนเอง และตั้งระดับความหวังไว้สูง ตลอดจนพยายามเอาชนะอุปสรรคต่าง ๆ เพื่อให้งานของตนสำเร็จลุล่วงไปได้

แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์เป็นสิ่งที่เรียนรู้และพัฒนาขึ้นมาได้ในตัวของนักเรียน โดยการจัดโปรแกรมการเรียนรู้ที่เน้นความรับผิดชอบ การรู้จักตนเองและเข้าใจตนเอง จากประสบการณ์ของความสำเร็จและความล้มเหลว มีเจตคติที่ดีต่อตนเองและมีความเชื่อมั่นในตนเอง ครูควรมอบหมายงานที่ไม่ยากเกินไปให้นักเรียนได้ทำและประสบความสำเร็จ แสดงความรักและการเอาใจใส่ ให้การสนับสนุน นอกจากนี้ครูควรทำความเข้าใจกับผู้ปกครอง พ่อแม่ของนักเรียน เพื่อให้ทางบ้านได้ช่วยฝึกให้นักเรียนได้ช่วยตนเองและเป็นตัวของตัวเอง รวมทั้งการคาดหวังให้บุตรหลานของตนได้ทำงาน ช่วยเหลืองานภายในบ้าน โดยพ่อแม่ผู้ปกครองควรจะแสดงความรักเอาใจใส่สนับสนุน เพื่อเป็นรางวัลสำหรับการทำงานและการปฏิบัติตัวของบุตรหลาน ซึ่งจะได้มีความพยายามในการทำงานต่อไปด้วยความตั้งใจ การให้บุตรหลานช่วยเหลืองานบ้าน เป็นการปลูกฝังความมีน้ำใจ ความรับผิดชอบ และความอดทน

การจัดสภาพการเรียนรู้และการทำงาน รวมทั้งการให้แบบฝึกหัดที่เหมาะสมกับระดับสติปัญญาความสามารถของนักเรียน เป็นการสร้างขวัญและกำลังใจให้กับนักเรียน

การเสริมกำลังใจ หมายถึง การให้สิ่งเร้าที่ทำให้นักเรียนเกิดความพึงพอใจ สิ่งเร้านี้จะเป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนแสดงพฤติกรรมที่เหมาะสมมากขึ้น การเสริมกำลังใจมี 2 ชนิด [3] คือ

1. การเสริมกำลังใจทางบวก หมายถึง สิ่งเร้าที่ทำให้นักเรียนเกิดความพอใจ ได้แก่ รางวัล คำชมเชย การยิ้ม การพยักหน้า ความสนใจ สิ่งเหล่านี้เป็นตัวเสริมกำลังใจที่มีอิทธิพลมากสำหรับนักเรียน เพราะนักเรียนทุกคนต้องการเป็นที่ยอมรับ เป็นที่รักและต้องการคำชมเชย

2. การเสริมกำลังใจทางลบ หมายถึง การทำสิ่งที่ไม่สบายใจต่าง ๆ เกิดขึ้น ได้แก่ การดูต่ำว่ากล่าว การตำหนิตติเตียน การวิพากษ์วิจารณ์ในเชิงลบ ซึ่งครูไม่ควรแสดงพฤติกรรมเหล่านี้

ดังนั้นในขณะที่สอน ครูควรเสริมกำลังใจ เพื่อเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนมีความสนใจในการเรียน ด้วยการสร้างความพึงพอใจให้เกิดขึ้น เพื่อเป็นการสร้างบรรยากาศที่ดีระหว่างครูกับนักเรียนให้เกิดขึ้นได้ดังนี้

1. การแจ้งผลการเรียนของนักเรียนให้ทราบ การตรวจงานที่นักเรียนทำอย่างสม่ำเสมอ
2. การให้รางวัลและการชมเชย เช่น ครูพูดว่า “ดีมาก” “เก่งมาก” “ถูกต้องแล้ว” “ดีแล้ว” “ตอบได้ชัดเจนดีมาก” หรือการยอมรับคำตอบของนักเรียนด้วยการ “ยิ้ม” “พยักหน้า” “ตบมือ” เป็นต้น
3. การมอบหมายงานที่น่าสนใจ ทำลายความสามารถของนักเรียน งานที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้เลือกทำ และงานที่สร้างชื่อเสียง

4. การทดสอบและการแข่งขัน จะช่วยให้นักเรียนได้ใช้ความพยายามในการเรียนและการทำงานให้ประสบผลสำเร็จ

4. เทคนิคการยกตัวอย่าง

การยกตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับชุมชน สังคม ที่นักเรียนอาศัยอยู่เป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนเกิดความสนใจและได้รับความรู้เกี่ยวกับท้องถิ่นที่นักเรียนอาศัยอยู่ นอกจากความรู้คณิตศาสตร์ นักเรียนจะได้มองเห็นวิธีการทำและคิดตามตัวอย่างที่ครูแสดง โดยครูใช้การถามตอบ หรือการถามตอบประกอบการอธิบายขณะที่ยกตัวอย่างและนักเรียนคิดทำตามตัวอย่างนั้น จำนวนตัวอย่างที่ครูให้ขึ้นอยู่กับเนื้อหา แต่การยกตัวอย่างจะต้องเริ่มจากตัวอย่างที่ง่ายไปหาตัวอย่างที่ยากและซับซ้อน

ตัวอย่างเช่น นักเรียนได้เรียนเรื่องสมการกำลังสองเกี่ยวกับการหาค่าของจุดสูงสุดและต่ำสุดแล้ว จงทราบว่าเมื่อ $a \neq 0$

$$\text{จะได้ } y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{นั่นคือ } y = a(x - h)^2 + d, \quad h = \frac{-b}{2a}, \quad d = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ดังนั้นจุด (h, d) เป็นจุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = a(x - h)^2 + d$ เมื่อ $a > 0$

และจุด (h, d) เป็นจุดสูงสุดของกราฟของสมการ $y = a(x - h)^2 + d$ เมื่อ $a < 0$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยเริ่มจากตัวอย่างที่ง่ายไปหาตัวอย่างที่ยากดังนี้

ตัวอย่าง 4.1 จงหาจุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = x^2 + 2x + 4$

วิธีทำ $y = x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$

ถ้า $x = -1$ แล้ว $y = 3$ และ ถ้า $x \neq -1$ แล้ว $(x + 1)^2 > 0$ นั่นคือ $y > 3$

ดังนั้น จุดต่ำสุด คือ $(-1, 3)$

ตัวอย่าง 4.2 จงหาจุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = x^2 - 6x$

วิธีทำ $y = x^2 - 6x = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x - 3)^2 - 9$

ถ้า $x = 3$ แล้ว $y = -9$ และ ถ้า $x \neq 3$ แล้ว $(x - 3)^2 > 0$ นั่นคือ $y > -9$

ดังนั้น จุดต่ำสุด คือ $(3, -9)$

ตัวอย่าง 4.3 จงหาจุดสูงสุดของกราฟของสมการ $y = -2x^2 - 4x + 3$

วิธีทำ $y = -2x^2 - 4x + 3 = -2(x^2 + 2x) + 3$

$$= -2(x^2 + 2x + 1) + 2 + 3 = -2(x + 1)^2 + 5$$

ถ้า $x = -1$ แล้ว $y = 5$ และ ถ้า $x \neq -1$ แล้ว $(x + 1)^2 > 0$

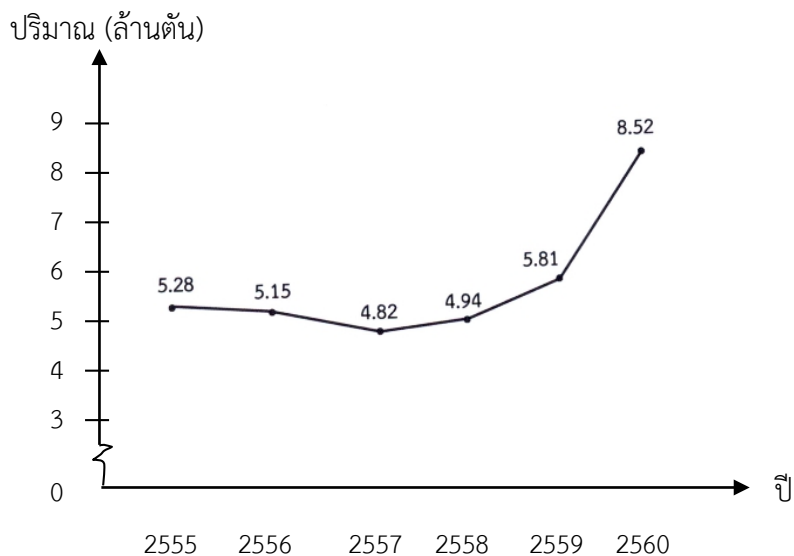
นั่นคือ $-2(x + 1)^2 < 0$ และ $y < 5$

ดังนั้น จุดสูงสุด คือ $(-1, 5)$

การยกตัวอย่างสิ่งที่เกี่ยวข้องกับนักเรียนในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตอบคำถาม หรือ เรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ง่ายขึ้น หรือการยกตัวอย่างสิ่งแวดล้อมแล้วให้นักเรียนตอบคำถาม เช่น

1. การอ่านกราฟเส้นแสดงปริมาณขยะที่นำกลับมาใช้ประโยชน์

ปริมาณขยะที่นำกลับมาใช้ประโยชน์ตั้งแต่ปี 2555 - 2560



ที่มา: กรมควบคุมมลพิษ กระทรวงทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อม

1) ปีใดมีการนำขยะกลับมาใช้ประโยชน์มากที่สุด จำนวนเท่าไร

ตอบ ---ปี 2560 จำนวน 8.52 ล้านตัน---

2) ปีใดมีการนำขยะกลับมาใช้ประโยชน์น้อยที่สุด จำนวนเท่าไร

ตอบ ----ปี 2557 จำนวน 4.82 ล้านตัน----

3) ปี 2558 มีการนำขยะกลับมาใช้ประโยชน์น้อยกว่าปี 2559 จำนวนเท่าไร

ตอบ ----น้อยกว่าเป็นจำนวน $5.81 - 4.94 = 0.87$ ล้านตัน--

4) ปี 2555 มีการนำขยะกลับมาใช้ประโยชน์มากกว่าปี 2556 จำนวนเท่าไร

ตอบ ---มากกว่าเป็นจำนวน $5.28 - 5.15 = 0.13$ ล้านตัน--

5) ตั้งแต่ปี 2555 ถึง 2560 มีการนำขยะกลับมาใช้ประโยชน์เป็นปริมาณทั้งหมดเท่าไร

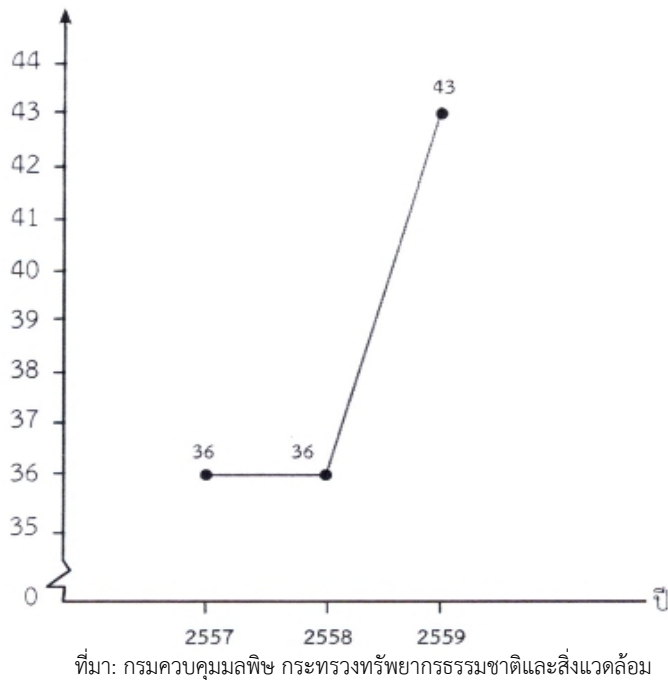
ตอบ ----ปริมาณทั้งหมด $5.28 + 5.15 + 4.82 + 4.94 + 5.81 + 8.52$
 $= 34.52$ ล้านตัน-----

2. การอ่านกราฟเส้นแสดงปริมาณค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาด 2.5 ไมครอน (PM 2.5)

ในบรรยากาศมีไอน้ำ ฝุ่นละออง ก๊าซต่าง ๆ ได้แก่ ออกซิเจน คาร์บอนไดออกไซด์ คาร์บอนมอนอกไซด์ ปัจจุบันในอากาศมีฝุ่นละอองมากมาย ซึ่งเกิดจากการก่อสร้าง การเผาขยะ การปล่อยควันดำจากรถยนต์ รถโดยสาร เนื่องจากการเผาไหม้ไม่สมบูรณ์ ซึ่งฝุ่นละอองมีผลต่อสุขภาพ ทำให้สุขภาพทรุดโทรมได้ กรมควบคุมมลพิษ ได้วัดค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาดไม่เกิน 2.5 ไมครอน (PM 2.5) ซึ่ง PM 2.5 คืออะไร PM 2.5 คือ ฝุ่นละอองขนาดเล็กไม่เกิน 2.5 ไมครอน เปรียบเทียบได้ว่า มีขนาดประมาณ 1 ส่วน ใน 25 ส่วนของเส้นผ่านศูนย์กลางของเส้นผมมนุษย์ ขนจมูกของมนุษย์ไม่สามารถกรองได้ จึงสามารถแพร่กระจายเข้าสู่ทางเดินหายใจ กระแสเลือด และแทรกซึมเข้าสู่กระบวนการทำงานของอวัยวะต่าง ๆ ในร่างกาย ทำให้เพิ่มความเสี่ยงการเป็นโรคเรื้อรังและมะเร็ง ซึ่งองค์การอนามัยโลกได้มีคำเตือนไว้ กรมควบคุมมลพิษ กระทรวงทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อม ได้วัดค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาดไม่เกิน 2.5 ไมครอน จากสถานีตรวจวัดบริเวณเคหะชุมชนดินแดง กรุงเทพมหานคร ตั้งแต่ปี 2557 ถึงปี 2559 ดังนี้

ค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาดเล็ก 2.5 ไมครอน (PM 2.5)

ปริมาณ (ไมโครกรัมต่อลูกบาศก์เมตร)



- 1) ปีใดที่ปริมาณค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาดเล็ก 2.5 ไมครอน (PM 2.5) เท่ากัน และเป็นเท่าไร

ตอบ ...ปี 2557 และปี 2558 มี PM 2.5 ปริมาณ 36 ไมโครกรัมต่อลูกบาศก์เมตร.

- 2) ปี 2559 มีปริมาณค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาดเล็ก 2.5 ไมครอน (PM 2.5) เท่าไร และมากกว่า ปี 2557 และปี 2558 เท่าไร

ตอบ ...ปี 2559 มี PM 2.5 ปริมาณ 43 ไมโครกรัมต่อลูกบาศก์เมตร ซึ่งมากกว่า

...ปี 2557 และปี 2558 เท่ากัน $43 - 36 = 7$ ไมโครกรัมต่อลูกบาศก์เมตร.

- 3) นักเรียนคิดว่าในอนาคต ปริมาณค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาดเล็ก 2.5 ไมครอน (PM 2.5) จะเพิ่มขึ้นหรือลดลง เพราะเหตุใด

ตอบ ...ในอนาคตปริมาณค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาดเล็ก 2.5 ไมครอน (PM 2.5)

...จะเพิ่มขึ้น เนื่องจากประชากรเพิ่มขึ้น ทำให้การคมนาคมขนส่งเพิ่มขึ้น

...การขยายด้านอุตสาหกรรมมากขึ้น ความต้องการในการใช้ไฟฟ้าเพิ่มขึ้น

__ทำให้ต้องผลิตไฟฟ้ามากขึ้น ตลอดจนความหนาแน่นของอากาศและความชื้น
__ในบรรยากาศ ซึ่งอาจทำให้ฝุ่นละอองสะสมและมีปริมาณมากขึ้น

4) นักเรียนคิดว่าจะลดปริมาณค่าเฉลี่ยฝุ่นละอองขนาดไม่เกิน 2.5 ไมครอน (PM 2.5) ได้อย่างไร

ตอบ __ไม่เผาขยะมูลฝอยในที่โล่ง ตรวจสอบสภาพเครื่องยนต์ของรถยนต์และ
__รถโดยสารไม่ให้ปล่อยควันดำ ช่วยกันประหยัดไฟฟ้า

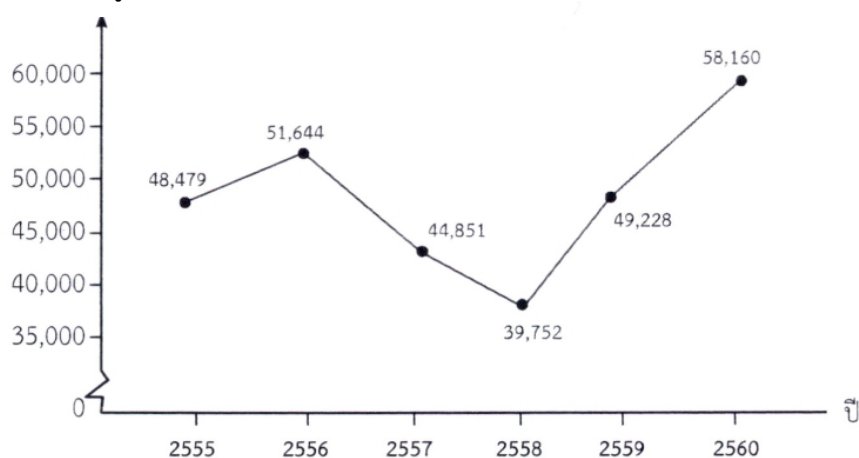
หมายเหตุ การป้องกัน PM 2.5 ทำได้โดยสวมหน้ากากมาตรฐาน N95 ซึ่งจะป้องกันฝุ่นขนาด 0.3 ไมครอน ได้อย่างน้อย 95%

3. การอ่านกราฟเส้นแสดงปริมาณน้ำกักเก็บในเขื่อนขนาดใหญ่

น้ำเป็นส่วนประกอบสำคัญในร่างกายของเรา เพราะร่างกายมีน้ำเป็นส่วนประกอบสำคัญอยู่ถึง 75 ส่วน ใน 100 ส่วน จึงมีคำกล่าวว่า “ที่ใดไม่มีน้ำที่นั่นย่อมไม่มีชีวิต” ถ้าเมื่อใดที่ร่างกายเกิดภาวะขาดน้ำ จะส่งผลให้การทำงานของเซลล์ในร่างกายผิดปกติ และจะนำไปสู่การเกิดโรคต่าง ๆ ได้ ดังนั้นการใช้น้ำอย่างประหยัดจะช่วยทำให้ประเทศไทยมีน้ำเพียงพอสำหรับทุกคน กรมชลประทานและการไฟฟ้าฝ่ายผลิตแห่งประเทศไทยได้สำรวจปริมาณน้ำกักเก็บวันสิ้นปี (ล้านลูกบาศก์เมตร) ในเขื่อนขนาดใหญ่ ตั้งแต่ปี 2555 ถึง ปี 2560 ดังนี้

ปริมาณน้ำกักเก็บวันสิ้นปีในเขื่อนขนาดใหญ่ ตั้งแต่ปี 2555 ถึงปี 2560

ปริมาณ (ล้านลูกบาศก์เมตร)



ที่มา: กรมชลประทานและการไฟฟ้าฝ่ายผลิตแห่งประเทศไทย

- 1) ในปีใดปริมาณน้ำกักเก็บวันสิ้นปีในเขื่อนขนาดใหญ่กักเก็บน้ำได้มากที่สุด จำนวนเท่าไร และกักเก็บน้ำได้น้อยที่สุดในปีใด จำนวนเท่าใด

ตอบ __ ในปี 2560 มีจำนวน 58,160 ล้านลูกบาศก์เมตร และ

__ กักเก็บน้ำได้น้อยที่สุดในปี 2558 มีจำนวน 39,752 ล้านลูกบาศก์เมตร __

- 2) ในปี 2556 และปี 2560 ปริมาณน้ำกักเก็บวันสิ้นปีในเขื่อนขนาดใหญ่ต่างกันเท่าไร

ตอบ __ ปริมาณน้ำกักเก็บวันสิ้นปีในเขื่อนขนาดใหญ่ต่างกัน __

__ $58,160 - 51,644 = 6,516$ ล้านลูกบาศก์เมตร ____

- 3) ในปี 2560 ถ้าปริมาณน้ำกักเก็บวันสิ้นปีในเขื่อนขนาดใหญ่ ให้นำมาใช้เพียงครึ่งหนึ่งของปริมาณน้ำทั้งหมด และจำนวนประชากรทั้งประเทศ 66,234,000 คน โดยเฉลี่ยแต่ละคนจะใช้น้ำได้กี่ลูกบาศก์เมตร

ตอบ __ ปริมาณน้ำกักเก็บวันสิ้นปี 2560 ในเขื่อนใหญ่ครึ่งหนึ่งเท่ากับ

__ $58,160 \div 2 = 29,080$ ล้านลูกบาศก์เมตร และจำนวนประชากรทั้งประเทศ

__ 66,234,000 คน โดยเฉลี่ยแต่ละคนจะใช้น้ำได้

__ $29,080,000,000 \div 66,234,000 \approx 439.05$ ลูกบาศก์เมตร

5. เทคนิคการใช้สื่อการเรียนรู้

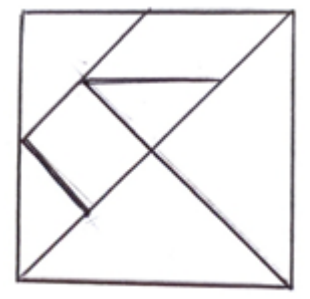
ในปัจจุบันสื่อการเรียนรู้ได้เข้ามามีบทบาทในวงการศึกษา ทั้งนี้เนื่องมาจากความเปลี่ยนแปลงของสังคมและความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ทำให้บทบาทของครูเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม คือ การที่ยึดครูเป็นศูนย์กลาง โดยครูเป็นผู้บอก ผู้แสดงแต่เพียงผู้เดียวมาเป็นการที่ยึดนักเรียนเป็นสำคัญ และครูเป็นผู้คอยช่วยเหลือและชี้แนะ

สื่อการเรียนรู้เป็นวัสดุหรือกิจกรรมที่ครูนำมาใช้ในการเรียนการสอน เพื่อให้นักเรียนเกิดความสนใจ กระตือรือร้นที่จะเรียน นักเรียนได้มีโอกาสร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ รู้จักเชื่อมโยงจากสิ่งที่ป็นรูปธรรมไปหานามธรรม ทำให้เกิดความเข้าใจในเรื่องที่เรียนอย่างชัดเจน แจ่มแจ้ง เกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียน และเกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ตัวอย่างเช่น

1. ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 26 ตัว

ตัวอักษรภาษาอังกฤษทั้ง 26 ตัว ได้แก่ A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z บางตัวมีแกนสมมาตร บางตัวไม่มีแกนสมมาตร และบางตัว มีมากกว่าหนึ่งแกนสมมาตร นักเรียนลองมาช่วยกันหาแกนสมมาตรของตัวอักษรเหล่านี้

2. แทนแตรม ประกอบด้วยรูปเรขาคณิต 7 ชิ้น เมื่อนำแต่ละชิ้นมาประกอบกัน นักเรียนจะได้รูปอะไรบ้าง



ปัจจุบันมีสื่อเทคโนโลยี โปรแกรมสำเร็จรูปมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ได้แก่ โปรแกรมพลวัต (Geometer sketpad) โปรแกรมคาปริ (Capri) และโปรแกรมจีโอจีบรา (GeoGebra)

สื่อการเรียนรู้ที่ครูนำมาใช้อาจเป็นสื่อสำเร็จหรือสื่อที่ครูประดิษฐ์ขึ้นใช้เอง แต่สื่อการเรียนรู้ที่ครูนำมาใช้จะต้องเหมาะสมกับเนื้อหา มีขนาดพอเหมาะที่จะนำมาให้นักเรียนดู มีสีสันสวยงาม ดึงดูดความสนใจของนักเรียน มีความแปลกใหม่ เหมาะสมกับเวลาที่มีอยู่สำหรับการสอนเนื้อหานั้น ๆ และครูจะต้องเตรียมตัวในการใช้สื่อการเรียนรู้ก่อนการสอน ทดลองใช้สื่อการเรียนรู้ที่นั้นโดยเรียงลำดับการใช้สื่อการเรียนรู้แต่ละอย่าง เตรียมคำถามเพื่อถามนักเรียน เพื่อให้นักเรียนได้มีโอกาสร่วมกิจกรรมทั้งในด้านการตอบคำถามและการใช้สื่อการเรียนรู้

6. เทคนิคการสรุปบทเรียน

การสรุปบทเรียน เป็นกิจกรรมที่ควรทำทุกครั้งหลังจากที่นักเรียนเรียนจบเนื้อหาในแต่ละคาบของการเรียน เพื่อเป็นการสรุปเรื่องราวและเนื้อหาที่นักเรียนได้เรียนไปแล้ว ได้แก่ ความคิดรวบยอดหลักการ กฎ สูตร บทนิยาม ในการสรุปอาจสรุปด้วยคำพูด การเขียน การพิมพ์ การร้องเพลง เป็นต้น เพื่อให้นักเรียนจะได้นำความรู้เหล่านี้ไปใช้ในการแก้ปัญหาและการเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ระดับสูงที่ต้องใช้ความรู้เหล่านี้ต่อไป

ในการสอนแต่ละคาบครูจะต้องมีขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ขั้นสอนและขั้นสรุป โดยให้นักเรียนเข้ามามีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ การที่นักเรียนจะสรุปบทเรียนได้นั้นครูจะต้องเตรียมการสอนเป็นอย่างดี มีลำดับขั้นตอนในการสอน มีการถามคำถามให้นักเรียนคิดแล้วตอบ มีการศึกษาตัวอย่างที่น่าสนใจหลาย ๆ ตัวอย่าง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเรียน และในตอนท้ายก่อนที่จะสิ้นสุดการสอนครูควรให้นักเรียนสรุปบทเรียนที่นักเรียนเรียนไปในคาบนี้ทุกครั้ง ก่อนการทำการบ้านฝึกหัดหรือโจทย์เพิ่มเติมท้ายชั่วโมง ซึ่งการที่นักเรียนได้มีโอกาสฝึกในการสรุปบทเรียน นักเรียนก็จะมีโอกาสสรุปความคิดของตนเอง จดบันทึกไว้บทวน ทำให้นักเรียนมีความรู้ในเรื่องที่เรียนไปแล้วเมื่อนักเรียนได้ฝึกสรุปบทเรียนที่เรียนแล้วบ่อย ๆ ก็จะเกิดความชำนาญ เกิดทักษะ ทุกครั้งที่เรียนเรื่องอะไรไปก็จะสามารถสรุปเรื่องที่เรียนไปนั้นได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] ยุพิน พิพิธกุล. (2539). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.
Phiphitkul, Y. (1996). *Mathematics Instruction*. Bangkok: Bophit Printing.
- [2] ราชบัณฑิตยสถาน. (2556). *พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน 2554* (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร: บริษัท นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่น จำกัด.
The Royal Institute of Thailand (2013). *Dictionary of Royal Institute of Thailand 2556 BC*. (4th ed.). Bangkok: Nanmeebooks Publication Co., Ltd.
- [3] สิริพร ทิพย์คง. (2536). *ทฤษฎีและวิธีการสอนวิชาคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
Thipkong, S. (1993). *Theory and Method of Teaching Mathematics*. Bangkok: Faculty of Education, Kasetsart University.
- [4] สิริพร ทิพย์คง. (2537). *แนวโน้มการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
Thipkong, S. (1994). *Trend of Teaching Mathematics*. Bangkok: Faculty of Education, Kasetsart University.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 64(699) กันยายน – ธันวาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

กลไพ่กับระบบเลขฐาน

Card Trick with Base Number System

เรวัต ถนัดกิจศิริณ

Raywat Tanadkithirun

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: raywat.t@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 9 กรกฎาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 21 สิงหาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 4 กันยายน 2562

บทคัดย่อ

ในบทความนี้กลไพ่ 27 ใบของ มาร์ติน การ์ดเนอร์ ได้ถูกนำเสนอ การใช้ระบบเลขฐานสามารถอธิบายการแสดงกลไพ่นี้ นอกจากนี้เรายังเสนอการขยายวิธีการเล่นกลไพ่นี้ให้ทั่วไปยิ่งขึ้นด้วย

คำสำคัญ: กลไพ่ ระบบเลขฐาน

ABSTRACT

In this article, the 27 Card Trick of Martin Gardner is presented. The use of base number systems can explain how to perform the trick. Generalized versions of this card trick are also offered.

Keywords: Card trick, Base number system

1. บทนำ

ไฟถือกำเนิดมานานนับพันปีแล้ว โดยการเล่นไฟมีต้นกำเนิดมาจากประเทศจีนในช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 12 หรือก่อนหน้านั้น [3] แล้วแพร่กระจายผ่านเส้นทางการค้าขายระหว่างประเทศมาเรื่อย ๆ จนถึงทวีปยุโรป และทวีความนิยมมากขึ้นสำหรับประเทศในแถบทวีปยุโรปในช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 14 โดยไฟได้มีวิวัฒนาการมาเรื่อย ๆ ทั้งการเปลี่ยนแปลงจำนวนไฟในสำหรับ รูปแบบหน้าตาของไฟ หรือแม้แต่วัสดุที่ใช้ผลิตจากไม้มาเป็นกระดาษและพลาสติกในเวลาต่อมา จนกลายเป็นไฟที่เรารู้จักกันดีในปัจจุบัน มีเกมส์และกฎกติกามากมายที่ใช้ไฟในการเล่น ทั้งเพื่อความสนุก การพนัน หรือแม้กระทั่งการกีฬาอย่างกีฬาบริดจ์ ซึ่งมายากลก็เป็นอีกหนึ่งความบันเทิงที่สามารถใช้ไฟประกอบในการแสดงได้

ถ้าหากเราพูดถึงมายากลที่ใช้ไฟเป็นอุปกรณ์แล้ว เราอาจจะเคยเจอกลไฟที่ต้องใช้ทักษะความสามารถในการควบคุมไฟของผู้ทำการแสดงซึ่งต้องอาศัยการฝึกฝนอย่างจริงจังจึงจะสามารถเล่นได้อย่างแนบเนียนและเป็นธรรมชาติ เช่น การพลิกไฟสองใบแต่ให้ดูเหมือนเป็นใบเดียว การใช้นิ้วก้อยแอบคันกองไฟ หรือเทคนิคการสับและตัดไฟ เป็นต้น ในบางครั้งก็ต้องมีการเตรียมการบางอย่างก่อนทำการแสดง เช่น การเตรียมลำดับของไฟบางใบในกองไฟเอาไว้ล่วงหน้า การนับไฟตอนเริ่มทำการแสดงแต่แอบจำไฟบางใบเอาไว้ว่าอยู่ตำแหน่งใด หรือการแอบดูไฟใบล่างสุดก่อนทำการแสดง แต่ก็มีกลไฟจำนวนหนึ่งที่ผู้เล่นไม่จำเป็นต้องมีความสามารถในการควบคุมไฟหรือมีการเตรียมการก่อนทำการแสดง ยิ่งไปกว่านั้น กลไฟดังกล่าวยังสามารถใช้คณิตศาสตร์มาอธิบายผลเฉลยได้ด้วย หนึ่งในกลซึ่งอาจจะกล่าวได้ว่าโด่งดังที่สุดกลหนึ่งเมื่อพูดถึงกลไฟที่มีคณิตศาสตร์มาเกี่ยวข้องด้วยก็คือกลไฟ 27 ใบของ มาร์ติน การ์ดเนอร์ [2] ซึ่งเฉลยของกลนั้นสามารถใช้ระบบเลขฐานช่วยในการคิดได้

บทความนี้จะเล่าถึงวิธีการเล่นกลไฟ 27 ใบของ มาร์ติน การ์ดเนอร์ และการใช้ระบบเลขฐานช่วยให้การแสดงกลมีระบบที่ดี และการขยายวิธีการเล่นกลไฟนี้ให้ทวีปยิ่งขึ้นด้วย

2. วิธีการเล่นกลไฟ 27 ใบของ มาร์ติน การ์ดเนอร์

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงวิธีการเล่นกลไฟ 27 ใบของ มาร์ติน การ์ดเนอร์ โดยจะแบ่งออกเป็นสองส่วน คือ การแสดงกล และเฉลยกล

2.1 การแสดงกล

นักมายากลคนหนึ่งใช้ไฟจำนวน 27 ใบเล่นกล โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. ให้ผู้ชมเลือกไฟหนึ่งใบและจำเอาไว้ แต่ต้องไม่ให้นักมายากลรู้ว่าเป็นไฟอะไร จากนั้นให้สับไฟทั้งกองแล้วคืนนักมายากล
2. ให้ผู้ชมเลือกตัวเลขที่ชอบจากเลข 1 ถึง 27 มาหนึ่งตัวเลข โดยให้บอกด้วยว่าเลือกเลขอะไร สมมติว่าเป็นเลข x
3. นักมายากลทำการเปิดไฟที่ละใบลงบนโต๊ะให้เป็นสามกอง โดยไฟใบแรกถูกวางลงกองซ้าย ไฟใบที่สองถูกวางลงกองกลาง ไฟใบที่สามถูกวางลงกองขวา ไฟใบที่สี่ถูกวางลงกองซ้ายทับไฟใบแรก เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนครบทั้ง 27 ใบ โดยนักมายากลบอกให้ผู้ชมดูตามไปด้วยว่าไฟที่เลือกเอไว้นั้นอยู่กองไหน
4. ให้ผู้ชมชี้ว่าไฟที่เลือกไว้นั้นอยู่กองไหน
5. นักมายากลซ้อนทับไฟทั้งสามกองให้เป็นหนึ่งกอง
6. นักมายากลทำขั้นตอนที่ 3 ถึง 5 ซ้ำอีก 2 รอบ รวมทั้งหมดเป็น 3 รอบ
7. ให้ผู้ชมเปิดไฟใบที่ x โดยนับจากบนลงล่างของกองไฟ ผลปรากฏว่า ไฟใบนั้นคือไฟที่ผู้ชมเลือกไว้ในตอนแรกนั่นเอง

ในการแสดงนี้หน้าไฟจะคว่ำตลอดยกเว้นตอนที่เปิดไฟที่ละใบเพื่อเรียงเป็นสามกอง ส่วนการซ้อนทับไฟให้เป็นหนึ่งกองนั้นนักมายากลสามารถเลือกลำดับการซ้อนทับกองไฟได้เอง กลไฟนี้ไม่จำเป็นต้องมีการเตรียมการกับกองไฟมาก่อนหรือใช้เทคนิคการควบคุมไฟใด ๆ หากแต่ต้องใช้ความรวดเร็วในการคิดเลขที่ถูกต้องแม่นยำแทน

2.2 เฉลยกล

สังเกตว่าขั้นตอนที่นักมายากลสามารถทำอะไรซ้ำอย่างกับกองไฟได้ก็คือ ตอนที่นักมายากลนำไฟมาซ้อนทับกันให้เป็นหนึ่งกองซึ่งมีทั้งหมดสามครั้ง ดังนั้นลำดับการจัดเรียงกองไฟทั้งสามครั้งจึงเป็นหนทางเดียวที่นักมายากลจะสามารถควบคุมกองไฟได้ ในแต่ละรอบที่มีการรวมไฟให้เป็นกองเดียวนั้น นักมายากลสามารถนำกองไฟที่ผู้ชมชี้มาวางได้สามตำแหน่ง ได้แก่ กองบน กองกลาง หรือ กองล่าง ส่วนการสลับตำแหน่งการวางของอีกสองกองที่เหลือนั้น ไม่น่าจะมีผลต่อการติดตามตำแหน่งของไฟที่ผู้ชมเลือกไว้ ดังนั้น นักมายากลจึงสามารถเลือกวางกองไฟทั้งสามรอบได้ทั้งหมด $3 \times 3 \times 3 = 27$ รูปแบบ ซึ่งในแต่ละรูปแบบนั้นจะสามารถทำให้ไฟที่ผู้ชมเลือกไปอยู่ในตำแหน่งต่าง ๆ ทั้ง 27 ตำแหน่งได้นั่นเอง การที่จะหาว่ารูปแบบใดถึงจะทำให้ไฟที่ผู้ชมเลือกไปอยู่ตำแหน่ง x ได้นั้นสามารถใช้ระบบเลขฐานช่วยในการคิดได้

X-1	เลขฐาน 3		ครั้งที่ 1		ครั้งที่ 2		ครั้งที่ 3
0	000		0				
1	001		1	}	0		
2	002		2	}			
3	010		0	}			
4	011		1	}	1		
5	012		2	}			0
6	020		0	}			
7	021		1	}	2		
8	022		2	}			
9	100		0	}			
10	101		1	}	0		
11	102		2	}			
12	110		0	}			
13	111		1	}	1		
14	112		2	}			1
15	120		0	}			
16	121		1	}	2		
17	122		2	}			
18	200		0	}			
19	201		1	}	0		
20	202		2	}			
21	210		0	}			
22	211		1	}	1		
23	212		2	}			2
24	220		0	}			
25	221		1	}	2		
26	222		2	}			

รูปที่ 2.1 การวางกองไฟในแต่ละครั้งสำหรับกลไฟ 27 ใบของ มาร์ติน การ์ดเนอร์

เนื่องจากเราแบ่งกองไฟเป็น 3 กองในแต่ละรอบ เราจะเลือกใช้ระบบเลขฐาน 3 สำหรับกลไฟ 27 ใบ ของ มาร์ติน การ์ดเนอร์ นี้ โดยเราจะต้องนำเลขที่ผู้ชมเลือกมาลบออกด้วย 1 ก่อนที่จะทำการแปลงเลขฐาน เพื่อให้ $x-1$ ในระบบเลขฐาน 3 นั้นเป็นแค่เลขไม่เกิน 3 ตำแหน่ง และต่อจากนี้เราจะนับตำแหน่งต่าง ๆ เริ่มที่ตำแหน่ง 0 รูป 2.1 จะบอกวิธีการวางกองไฟในแต่ละครั้งของ

นักมายากล สมมติว่า $x-1$ ในระบบเลขฐาน 3 คือ ABC_3 โดยที่ $A, B, C \in \{0, 1, 2\}$ เราจะให้เลข 0, 1, 2 แทน การวางกองไฟที่ผู้ชมชี้ไว้กองบน กองกลาง และกองล่าง ตามลำดับ นักมายากลจะต้องนำกองไฟที่ผู้ชมชี้ไว้กอง C สำหรับครั้งแรก ไว้กอง B สำหรับครั้งที่สอง และไว้กอง C สำหรับครั้งสุดท้าย นั่นจะทำให้ไฟที่ผู้ชมเลือกไว้ไปอยู่ในตำแหน่งที่ต้องการได้

เพื่อให้เป็นการง่ายต่อการเข้าใจว่าเหตุใดการทำเช่นนี้จะทำให้ไฟที่ผู้ชมเลือกไปอยู่ในตำแหน่งที่ต้องการได้ เราจะอธิบายเหตุผลอย่างเป็นขั้นตอนโดยใช้ตัวอย่างประกอบ สมมติว่าเลขที่ผู้ชมเลือกเอาไว้คือเลข 12

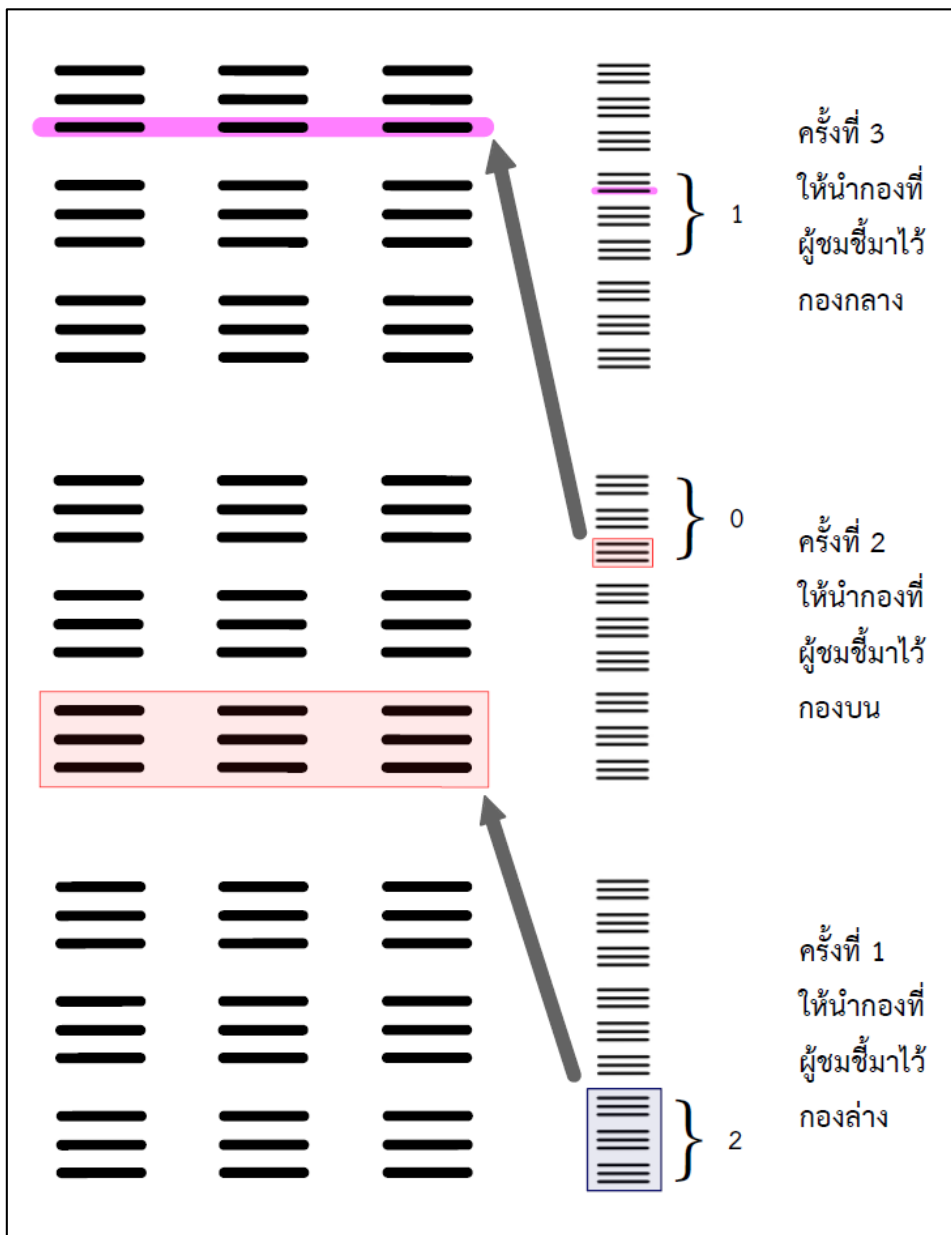
ขั้นตอนที่ 1 นักมายากลต้องการให้ไฟที่ผู้ชมเลือกไปอยู่ในตำแหน่งที่ 11 ในตอนจบ (เริ่มนับไปบนสุดเป็นตำแหน่งที่ 0) นักมายากลจึงนำเลข 12 มาลบออกด้วย 1 แล้วแปลงเป็นเลขฐาน 3 ได้เป็น

$$12 - 1 = 11 = (1 \times 3^2) + (0 \times 3) + (2 \times 3^0) = 102_3$$

ขั้นตอนที่ 2 ให้พิจารณารูป 2.2 เนื่องจากไฟแต่ละกองที่นักมายากลต้องเลือกไปวางซ้อนทับกันมีกองละ 9 ใบ แสดงว่าในรอบที่ 3 นั้น นักมายากลจะต้องนำกองไฟที่ผู้ชมชี้ไปวางไว้กองกลางเท่านั้น ซึ่งตรงกับตำแหน่งที่เราคิดในระบบเลขฐาน 3 ซึ่งคือเลข 1

ขั้นตอนที่ 3 สำหรับกองไฟที่นักมายากลต้องนำไปวางไว้กองกลางในขั้นตอนที่ 2 นั้น นักมายากลจะต้องทำให้ไฟที่ผู้ชมเลือกไว้ไปอยู่ในตำแหน่งที่ 2 (เริ่มนับไปบนสุดเป็นตำแหน่งที่ 0 เมื่อพลิกกองไฟให้คว่ำแล้ว) ของกองไฟนั้นด้วย แต่เนื่องจากนักมายากลไม่รู้ว่ไฟใบนั้นอยู่กองย่อยไหนจนกว่าผู้ชมจะชี้ในรอบที่ 3 ไฟที่มีสิทธิ์เป็นไฟที่ผู้ชมเลือกคือไฟที่อยู่ในตำแหน่งที่ 2 ของทั้ง 3 กองย่อยนั่นเอง ซึ่งการที่จะเรียงไฟให้เป็น 3 ตำแหน่งดังกล่าวได้ ไฟที่มีสิทธิ์ทั้ง 3 ใบนั้นจะต้องอยู่ในตำแหน่งที่ 6, 7 และ 8 ของกองไฟที่รวมแล้วจากรอบที่ 2 ดังนั้นนักมายากลจะต้องวางกองไฟที่ผู้ชมชี้ในรอบที่ 2 ให้อยู่กองบนสุด ซึ่งตรงกับตำแหน่งที่เราคิดในระบบเลขฐาน 3 ซึ่งคือเลข 0

ขั้นตอนที่ 4 เนื่องจากนักมายากลไม่รู้ว่ไฟมีสิทธิ์ทั้ง 3 ใบนั้นอยู่ในตำแหน่งที่ 6, 7 และ 8 ของกองย่อยไหนในรอบที่ 2 จนกว่าผู้ชมจะชี้ในรอบที่ 2 ไฟที่มีสิทธิ์เป็นไฟที่ผู้ชมเลือกคือไฟที่อยู่ในตำแหน่งที่ 6, 7 และ 8 ของทั้ง 3 กองย่อยนั่นเอง ซึ่งการที่จะเรียงไฟให้เป็น 9 ตำแหน่งดังกล่าวได้ ไฟที่มีสิทธิ์ทั้ง 9 ใบนั้นจะต้องอยู่ในตำแหน่งที่ 18 ถึง 26 ของกองไฟที่รวมแล้วจากรอบแรก ดังนั้นนักมายากลจะต้องวางกองไฟที่ผู้ชมชี้ในรอบแรกให้อยู่กองล่างสุด ซึ่งตรงกับตำแหน่งที่เราคิดในระบบเลขฐาน 3 ซึ่งคือเลข 2



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างของการวางกองไฟในแต่ละครั้งของนักมายากล เมื่อผู้ชมเลือกเลข 12

สรุปแล้วในตัวอย่างนี้ นักมายากลจะต้องวางกองไฟที่ผู้ชมชี้ไว้กองล่างในรอบแรก กองบนในรอบที่ 2 และกองกลางในรอบที่ 3 ซึ่งตรงกับตำแหน่งการวางในระบบเลขฐาน 3 ซึ่งคือ 102_3 โดยมองจากขวามาซ้าย (เลข 0, 1, 2 แทนการวางกองไฟที่ผู้ชมชี้ไว้กองบน กองกลาง และกองล่าง ตามลำดับ)

สังเกตว่าจากไฟ 27 ใบในรอบแรกนั้น จะเหลืออยู่ 9 ใบที่มีสิทธิ์เป็นไฟที่ผู้ชมเลือกหลังจากการซื้อครั้งแรก และจะเหลือ 3 ใบหลังการซื้อครั้งที่ 2 และท้ายที่สุดแล้วจะเหลือเพียงใบเดียวเท่านั้นจากการซื้อครั้งที่ 3

ในการแสดงกลนั้น นักมายากลจะต้องคิดเลขฐาน 3 ในใจระหว่างที่ทำการแสดง ซึ่งสามารถทำได้ในระหว่างเวลาที่วางไฟเป็น 3 กองนั่นเอง ตัวอย่างเช่น ถ้าผู้ชมเลือกเลข 12

ขั้นตอนที่ 1 นักมายากลจะต้องนำเลข 12 มาลบออกด้วย 1 ก่อน ได้เป็นเลข 11

ขั้นตอนที่ 2 ใช้เลข 11 จากขั้นตอนที่ 1 เป็นตัวตั้ง หารด้วย 3 จะได้ผลหารเป็น 3 เศษ 2 ดังนั้น นักมายากลจะต้องนำกองไฟที่ผู้ชมซื้อในรอบแรกไปไว้กองที่เป็นเศษ 2 ซึ่งหมายถึงกองล่างนั่นเอง

ขั้นตอนที่ 3 นำผลหารที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 ซึ่งคือเลข 3 มาหารด้วย 3 ซึ่งจะได้ผลหารเป็น 1 เศษ 0 นั่นแปลว่าในรอบที่ 2 นั้น นักมายากลจะต้องนำกองไฟที่ผู้ชมซื้อไปไว้กองที่เป็นเศษ 0 ซึ่งหมายถึงกองบน

ขั้นตอนที่ 4 นำผลหารที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 ซึ่งคือเลข 1 มาหารด้วย 3 ซึ่งจะได้ผลหารเป็น 0 เศษ 1 นั่นแปลว่าในรอบสุดท้ายนั้น นักมายากลจะต้องนำกองไฟที่ผู้ชมซื้อไปไว้กองที่เป็นเศษ 1 ซึ่งหมายถึงกองกลาง

ขั้นตอนที่ 5 ทำการเปิดไฟในตำแหน่งที่ผู้ชมเลือกไว้ซึ่งคือเลข 12 โดยนับใบบนสุดเป็นใบที่ 1 จะได้ว่าไฟใบนั้นคือไฟใบที่ผู้ชมเลือกไว้ในตอนแรก

จะเห็นได้ว่าในขณะที่นักมายากลวางไฟเป็น 3 กองในแต่ละรอบ เขาจะมีเวลามากพอที่จะคำนวณในใจว่าจะนำกองที่ผู้ชมซื้อในรอบนั้น ๆ ไปวางไว้ในตำแหน่งใด รูป 2.3 แสดงตัวอย่างการคิดเลขฐาน 3 ของเลข 0, 7, 11, 17 และ 26

$\begin{array}{r} 3 \overline{) 0} \\ 3 \overline{) 0} \\ 3 \overline{) 0} \\ \underline{0} \\ 0 = 000_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 7} \\ 3 \overline{) 2} \quad 1 \\ 3 \overline{) 0} \quad 2 \\ \underline{0} \quad 0 \\ 7 = 021_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 11} \\ 3 \overline{) 3} \quad 2 \\ 3 \overline{) 1} \quad 0 \\ \underline{0} \quad 1 \\ 11 = 102_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 17} \\ 3 \overline{) 5} \quad 2 \\ 3 \overline{) 1} \quad 2 \\ \underline{0} \quad 1 \\ 17 = 122_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 26} \\ 3 \overline{) 8} \quad 2 \\ 3 \overline{) 2} \quad 2 \\ \underline{0} \quad 2 \\ 26 = 222_3 \end{array}$
---	---	---	---	---

รูปที่ 2.3 ตัวอย่างการคิดเลขฐาน 3 ของเลข 0, 7, 11, 17 และ 26

3. การประยุกต์กลไฟกับระบบเลขฐาน

จากที่เราได้เห็นไปก่อนหน้านี้แล้วว่าวิธีการเล่นกลไฟ 27 ใบของ มาร์ติน การ์ดเนอร์ นั้น สามารถทำได้โดยการนำเลขที่ผู้ชมเลือกมาลบ 1 แล้วแปลงเป็นเลขฐาน 3 และเลือกวงกองไฟที่ผู้ชมชี้ในแต่ละรอบตามตำแหน่งจากหลักต่าง ๆ ของเลขฐาน 3 ที่ได้ โดยเรียงตามลำดับจากขวามาซ้าย โดยที่เลข 0, 1 และ 2 หมายถึงตำแหน่ง กองบน กองกลาง และกองล่าง ตามลำดับ เราสามารถดัดแปลงแนวคิดนี้ไปสู่เลขฐานอื่น ๆ ได้อีก รวมถึงการเปลี่ยนจำนวนรอบที่เปิดไฟเพื่อให้ผู้ชมชี้กองไฟอีกด้วย

ตัวอย่างเช่น เราเลือกใช้เลขฐาน 5 และจะเปิดไฟเพื่อให้ผู้ชมชี้กองไฟจำนวน 4 รอบ ซึ่งทำให้เราต้องใช้ไฟทั้งหมดจำนวน $5^4 = 625$ ใบ ซึ่งเราสามารถใช้เวลาจำนวน 12 สำหรับที่ด้านหลังโหม้หลอดตายแตกต่างกัน และเพิ่มไฟโจ๊กเกอร์ (joker) ลงไปอีกหนึ่งใบ รวมทั้งหมดเป็น $(12 \times 52) + 1 = 625$ ใบพอดี เราจะปิดตาและหันหลังให้ในขณะที่ผู้ชมเลือกไฟและจำทั้งด้านหน้าและด้านหลังของไฟ และเราจะให้ผู้ชมเลือกเลขที่ชอบจากเลข 1 ถึง 625 มาหนึ่งตัวเลข จากนั้นเราจะทำการเปิดไฟแบบเดิมที่เราเคยทำ แต่คราวนี้ในแต่ละรอบนั้นเราจะเปิดไฟออกเป็น 5 กอง และให้ผู้ชมชี้กองไฟที่มีไฟที่เลือกไว้ ทำเช่นนี้ 4 รอบ ส่วนเทคนิคสำคัญที่เราต้องคิดระหว่างที่ทำการเปิดไฟทีละใบก็คือ เราต้องนำเลขที่ผู้ชมเลือกมาลบออกด้วยหนึ่งก่อน (ห้ามลืมเด็ดขาด) จากนั้นก็นำมาหาร 5 ได้เศษเท่าไรให้เรา นำกองไฟที่ผู้ชมชี้ไปไว้ในตำแหน่งของเศษที่ได้ โดยเศษ 0, 1, 2, 3 และ 4 หมายถึงตำแหน่งของกองไฟจากบนลงล่างตามลำดับ (เมื่อคว่ำหน้าไฟลงแล้ว) ส่วนไฟกองอื่นที่ผู้ชมไม่ได้ชี้จะวางตำแหน่งไหนก็ได้ จากนั้นนำผลหารที่ได้ไปคิดต่อในรอบต่อ ๆ ไปเช่นเดิมจนครบ 4 รอบ แล้วไฟใบที่ผู้ชมเลือกไว้ก็จะมาอยู่ในตำแหน่งที่เราต้องการเอง

เรายังสามารถประยุกต์การเล่นกลไฟนี้กับระบบเลขฐานที่แต่ละหลักมีฐานแตกต่างกัน [1] ซึ่งในบทความนี้จะขอเรียกว่า “ระบบเลขฐานผสม” ตัวอย่างเช่น เราเลือกใช้เลขหลักแรก (นับจากทางขวามาซ้าย) เป็นฐาน 4 หลักที่สองเป็นฐาน 2 หลักที่สามเป็นฐาน 5 และหลักที่สี่เป็นฐาน 3 ซึ่งทำให้เราต้องใช้ไฟทั้งหมด $4 \times 2 \times 5 \times 3 = 120$ ใบ เราสามารถเขียนเลขแต่ละเลขตั้งแต่ 0 ถึง 119 ให้อยู่ในรูป

$$ABCD_{(3,5,2,4)} := (A \times (5 \times 2 \times 4)) + (B \times (2 \times 4)) + (C \times 4) + D$$

โดยที่ $A \in \{0, 1, 2\}$, $B \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C \in \{0, 1\}$, $D \in \{0, 1, 2, 3\}$ ได้เสมอและได้เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น ในบทความนี้เราจะเรียกระบบเลขฐานผสมนี้ว่า ระบบเลขฐานผสม (3, 5, 2, 4) รูป 3.1 แสดงตัวอย่างการคิดเลขฐานผสม (3, 5, 2, 4) ของบางตัวเลข

4 13	4 41	4 78	4 111	4 115
2 3 1	2 10 1	2 19 2	2 27 3	2 28 3
5 1 1	5 5 0	5 9 1	5 13 1	5 14 0
3 0 1	3 1 0	3 1 4	3 2 3	3 2 4
0 0	0 1	0 1	0 2	0 2
13 = 0111 _(3,5,2,4)	41 = 1001 _(3,5,2,4)	78 = 1412 _(3,5,2,4)	111 = 2313 _(3,5,2,4)	115 = 2403 _(3,5,2,4)

รูปที่ 3.1 ตัวอย่างการคิดเลขฐานผสม (3, 5, 2, 4) ของเลข 13 41 78 111 และ 115

สังเกตว่าเลขที่ใช้ได้คือเลขตั้งแต่ 0 ถึง 119 เท่านั้น นั่นทำให้เราสามารถใช่วิธีการเดิมในการเล่นกลไฟสำหรับไฟจำนวน 120 ใบนี้ได้ โดยเราจะให้ผู้ชมเลือกเลขที่ชอบจากเลข 1 ถึง 120 และเราจะทำการเปิดไฟแบบเดิมที่เราเคยทำแต่คราวนี้จำนวนกองไฟที่เราแบ่งในแต่ละรอบจะไม่เท่ากัน โดยเราจะแบ่งไฟออกเป็น 4 กองในรอบแรก 2 กองในรอบที่สอง 5 กองในรอบที่สาม และ 3 กองในรอบที่สี่ และให้ผู้ชมชี้กองไฟที่มีไฟที่เลือกไว้เช่นเดิม ส่วนเคล็ดลับในการแสดงกลก็คือ เราต้องนำเลขที่ผู้ชมเลือกมาลบออกด้วยหนึ่งก่อนในตอนแรก จากนั้นก็นำมาหาร 4 ได้เศษเท่าไรให้เรานำกองไฟที่ผู้ชมชี้ไปไว้ในตำแหน่งของเศษที่ได้โดยคิดการเรียงตำแหน่งจากบนลงล่างแบบเดิม จากนั้นนำผลหารที่ได้ไปคิดต่อในรอบต่อ ๆ ไปเช่นเดิมจนครบ 4 รอบ โดยในแต่ละรอบที่เหลือเราจะหารด้วยเลข 2, 5 และ 3 ตามลำดับ ไฟใบที่ผู้ชมเลือกไว้ก็จะมาปรากฏอยู่ในตำแหน่งที่ผู้ชมได้เลือกไว้ตั้งแต่ตอนเริ่มการแสดงได้อย่างน่าอัศจรรย์

สำหรับในกลเดียวกันนี้เรายังสามารถสลับตำแหน่งเลขฐาน หรือเปลี่ยนตัวประกอบที่คูณกันแล้วได้จำนวนไฟได้อีกหลากหลายรูปแบบ ซึ่งทำให้วิธีการเล่นกลในแต่ละแบบอาจแตกต่างกัน หรือเหมือนกันได้ในบางตัวเลข รูป 3.2 แสดงตัวอย่างการคิดเลขฐานผสม (4, 2, 3, 5), (2, 2, 6, 5) และ (4, 5, 6) ของตัวเลขบางตัวเลข

$\begin{array}{r} 5 \overline{)13} \\ 3 \overline{)2} \ 3 \\ 2 \overline{)0} \ 2 \\ 4 \overline{)0} \ 0 \\ \underline{0} \ 0 \end{array}$ $13 = 0023_{(4,2,3,5)}$	$\begin{array}{r} 5 \overline{)41} \\ 3 \overline{)8} \ 1 \\ 2 \overline{)2} \ 2 \\ 4 \overline{)1} \ 0 \\ \underline{0} \ 1 \end{array}$ $41 = 1021_{(4,2,3,5)}$	$\begin{array}{r} 5 \overline{)78} \\ 3 \overline{)15} \ 3 \\ 2 \overline{)5} \ 0 \\ 4 \overline{)2} \ 1 \\ \underline{0} \ 2 \end{array}$ $78 = 2103_{(4,2,3,5)}$	$\begin{array}{r} 5 \overline{)111} \\ 3 \overline{)22} \ 1 \\ 2 \overline{)7} \ 1 \\ 4 \overline{)3} \ 1 \\ \underline{0} \ 3 \end{array}$ $111 = 3111_{(4,2,3,5)}$	$\begin{array}{r} 5 \overline{)115} \\ 3 \overline{)23} \ 0 \\ 2 \overline{)7} \ 2 \\ 4 \overline{)3} \ 1 \\ \underline{0} \ 3 \end{array}$ $115 = 3120_{(4,2,3,5)}$
$\begin{array}{r} 5 \overline{)13} \\ 6 \overline{)2} \ 3 \\ 2 \overline{)0} \ 2 \\ 2 \overline{)0} \ 0 \\ \underline{0} \ 0 \end{array}$ $13 = 0023_{(2,2,6,5)}$	$\begin{array}{r} 5 \overline{)41} \\ 6 \overline{)8} \ 1 \\ 2 \overline{)1} \ 2 \\ 2 \overline{)0} \ 1 \\ \underline{0} \ 0 \end{array}$ $41 = 0121_{(2,2,6,5)}$	$\begin{array}{r} 5 \overline{)78} \\ 6 \overline{)15} \ 3 \\ 2 \overline{)2} \ 3 \\ 2 \overline{)1} \ 0 \\ \underline{0} \ 1 \end{array}$ $78 = 1033_{(2,2,6,5)}$	$\begin{array}{r} 5 \overline{)111} \\ 6 \overline{)22} \ 1 \\ 2 \overline{)3} \ 4 \\ 2 \overline{)1} \ 1 \\ \underline{0} \ 1 \end{array}$ $111 = 1141_{(2,2,6,5)}$	$\begin{array}{r} 5 \overline{)115} \\ 6 \overline{)23} \ 0 \\ 2 \overline{)3} \ 5 \\ 2 \overline{)1} \ 1 \\ \underline{0} \ 1 \end{array}$ $115 = 1150_{(2,2,6,5)}$
$\begin{array}{r} 6 \overline{)13} \\ 5 \overline{)2} \ 1 \\ 4 \overline{)0} \ 2 \\ \underline{0} \ 0 \end{array}$ $13 = 021_{(4,5,6)}$	$\begin{array}{r} 6 \overline{)41} \\ 5 \overline{)6} \ 5 \\ 4 \overline{)1} \ 1 \\ \underline{0} \ 1 \end{array}$ $41 = 115_{(4,5,6)}$	$\begin{array}{r} 6 \overline{)78} \\ 5 \overline{)13} \ 0 \\ 4 \overline{)2} \ 3 \\ \underline{0} \ 2 \end{array}$ $78 = 230_{(4,5,6)}$	$\begin{array}{r} 6 \overline{)111} \\ 5 \overline{)18} \ 3 \\ 4 \overline{)3} \ 3 \\ \underline{0} \ 3 \end{array}$ $111 = 333_{(4,5,6)}$	$\begin{array}{r} 6 \overline{)115} \\ 5 \overline{)19} \ 1 \\ 4 \overline{)3} \ 4 \\ \underline{0} \ 3 \end{array}$ $115 = 341_{(4,5,6)}$

รูปที่ 3.2 ตัวอย่างการคิดเลขฐานผสม (4, 2, 3, 5) (รูปบน), (2, 2, 6, 5) (รูปกลาง) และ (4, 5, 6) (รูปล่าง) ของเลข 13, 41, 78, 111 และ 115

นอกจากนี้เรายังสามารถเปลี่ยนวิธีการเล่นกลนี้ จากที่ให้ผู้ชมเลือกเลขที่ชอบในตอนแรกแล้วเราทำให้ไฟที่ผู้ชมเลือกไปปรากฏอยู่ในตำแหน่งนั้น เป็นการให้ผู้ชมเลือกว่าในแต่ละรอบจะให้ไฟกองย่อยกองไหนซ้อนกองไหนบ้างแต่ไม่ได้ให้ผู้ชมเลือกตัวเลขที่ชอบในตอนแรก แต่เราจะแอบคำนวณตามไปโดยนำตัวเลขตำแหน่งที่ผู้ชมเลือกคูณกับค่าประจำตำแหน่งนั้น ๆ (ขึ้นอยู่กับว่าเราใช้เลขฐานอะไร) แล้วบวกสะสมไปเรื่อย ๆ จนในตอนจบเราก็บอกว่าไฟใบนั้นจะไปอยู่ที่ตำแหน่งใดในกองไฟแทนก็ได้เช่นกัน

4. สรุป

เราสามารถใช้ระบบเลขฐานมาช่วยให้การแสดงกลไพ่ 27 ใบของ มาร์ติน การ์ดเนอร์ ดำเนินไปโดยง่าย นอกจากนี้เรายังสามารถขยายวิธีการเล่นกลไพ่นี้ให้ทั่วไปยิ่งขึ้นโดยใช้ระบบเลขฐานผสม รวมถึงรูปแบบการแสดงกลที่เปลี่ยนไปด้วย ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผู้อ่านจะได้รับความบันเทิงในการอ่านบทความนี้ และสามารถนำไปเล่นกลเพื่อความสุข รวมถึงเห็นประโยชน์และการนำไปใช้ของระบบเลขฐานมากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] Bolker, E. D. (2010). Gergonne's Card Trick, Positional Notation, and Radix Sort. *Mathematics Magazine*, 83 (1), p. 46 - 49.
- [2] Gardner, M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery*. New York: Dover Publications.
- [3] Hargrave, C. P. (2000). *A History of Playing Cards and a Bibliography of Cards and Gaming*. Mineola, New York: Dover Publications.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 64(699) กันยายน – ธันวาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$

Integral Solutions of the Diophantine Equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$

อภิสิทธิ์ ภาคพงศ์พันธุ์

Apisit Pakapongpun

Department of Mathematics, Faculty of Science,

Burapha University, Chon Buri 20131

Email: apisit.buu@gmail.com

วันที่รับบทความ : 24 เมษายน 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 22 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 9 กันยายน 2562

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เราได้หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก ของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ABSTRACT

In this paper, we find positive integral solutions of the Diophantine equation

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}.$$

Keywords: Diophantine equation, Positive integral solutions

1. Introduction

In 1948, Erdős and Straus [1], [3] have conjectured that for each $n \geq 2$, the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{n}$ has a positive integral solution (x, y, z) , where $x \neq y$, $y \neq z$ and $z \neq x$. Later, many researchers studied and solved this Diophantine equation, see [2], [4], [7] and [8].

In 2013, Rabago and Tagle [5] studied on the areas and volume of a certain regular solid and the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Sandor [6] offered an elementary approach to the solution of the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.

In this paper, we try to solve for all positive integral solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$.

2. Method of Analysis

From the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$, we get $x \geq 3, y \geq 5$ and $z \geq 7$.

We are going to split into three cases.

Case 1 If $x \leq y \leq z$ or $x \leq z \leq y$, then $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{6}{x}$. Hence, $3 \leq x \leq 12$.

$$\text{If } x=3, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{6}, \text{ i.e., } (y-12)(z-18) = 216. \quad (1)$$

$$\text{If } x=4, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{4}, \text{ i.e., } (y-8)(z-12) = 96. \quad (2)$$

$$\text{If } x=5, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{3}{10}, \text{ i.e., } (3y-20)(z-10) = 200. \quad (3)$$

$$\text{If } x=6, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{3}, \text{ i.e., } (y-6)(z-9) = 54. \quad (4)$$

$$\text{If } x=8, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{3}{8}, \text{ i.e., } (3y-16)(z-8) = 128. \quad (5)$$

$$\text{If } x=10, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{2}{5}, \text{ i.e., } (y-5)(2z-15) = 75. \quad (6)$$

For (1), the only following cases are possible:

$$\begin{aligned}
 &y-12=1, z-18=216; & y-12=2, z-18=108; & y-12=3, z-18=72; \\
 &y-12=4, z-18=54; & y-12=6, z-18=36; & y-12=8, z-18=27; \\
 &y-12=9, z-18=24; & y-12=12, z-18=18; & y-12=18, z-18=12; \\
 &y-12=24, z-18=9; & y-12=27, z-18=8; & y-12=36, z-18=6; \\
 &y-12=54, z-18=4; & y-12=72, z-18=3; & y-12=108, z-18=2; \\
 &y-12=216, z-18=1.
 \end{aligned}$$

Leading to the solutions: $(x, y, z) = (3, 13, 234), (3, 14, 126), (3, 15, 90), (3, 16, 72), (3, 18, 54), (3, 20, 45), (3, 21, 42), (3, 24, 36), (3, 30, 30), (3, 36, 27), (3, 39, 26), (3, 48, 24), (3, 66, 22), (3, 84, 21), (3, 120, 20)$ and $(3, 228, 19)$.

In the same manner

(2) leads to $(x, y, z) = (4, 9, 108), (4, 10, 60), (4, 11, 44), (4, 12, 36), (4, 14, 28), (4, 16, 24), (4, 20, 20), (4, 24, 18), (4, 32, 16), (4, 40, 15), (4, 56, 14)$ and $(4, 104, 13)$.

(3) leads to $(x, y, z) = (5, 7, 210), (5, 8, 60), (5, 10, 30), (5, 15, 18), (5, 20, 15)$ and $(5, 40, 12)$.

(4) leads to $(x, y, z) = (6, 7, 63), (6, 8, 36), (6, 9, 27), (6, 12, 18), (6, 15, 15), (6, 24, 12), (6, 33, 11)$ and $(6, 60, 10)$.

(5) leads to $(x, y, z) = (8, 8, 24), (8, 16, 12)$ and $(8, 48, 9)$.

While, (6) leads to $(x, y, z) = (10, 10, 15)$ and $(10, 20, 10)$.

$$\text{If } x=7, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{14}. \quad (7)$$

$$\text{If } x=9, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{7}{18}. \quad (8)$$

$$\text{If } x=11, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{9}{22}. \quad (9)$$

$$\text{If } x=12, \text{ then } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{12}. \quad (10)$$

If $z \leq y$, then (7) gives $\frac{5}{14} = \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{z}$, that is, $7 \leq z \leq 14$. However, only $z \in \{9, 10, 14\}$ gives positive integral values of y . Hence, $(x, y, z) = (7, 84, 9), (7, 35, 10)$ and $(7, 14, 14)$.

If $y \leq z$, then (7) gives $\frac{5}{14} = \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{y}$, that is, $7 \leq y \leq 14$. However, only $y \in \{7, 8\}$ gives positive integral values of z . Hence, $(x, y, z) = (7, 7, 42)$ and $(7, 8, 28)$.

If $z \leq y$, then (8) gives $\frac{7}{18} = \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{z}$, that is, $9 \leq z \leq 12$. However, only $z \in \{9\}$ gives positive integral value of y . Hence, $(x, y, z) = (9, 36, 9)$.

If $y \leq z$, then (8) gives $\frac{7}{18} = \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{y}$, that is, $9 \leq y \leq 12$. However, only $y \in \{9\}$ gives positive integral value of z . Hence, $(x, y, z) = (9, 9, 18)$.

If $z \leq y$, then (9) gives $\frac{9}{22} = \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{z}$, that is, $11 \leq z \leq 12$. However, both of them do not give positive integral value of y . Hence, there is no solutions for (9).

If $y \leq z$, then (9) gives $\frac{9}{22} = \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{y}$, that is, $11 \leq y \leq 12$. However, both of them do not give positive integral value of z . Hence, there is no solutions for (9).

If $z \leq y$, then (10) gives $\frac{5}{12} = \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{z}$, that is, $z = 12$. Hence, $(x, y, z) = (12, 12, 12)$.

If $y \leq z$, then (10) gives $\frac{5}{12} = \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{y}$, that is, $y = 12$. Hence, $(x, y, z) = (12, 12, 12)$.

Case II If $y < x \leq z$ or $y \leq z < x$, then $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{6}{y}$. Hence, $5 \leq y \leq 12$.

$$\text{If } y = 5, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{3}{z} = \frac{1}{10}, \text{ i.e., } (x-10)(z-30) = 300. \quad (11)$$

$$\text{If } y = 6, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{3}{z} = \frac{1}{6}, \text{ i.e., } (x-6)(z-18) = 108. \quad (12)$$

$$\text{If } y = 7, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{3}{z} = \frac{3}{14}, \text{ i.e., } (3x-14)(z-14) = 196. \quad (13)$$

$$\text{If } y = 8, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{3}{z} = \frac{1}{4}, \text{ i.e., } (x-4)(z-12) = 48. \quad (14)$$

$$\text{If } y=10, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{3}{z} = \frac{3}{10}, \text{ i.e., } (3x-10)(z-10)=100. \quad (15)$$

$$\text{If } y=12, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{3}{z} = \frac{1}{3}, \text{ i.e., } (x-3)(z-9)=27. \quad (16)$$

For (11) the only following cases are possible :

$$x-10=1, z-30=300; \quad x-10=2, z-30=150; \quad x-10=3, z-30=100;$$

$$x-10=4, z-30=75; \quad x-10=5, z-30=60; \quad x-10=6, z-30=50;$$

$$x-10=10, z-30=30; \quad x-10=12, z-30=25; \quad x-10=15, z-30=20;$$

$$x-10=20, z-30=15; \quad x-10=25, z-30=12; \quad x-10=30, z-30=10;$$

$$x-10=50, z-30=6; \quad x-10=60, z-30=5; \quad x-10=75, z-30=4;$$

$$x-10=100, z-30=3; \quad x-10=150, z-30=2; \quad x-10=300, z-30=1.$$

Leading to the solutions : $(x, y, z) = (11, 5, 330), (12, 5, 180), (13, 5, 130), (14, 5, 105), (15, 5, 90),$
 $(16, 5, 80), (20, 5, 60), (22, 5, 55), (25, 5, 50), (30, 5, 45), (35, 5, 42), (40, 5, 40), (60, 5, 36), (70, 5, 35),$
 $(85, 5, 34), (110, 5, 33), (160, 5, 32)$ and $(310, 5, 31)$.

In the same manner,

(12) leads to $(x, y, z) = (7, 6, 126), (8, 6, 72), (9, 6, 54), (10, 6, 45), (12, 6, 36), (15, 6, 30),$
 $(18, 6, 27), (24, 6, 24), (33, 6, 22), (42, 6, 21), (60, 6, 20)$ and $(114, 6, 19)$.

(13) leads to $(x, y, z) = (14, 7, 21), (21, 7, 18)$ and $(70, 7, 15)$.

(14) leads to $(x, y, z) = (10, 8, 20), (12, 8, 18), (16, 8, 16), (20, 8, 15), (628, 8, 14)$ and
 $(52, 8, 13)$.

(15) leads to $(x, y, z) = (20, 10, 12)$.

While, (16) has no solutions.

$$\text{If } y=9, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{3}{z} = \frac{5}{18}. \quad (17)$$

$$\text{If } y=11, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{3}{z} = \frac{7}{22}. \quad (18)$$

If $x \leq z$, then (17) gives $\frac{5}{18} = \frac{1}{x} + \frac{3}{z} \leq \frac{4}{x}$, that is, $9 < x \leq 14$. However, all values of x do not give positive integral value of z . Hence, there is no solutions for (17).

If $z < x$, then (17) gives $\frac{5}{18} = \frac{1}{x} + \frac{3}{z} < \frac{4}{z}$, that is, $9 \leq z \leq 14$. However, only $z \in \{11, 12\}$ gives positive integral values of x . Hence, $(x, y, z) = (198, 9, 11)$ and $(36, 9, 12)$.

If $x \leq z$, then (18) gives $\frac{7}{22} = \frac{1}{x} + \frac{3}{z} \leq \frac{4}{x}$, that is, $11 < x \leq 12$. However, both values of x do not give positive integral value of z . Hence, there is no solutions for (18).

If $z < x$, then (18) gives $\frac{7}{22} = \frac{1}{x} + \frac{3}{z} < \frac{4}{z}$, that is, $11 \leq z \leq 12$. However, only $z \in \{11\}$ gives positive integral value of x . Hence, $(x, y, z) = (22, 11, 11)$.

Case III If $z < x \leq y$ or $z < y < x$, then $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{6}{z}$. Hence, $7 \leq z \leq 12$.

$$\text{If } z = 7, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{14}, \text{ i.e., } (x-14)(y-28) = 392. \quad (19)$$

$$\text{If } z = 8, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{8}, \text{ i.e., } (x-8)(y-16) = 128. \quad (20)$$

$$\text{If } z = 9, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{6}, \text{ i.e., } (x-6)(y-12) = 72. \quad (21)$$

$$\text{If } z = 10, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{5}, \text{ i.e., } (x-5)(y-10) = 50. \quad (22)$$

$$\text{If } z = 12, \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{4}, \text{ i.e., } (x-4)(y-8) = 32. \quad (23)$$

(19) leads to $(x, y, z) = (15, 420, 7), (16, 224, 7), (18, 126, 7), (21, 84, 7), (22, 77, 7), (28, 56, 7), (42, 42, 7), (63, 36, 7), (70, 35, 7), (112, 32, 7), (210, 30, 7)$ and $(406, 29, 7)$.

(20) leads to $(x, y, z) = (9, 144, 8), (10, 80, 8), (12, 48, 8), (16, 32, 8), (24, 24, 8), (40, 20, 8), (72, 18, 8)$ and $(136, 17, 8)$.

(21) leads to $(x, y, z) = (10, 30, 9), (12, 24, 9), (14, 21, 9), (15, 20, 9), (18, 18, 9), (24, 16, 9), (30, 15, 9), (42, 14, 9)$ and $(78, 13, 9)$.

(22) leads to $(x, y, z) = (15, 15, 10), (30, 12, 10)$ and $(55, 11, 10)$.

While, (23) has no solutions.

$$\text{If } z = 11 \text{ then } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{22}. \quad (24)$$

If $x \leq y$, then (24) gives $\frac{5}{22} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq \frac{3}{x}$, that is, $12 \leq x \leq 13$. However, both values of x do not give positive integral value of y . Hence, there is no solution for (24).

If $y < x$ then (24) gives $\frac{5}{22} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} < \frac{3}{y}$ that is, $12 \leq y \leq 13$. However, both values of y do not give positive integral value of x . Hence, there is no solution for (24).

Suggested Problem

Let a, b, c, p and q be positive integers, we may ask for the positive integral solutions (x, y, z) for the Diophantine equation $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{p}{q}$ where x, y and z are positive integers.

Acknowledgements

I would like to give a thank to Jatupat for helping submission process and this work is supported by Faculty of Science, Burapha University, Thailand.

References

- [1] Elsholtz, C. (2001). Sums of k Unit Fractions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 353(8), p. 3209 - 3227.
- [2] Erdős, P. (1950). Az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{a}{b}$ Egyenlet Egesz Szamu Megoldasairol (On a Diophantine Equation). *Mat. Lapok*, 1, p. 192-210.
- [3] Kotsireas, I. (1999). The Erdős-Straus Conjecture on Egyptian Fractions, in: *Paul Erdős and his mathematics, Budapest*, (János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999), p. 140-144.
- [4] Li, D.L. (1981). Equation $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. *Journal of Number Theory*. 13(4), p. 485 - 494.

- [5] Rabago, J.F.T., and Tagle, R.P. (2013). On The Areas and Volume of a Certain Regular Solid and the Diophantine Equation $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. *Note on Number Theory and Discrete Mathematics*, 19(3), p. 28 - 32.
- [6] Sandor, J. (2013). A Note on a Diophantine Equation. *Note on Number Theory and Discrete Mathematics*, 19(4), p. 1 - 3.
- [7] Webb, W.A. (1970). On $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. *Proceedings of American Mathematical Society*, 25(3), p. 578 - 584.
- [8] Zelator, K. (2009). *An Ancient Egyptian Problem: The Diophantine Equation $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, n \geq 2$* . arXiv:0912.2458.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 64(699) กันยายน – ธันวาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

รูปแบบจำนวนเฉพาะคือ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ $(2p_1p_2 / p)$

Forms of Odd Prime Numbers p in Legendre Symbol

$$(2p_1p_2 / p)$$

อภิรัฐ ศิระวรกุล

Apirat Siraworakun

Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology,

Thepsatri Rajabhat University, Lopburi 15000

Email: nookkop2525@gmail.com

วันที่รับบทความ : 4 กรกฎาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 8 สิงหาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 22 สิงหาคม 2562

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราได้ศึกษารูปแบบจำนวนเฉพาะคือ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ $(2p_1p_2 / p)$ เมื่อ p_1, p_2 เป็นจำนวนเฉพาะคือ ที่ $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีนในการหาผลเฉลี่ยของระบบสมภาค เราแบ่งการศึกษานี้ออกเป็น 3 กรณี ดังต่อไปนี้

1. $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 1 \pmod{4}$
2. $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$
3. $p_1 \equiv 3 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$

คำสำคัญ: ส่วนตกค้างกำลังสอง สัญลักษณ์เลอจองด์ ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน

ABSTRACT

In this research, we study the form of odd prime number p in Legendre Symbol $(2p_1p_2/p)$ where p_1, p_2 are odd prime numbers, $p \nmid p_1$ and $p \nmid p_2$ by using Chinese Remainder Theorem for finding the solutions of system of congruence. We separate this study into 3 cases as the followings.

1. $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ and $p_2 \equiv 1 \pmod{4}$
2. $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ and $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$
3. $p_1 \equiv 3 \pmod{4}$ and $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$

Keywords: Quadratic residue, Legendre symbol, Chinese remainder theorem

1. บทนำ

สำหรับจำนวนเต็มบวก m และจำนวนเต็ม a ที่ $(a, m) = 1$ เราจะกล่าวว่า a เป็นส่วนตกค้างกำลังสองมอดุโล m ก็ต่อเมื่อ $x^2 \equiv a \pmod{m}$ มีผลเฉลย

สัญลักษณ์เลอจองด์เป็นสัญลักษณ์ที่แสดงถึงความเป็นส่วนตกค้างกำลังสองซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 [1] กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ a เป็นจำนวนเต็มที่ $p \nmid a$ สัญลักษณ์เลอจองด์ (Legendre symbol) (a/p) จะกำหนดค่าให้ได้ดังนี้

$(a/p) = 1$ เมื่อ a เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง มอดุโล p

$(a/p) = -1$ เมื่อ a ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง มอดุโล p

สำหรับกรณีที่ $a = 2$ อัจฉรา หาญชูวงศ์ [1] ได้กล่าวถึงรูปแบบของจำนวนเฉพาะคี่ในสัญลักษณ์เลอจองด์ไว้ดังนี้

$$(2/p) = \begin{cases} 1, & p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1, & p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหารูปแบบจำนวนเฉพาะคี่ในสัญลักษณ์เลอจองด์ พบว่าในปี พ.ศ. 2547 อภิรัฐ ศิริวรกุล [2] ได้ศึกษาหารูปแบบของจำนวนเฉพาะคี่ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ (b/p) เมื่อ b เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ที่ $p \nmid b$ ซึ่งมีผลการวิจัยดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 [2] กำหนดให้ b และ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ โดยที่ $p \nmid b$ และ $b \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า

$$(b/p) = \begin{cases} 1, & p \equiv b + r^{S_1}b + r^{S_1} \pmod{2b} \\ -1, & p \equiv b + r^{T_1}b + r^{T_1} \pmod{2b} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, b-1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, b-2\}$ และ r เป็นรากปฐมฐานมอดุโล b

ทฤษฎีบท 1.2 [2] กำหนดให้ b และ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ โดยที่ $p \nmid b$ และ $b \equiv 3 \pmod{4}$ จะได้ว่า

$$(b/p) = \begin{cases} 1, & p \equiv 3b + 4n_0r^{S_1} \pmod{4b}, \\ & \equiv -3b + 4n_0r^{T_1} \pmod{4b} \\ -1, & p \equiv 3b + 4n_0r^{T_1} \pmod{4b}, \\ & \equiv -3b + 4n_0r^{S_1} \pmod{4b} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, b-1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, b-2\}$, n_0 เป็นจำนวนนับ และ r เป็นรากปฐมฐานมอดุโล b โดยที่ n_0 สอดคล้องกับสมการ $b = 4n_0 - 1$

ในปี พ.ศ. 2559 อภิรัฐ ศิริวรรณกุล และคณะ [3] ได้ศึกษารูปแบบจำนวนเฉพาะที่ p ในสัญลักษณ์เลอจองต์ (p_1p_2 / p) เมื่อ p_1 และ p_2 เป็นจำนวนเฉพาะที่ ซึ่ง $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ ซึ่งมีผลวิจัยดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3 [3] กำหนดให้ p_1, p_2 และ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ ซึ่ง $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $p_2 \equiv 1 \pmod{4}$, $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ จะได้ว่า

$$(p_1p_2/p) = \begin{cases} 1, & p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}, \\ & \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{2p_1p_2} \\ -1, & p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}, \\ & \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{2p_1p_2} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1-1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2-1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1-2\}$,

$T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมนฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเต็มสอดคล้องกับ $2p_2n_1 \equiv 1 \pmod{p_1}$ และ $2p_1n_2 \equiv 1 \pmod{p_2}$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 1.4 [3] กำหนดให้ p_1, p_2 และ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ซึ่ง $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$, $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ จะได้ว่า

$$(p_1p_2 / p) \equiv \begin{cases} 1, & p \equiv -p_1p_2 + 4(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4n_0n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ & \equiv p_1p_2 + 4(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4n_0n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ & \equiv -p_1p_2 + 4(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4n_0n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ & \equiv p_1p_2 + 4(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4n_0n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{4p_1p_2} \\ -1, & p \equiv -p_1p_2 + 4(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4n_0n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ & \equiv p_1p_2 + 4(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4n_0n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ & \equiv -p_1p_2 + 4(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4n_0n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ & \equiv p_1p_2 + 4(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4n_0n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{4p_1p_2} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$,

$T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมนฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_0, n_3 และ n_4 เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้อง $p_2 = 4n_0 - 1$, $4p_2n_3 \equiv 1 \pmod{p_1}$ และ $4p_1n_4 \equiv 1 \pmod{p_2}$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 1.5 [3] กำหนดให้ p_1, p_2 และ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ซึ่ง $p_1 \equiv 3 \pmod{4}$, $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$, $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ จะได้ว่า

$$(p_1p_2 / p) \equiv \begin{cases} 1, & \begin{aligned} p &\equiv p_1p_2 + 16(n_0n_3r_1^{S_1}p_2 + m_0n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16(n_0n_3r_1^{T_1}p_2 + m_0n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16(n_0n_3r_1^{T_1}p_2 + m_0n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16(n_0n_3r_1^{S_1}p_2 + m_0n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{4p_1p_2} \end{aligned} \\ -1, & \begin{aligned} p &\equiv p_1p_2 + 16(n_0n_3r_1^{T_1}p_2 + m_0n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16(n_0n_3r_1^{S_1}p_2 + m_0n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16(n_0n_3r_1^{S_1}p_2 + m_0n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{4p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16(n_0n_3r_1^{T_1}p_2 + m_0n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{4p_1p_2} \end{aligned} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$,

$T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมนฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_0, m_0, n_3 และ n_4 เป็นจำนวนเต็มทีสอดคล้อง $p_1 = 4n_0 - 1$, $p_2 = 4m_0 - 1$,

$4p_2n_3 \equiv 1 \pmod{p_1}$ และ $4p_1n_4 \equiv 1 \pmod{p_2}$ ตามลำดับ

จากสิ่งที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยได้ต่อยอดแนวความคิดนี้ โดยพิจารณาหารูปแบบของจำนวนเฉพาะคี่ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ $(2p_1p_2 / p)$ เมื่อ p_1, p_2 เป็นจำนวนเฉพาะคี่, $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$

2. ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีนถือได้ว่าเป็นเครื่องมือสำคัญในการแก้ระบบสมภาคเพื่อหารูปแบบจำนวนเฉพาะคี่ในสัญลักษณ์เลอจองด์ โดยทฤษฎีบทเศษเหลือของจีนมีเนื้อความดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 [1] กำหนดให้ $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่ และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่าระบบสมภาค

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_n \pmod{m_n}$$

จะมีผลเฉลยเพียงตัวเดียวมอดุโล m เมื่อ $m = m_1 m_2 m_3 \dots m_n$ นั่นคือ มี x_0 เป็นผลเฉลย และผลเฉลยทั้งหมดจะอยู่ในรูป $x_0 + km$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

ในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทเศษเหลือของจีนได้กล่าวถึงรูปแบบผลเฉลยของระบบสมภาคไว้ดังนี้

$$a_1 m'_1 y_1 + a_2 m'_2 y_2 + a_3 m'_3 y_3 + \dots + a_n m'_n y_n$$

เมื่อ $m'_i = \frac{m}{m_i}$ และ y_i หาได้จาก $m'_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ ทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

นอกเหนือจากทฤษฎีเศษเหลือของจีนแล้ว เรายังใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ในการพิสูจน์เพื่อหารูปแบบจำนวนเฉพาะคี่ในสัญลักษณ์เลขจองด์ด้วย

ทฤษฎีบท 2.2 [1] กำหนดให้ $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ที่เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่าระบบสมภาค

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv b_2 \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$x \equiv b_n \pmod{m_n}$$

จะมีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $(m_i, m_j) \mid (b_i - b_j)$ สำหรับทุกค่า $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ที่ $i \neq j$ และถ้ามีผลเฉลย จะมีผลเฉลยเพียงตัวเดียวมอดุโล $[m_1, m_2, m_3, \dots, m_n]$

ทฤษฎีบท 2.3 [1] กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ $p \nmid a$ และ $p \nmid b$ จะได้ว่า $(ab/p) = (a/p)(b/p)$

สำหรับการศึกษาหารูปแบบของจำนวนเฉพาะคี่ p ในสัญลักษณ์เลขจองด์ $(2p_1 p_2 / p)$ เมื่อ p_1, p_2 เป็นจำนวนเฉพาะคี่, $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ เราได้แบ่งการศึกษาออกเป็น 3 กรณี ดังต่อไปนี้

1. $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 1 \pmod{4}$
2. $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$
3. $p_1 \equiv 3 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$

กรณีที่ 1 $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 1 \pmod{4}$

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ p_1 และ p_2 เป็นจำนวนเฉพาะที่ทำให้มีจำนวนเต็ม m และ n ซึ่งสอดคล้องกับ $p_1 = 4m+1$ และ $p_2 = 4n+1$ จะได้ว่า

1. ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$
2. ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $-3p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$

บทพิสูจน์

1. สมมติ $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะมีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $m+n=2l$ เพราะฉะนั้น

$$p_1p_2 = (4m+1)(4n+1) = 16mn + 4(m+n) + 1 = 16mn + 4(2l) + 1 = 8(2mn+l) + 1 \text{ ดังนั้น}$$

$$p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$$

2. สมมติ $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จะมีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $m+n=2l+1$ จะได้ว่า

$$p_1p_2 = (4m+1)(4n+1) = 16mn + 4(m+n) + 1 = 16mn + 4(2l+1) + 1 = 8(2mn+l) + 5$$

เพราะฉะนั้น

$$-3p_1p_2 = 8(-6mn-3l) - 15 = 8(-6mn-3l) - 16 + 1 = 8(-6mn-3l-2) + 1$$

$$\text{ดังนั้น } -3p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8} \quad \square$$

ทฤษฎีบท 2.5 ให้ p_1, p_2 และ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ ซึ่ง $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ และ

ถ้า $p_1 = 4m+1$ และ $p_2 = 4n+1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m และ n จะได้ว่า

1. ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว

$$(2p_1p_2 / p) = \begin{cases} 1, & \begin{aligned} p &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \\ -1, & \begin{aligned} p &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$, $T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมนฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_1, n_2 และ n_3 เป็นจำนวนเต็มสอดคล้องกับ $2p_2n_1 \equiv 1 \pmod{p_1}$, $2p_1n_2 \equiv 1 \pmod{p_2}$ และ $8n_3 \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$ ตามลำดับ

2. ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว

$$(2p_1p_2 / p) = \begin{cases} 1, & \begin{aligned} p &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \\ -1, & \begin{aligned} p &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$
 $T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ
 n_1, n_2 และ n_3 เป็นจำนวนเต็มสอดคล้องกับ $2p_2n_1 \equiv 1 \pmod{p_1}$, $2p_1n_2 \equiv 1 \pmod{p_2}$
 และ $8n_3 \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$ ตามลำดับ

กรณีที่ 2 $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ p_1 และ p_2 เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่ทำให้มีจำนวนเต็ม m และ n ซึ่งสอดคล้องกับ $p_1 = 4m + 1$ และ $p_2 = 4n + 3$ จะได้ว่า

1. ถ้า $3m + n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $3p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$
2. ถ้า $3m + n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $-p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$

บทพิสูจน์

1. สมมติ $3m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะมีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $3m+n=2l$ จะได้ว่า

$$p_1 p_2 = (4m+1)(4n+3) = 16mn + 4(3m+n) + 3 = 16mn + 4(2l) + 3 = 8(2mn+l) + 3$$

เพราะฉะนั้น

$$3p_1 p_2 = 8(6mn+3l) + 9 = 8(6mn+3l) + 8 + 1 = 8(6mn+3l+1) + 1$$

ดังนั้น $3p_1 p_2 \equiv 1 \pmod{8}$

2. สมมติ $3m+n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จะมีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $3m+n=2l+1$ จะได้ว่า

$$p_1 p_2 = (4m+1)(4n+3) = 16mn + 4(3m+n) + 3 = 16mn + 4(2l+1) + 3 = 8(2mn+l) + 7$$

เพราะฉะนั้น

$$-p_1 p_2 = 8(-2mn-l) - 7 = 8(-2mn-l) - 8 + 1 = 8(-2mn-l-1) + 1$$

ดังนั้น $-p_1 p_2 \equiv 1 \pmod{8}$

□

ทฤษฎีบท 2.7 ให้ p_1, p_2 และ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ซึ่ง $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ และ

ถ้า $p_1 = 4m+1$ และ $p_2 = 4n+3$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m และ n จะได้ว่า

1. ถ้า $3m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว

$$(2p_1p_2 / p) = \begin{cases} 1, & \begin{aligned} p &\equiv 3p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \\ -1, & \begin{aligned} p &\equiv 3p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 32n_5 \left(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$, $T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_3, n_4 และ n_5 เป็นจำนวนเต็มที่สุดคัล้อง $4p_2n_3 \equiv 1 \pmod{p_1}$, $4p_1n_4 \equiv 1 \pmod{p_2}$ และ $8n_5 \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$ ตามลำดับ

2. ถ้า $3m+n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว

$$(2p_1p_2 / p) = \begin{cases} 1, & \begin{aligned} p &\equiv -p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \\ -1, & \begin{aligned} p &\equiv -p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{S_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 32n_5(n_3r_1^{T_1}p_2 + 4(n+1)n_4r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$, $T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_3, n_4 และ n_5 เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้อง $4p_2n_3 \equiv 1 \pmod{p_1}$, $4p_1n_4 \equiv 1 \pmod{p_2}$ และ $8n_5 \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$ ตามลำดับ

กรณีที่ 3 $p_1 \equiv 3 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$

ทฤษฎีบท 2.8 ให้ p_1 และ p_2 เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่ทำให้มีจำนวนเต็ม m และ n ซึ่งสอดคล้องกับ $p_1 = 4m + 3$ และ $p_2 = 4n + 3$ จะได้ว่า

1. ถ้า $m + n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$
2. ถ้า $m + n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $-3p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$

บทพิสูจน์

1. สมมติ $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะมีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $m+n=2l$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_1p_2 &= (4m+3)(4n+3) = 16mn + 12(m+n) + 9 = 16mn + 12(2l) + 9 + 1 \\ &= 8(2mn + 3l + 1) + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$

2. สมมติ $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จะมีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $m+n=2l+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_1p_2 &= (4m+3)(4n+3) = 16mn + 12(m+n) + 9 = 16mn + 12(2l+1) + 9 \\ &= 8(2mn + 3l) + 21 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$-3p_1p_2 = 8(-6mn - 9l) - 63 = 8(-6mn - 9l) - 64 + 1 = 8(-6mn - 9l - 8) + 1$$

ดังนั้น $-3p_1p_2 \equiv 1 \pmod{8}$

□

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ p_1, p_2 และ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ซึ่ง $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ และ

ถ้า $p_1 = 4m+3$ และ $p_2 = 4n+3$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m และ n จะได้ว่า

1. ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว

$$(2p_1p_2 / p) = \begin{cases} 1, & p \equiv p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv -p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv -p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv 3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv 3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv -3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv -3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2} \\ -1, & p \equiv p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv -p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv -p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv 3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv 3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv -3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ & \equiv -3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$,

$T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมนฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ

n_3, n_4 และ n_5 เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้อง $4p_2n_3 \equiv 1 \pmod{p_1}$, $4p_1n_4 \equiv 1 \pmod{p_2}$

และ $8n_5 \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$ ตามลำดับ

2. ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว

$$(2p_1p_2 / p) = \begin{cases} 1, & \begin{aligned} p &\equiv -3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \\ -1, & \begin{aligned} p &\equiv -3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{S_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{S_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 128n_5 \left((n+1)n_3r_1^{T_1}p_2 + (m+1)n_4r_2^{T_2}p_1 \right) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$,

$T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมนฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_3, n_4 และ n_5 เป็นจำนวนเต็มที่สุดคคัล้อง $4p_2n_3 \equiv 1 \pmod{p_1}$, $4p_1n_4 \equiv 1 \pmod{p_2}$ และ $8n_5 \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$ ตามลำดับ

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.5, ทฤษฎีบท 2.7 และทฤษฎีบท 2.8 มีความคล้ายคลึงกันโดยจะใช้ทฤษฎีบท 2.3 เพื่อแบ่งเป็นกรณีย่อย ๆ และใช้ทฤษฎีบท 2.1 และ ทฤษฎีบท 2.2 ในการพิจารณาผลเฉลยของระบบสมการนั้น ๆ ซึ่งในที่นี้ เราจะยกตัวอย่างบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 2.5 กรณีที่ $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ อย่างคร่าว ๆ เพื่อให้เห็นแนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีบททั้ง 3 ทฤษฎีบท

บทพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.5 จากทฤษฎีบท 1.3 เราทราบว่า

$$(p_1 p_2 / p) = \begin{cases} 1, & p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{2 p_1 p_2}, \\ & \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{T_2} p_1) \pmod{2 p_1 p_2} \\ -1, & p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{T_2} p_1) \pmod{2 p_1 p_2}, \\ & \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{2 p_1 p_2} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$, $T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเต็มสอดคล้องกับ $2p_2 n_1 \equiv 1 \pmod{p_1}$ และ $2p_1 n_2 \equiv 1 \pmod{p_2}$ ตามลำดับ

และจาก $(2/p) = \begin{cases} 1, & p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1, & p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$

สมมติ $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า

กรณีที่ 1 พิจารณา $(2p_1 p_2 / p) = 1$ จากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $(2/p)(p_1 p_2 / p) = 1$

กรณีที่ 1.1 $(2/p) = 1$ และ $(p_1 p_2 / p) = 1$

กรณีที่ 1.1.1 $p \equiv 1 \pmod{8}$ และ

$$p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{2 p_1 p_2}$$

$$\text{จะได้ว่า } p \equiv 1 \pmod{8} \text{ และ } p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{p_1 p_2}$$

$$m_1 = 8 \quad m'_1 = p_1 p_2 \quad a_1 = 1$$

$$m_2 = p_1 p_2 \quad m'_2 = 8 \quad a_2 = 2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1)$$

$$p_1 p_2 y_1 \equiv 1 \pmod{8} \quad 8 y_2 \equiv 1 \pmod{p_1 p_2}$$

จากทฤษฎีบท 2.4 และสมมติฐาน จะได้ว่า $y_1 = 1$ และ $y_2 = n_3$ ตามลำดับ

โดยทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน จะได้ว่า

$$a_1 m'_1 y_1 + a_2 m'_2 y_2 = (1)(p_1 p_2)(1) + (2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1))(8)(n_3)$$

$$= p_1 p_2 + 16 n_3 (n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1)$$

$$\text{ดังนั้น } p \equiv p_1 p_2 + 16 n_3 (n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{8 p_1 p_2}$$

$$\text{เมื่อ } n_3 \text{ เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ } 8 n_3 \equiv 1 \pmod{p_1 p_2}$$

กรณีที 1.1.2 $p \equiv 1 \pmod{8}$ และ $p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}$

ดังนั้น $p \equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}$

กรณีที 1.1.3 $p \equiv -1 \pmod{8}$ และ

$p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}$

ดังนั้น $p \equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}$

กรณีที 1.1.4 $p \equiv -1 \pmod{8}$ และ

$p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}$

ดังนั้น $p \equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}$

กรณีที 1.2 $(2/p) = -1$ และ $(p_1p_2/p) = -1$

กรณีที 1.2.1 $p \equiv 3 \pmod{8}$ และ

$p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}$

ดังนั้น $p \equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}$

กรณีที 1.2.2 $p \equiv 3 \pmod{8}$ และ

$p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}$

ดังนั้น $p \equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}$

กรณีที 1.2.3 $p \equiv -3 \pmod{8}$ และ

$p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}$

ดังนั้น $p \equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}$

กรณีที 1.2.4 $p \equiv -3 \pmod{8}$ และ

$p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}$

ดังนั้น $p \equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}$

กรณีที 2 พิจารณา $(2p_1p_2/p) = -1$ จากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $(2/p)(p_1p_2/p) = -1$

กรณีที 2.1 $(2/p) = 1$ และ $(p_1p_2/p) = -1$

กรณีที 2.1.1 $p \equiv 1 \pmod{8}$ และ

$p \equiv p_1p_2 + 2(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{2p_1p_2}$

ดังนั้น $p \equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}$

กรณีที่ 2.1.2 $p \equiv 1 \pmod{8}$ และ $p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{2p_1 p_2}$

$$\text{ดังนั้น } p \equiv p_1 p_2 + 16n_3(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{8p_1 p_2}$$

กรณีที่ 2.1.3 $p \equiv -1 \pmod{8}$ และ

$$p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{T_2} p_1) \pmod{2p_1 p_2}$$

$$\text{ดังนั้น } p \equiv -p_1 p_2 + 16n_3(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{T_2} p_1) \pmod{8p_1 p_2}$$

กรณีที่ 2.1.4 $p \equiv -1 \pmod{8}$ และ

$$p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{2p_1 p_2}$$

$$\text{ดังนั้น } p \equiv -p_1 p_2 + 16n_3(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{8p_1 p_2}$$

กรณีที่ 2.2 $(2/p) = -1$ และ $(p_1 p_2 / p) = 1$

กรณีที่ 2.2.1 $p \equiv 3 \pmod{8}$ และ

$$p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{2p_1 p_2}$$

$$\text{ดังนั้น } p \equiv 3p_1 p_2 + 16n_3(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{8p_1 p_2}$$

กรณีที่ 2.2.2 $p \equiv 3 \pmod{8}$ และ

$$p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{T_2} p_1) \pmod{2p_1 p_2}$$

$$\text{ดังนั้น } p \equiv 3p_1 p_2 + 16n_3(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{T_2} p_1) \pmod{8p_1 p_2}$$

กรณีที่ 2.2.3 $p \equiv -3 \pmod{8}$ และ

$$p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{2p_1 p_2}$$

$$\text{ดังนั้น } p \equiv -3p_1 p_2 + 16n_3(n_1 r_1^{S_1} p_2 + n_2 r_2^{S_2} p_1) \pmod{8p_1 p_2}$$

กรณีที่ 2.2.4 $p \equiv -3 \pmod{8}$ และ

$$p \equiv p_1 p_2 + 2(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{T_2} p_1) \pmod{2p_1 p_2}$$

$$\text{ดังนั้น } p \equiv -3p_1 p_2 + 16n_3(n_1 r_1^{T_1} p_2 + n_2 r_2^{T_2} p_1) \pmod{8p_1 p_2}$$

ดังนั้น

$$(2p_1p_2 / p) = \begin{cases} 1, & \begin{aligned} p &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \\ -1, & \begin{aligned} p &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv 3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{S_1}p_2 + n_2r_2^{S_2}p_1) \pmod{8p_1p_2}, \\ &\equiv -3p_1p_2 + 16n_3(n_1r_1^{T_1}p_2 + n_2r_2^{T_2}p_1) \pmod{8p_1p_2} \end{aligned} \end{cases}$$

เมื่อ $S_1 \in \{2, 4, 6, \dots, p_1 - 1\}$, $S_2 \in \{2, 4, 6, \dots, p_2 - 1\}$, $T_1 \in \{1, 3, 5, \dots, p_1 - 2\}$, $T_2 \in \{1, 3, 5, \dots, p_2 - 2\}$, r_1 และ r_2 เป็นรากปฐมฐานมอดุโล p_1 และ p_2 ตามลำดับ และ n_1, n_2 และ n_3 เป็นจำนวนเต็มสอดคล้องกับ $2p_2n_1 \equiv 1 \pmod{p_1}$, $2p_1n_2 \equiv 1 \pmod{p_2}$ และ $8n_3 \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$ ตามลำดับ

สำหรับกรณี $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ เราทำการพิสูจน์ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์กรณี $m+n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ □

3. สรุป

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาหารูปแบบของจำนวนเฉพาะคี่ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ $(2p_1p_2 / p)$ เมื่อ p_1, p_2 เป็นจำนวนเฉพาะคี่, $p \nmid p_1$ และ $p \nmid p_2$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี คือ

1. $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 1 \pmod{4}$,
2. $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$ และ
3. $p_1 \equiv 3 \pmod{4}$ และ $p_2 \equiv 3 \pmod{4}$

และในแต่ละกรณีได้แบ่งเป็น 2 กรณีย่อย โดยได้ใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีนซึ่งเป็นทฤษฎีบทพื้นฐานในทางทฤษฎีจำนวนในการคำนวณเพื่อทำให้สามารถหารูปแบบของจำนวนเฉพาะคี่ที่สอดคล้องกับสัญลักษณ์เลอจองด์ได้ และยิ่งไปกว่านั้น ผู้วิจัยคาดหวังว่างานวิจัยนี้อาจจะนำไปสู่การหารูปแบบของจำนวนเฉพาะคี่ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ใด ๆ ต่อไปในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

- [1] อัจฉรา หาญชูวงศ์. (2542). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Harnchoowong, A. (1999). *Theory of Numbers*. Bangkok: Chulalongkorn University Printery.
- [2] อภิรัฐ ศิริวรรณกุล. (2547). จำนวนเฉพาะ p ที่ทำให้ $\det(\text{adj } X) = b$ มีผลเฉลยใน $M_3(\mathbb{Z}_p)$. (โครงการระดับปริญญาตรี, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย).
- Siraworakun, A. (2004). Prime p Admitting a Solution of $\det(\text{adj } X) = b$ in $M_3(\mathbb{Z}_p)$. (Senior Project, Chulalongkorn University).
- [3] อภิรัฐ ศิริวรรณกุล, จันทนา วรรณพันธุ์ และ นภลัย สีสด. (2559). รูปแบบจำนวนเฉพาะคี่ p ในสัญลักษณ์เลอจองด์ (p_1p_2 / p) . รายงานการประชุมวิชาการระดับชาติมหาวิทยาลัยราชภัฏกลุ่มศรีอยุธยาครั้งที่ 7. หน้า 759 - 764.
- Siraworakun, A., Wannaphan, C. and Seesod, N. (2016). Forms of Odd Prime Numbers p in Legendre Symbol (p_1p_2 / p) . Proceeding of 7th National Conference of Sri-Ayutthaya Rajabhat University Group. p. 759 - 764.



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 64(699) กันยายน – ธันวาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$

Closed Knight's Tour on Ring Board $(n, n, 1)$

รตินันท์ บุญเคลือบ ปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ และ วสุพล ศรีโชติ

Ratinan Boonklurb¹, Punyaporn Sapworarit² and Wasupol Srichote³

^{1, 2, 3}Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: ¹ratinan.b@chula.ac.th ²pearpz1@gmail.com ³wasupon4.4@hotmail.com

วันที่รับบทความ : 18 กรกฎาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 26 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 15 สิงหาคม 2562

บทคัดย่อ

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $m, n \geq 3$ กระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เป็นกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีส่วนตรงกลางขนาด 1×1 ขาดหายไป บทความฉบับนี้ศึกษาเงื่อนไขที่รับประกันการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ และกระดานวงแหวน $(m, m + 4k, 1)$ เมื่อ m เป็นจำนวนคี่ที่ $m \geq 11$ และ $k \geq 1$ และหากมีการเดินแบบปิดของม้าแล้วจะนำเสนอขั้นตอนวิธีในการเดินด้วย

คำสำคัญ: การเดินแบบปิดของม้า กระดานวงแหวน

ABSTRACT

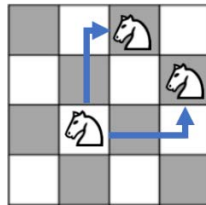
Let m, n be odd integers such that $m, n \geq 3$, the ring board $(m, n, 1)$ is an $m \times n$ chessboard with the middle part of size 1×1 is missing. This article studies the

conditions to guarantee the existence of a closed knight's tour on the ring board $(n, n, 1)$ and the ring board $(m, m + 4k, 1)$ for odd integers m such that $m \geq 11$ and $k \geq 1$ and if it exists, then an algorithm for finding a closed knight's tour on that board is given.

Keywords: Closed knight's tour, Ring board

1. บทนำ

การเดินทางของม้าบนกระดานหมากรุกเป็นเรื่องที่น่าสนใจในทางคณิตศาสตร์ โดยม้าจะเดินไปในแนวนอนหรือแนวตั้งจำนวนสองช่องแล้วหมุนในระนาบเดียวกัน 90 องศา กับแนวเดิมและเดินต่อไปอีกหนึ่งช่อง ดังรูป



รูปที่ 1.1 การเดินของม้าจากจุดที่กำหนดบนกระดานหมากรุกขนาด 4×4

โดยทั่วไปกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานจะเป็นกระดานหมากรุกขนาด 8×8 ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเรียงต่อกัน 8 แถว แถวละ 8 รูป ต่อมานักคณิตศาสตร์ได้ขยายการเดินทางของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด 8×8 ไปสู่การเดินทางของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเรียงต่อกัน m แถว แถวละ n รูป และหาแต่ละช่องด้วยสีขาวและสีดำสลับกันไป

สำหรับกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ถ้ากำหนดให้แต่ละช่องมีตำแหน่งเป็น (i, j) ในลักษณะเดียวกับการกำหนดตำแหน่งสมาชิกของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้วจะได้ว่าม้าที่อยู่ในตำแหน่ง (i, j) จะสามารถเลือกเดินไปได้ 1 ช่องจากอย่างมาก 8 ช่อง โดยอาจไปอยู่ในตำแหน่ง $(i \pm 1, j \pm 2)$ หรือ $(i \pm 2, j \pm 1)$ สังเกตว่าการเดินของม้าในแต่ละครั้ง จะเดินจากช่องสีขาวไปยังช่องสีดำ หรือช่องสีดำไปยังช่องสีขาวเท่านั้น

การเดินทางแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ คือ การเดินของม้าโดยที่ม้าเดินไปทุกช่องของกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ เพียงหนึ่งครั้ง แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้น ดังนั้นจากข้อสังเกต

เกี่ยวกับการเดินของม้าทำให้ได้ว่า ถ้าจำนวนช่องสีขาวและช่องสีดำบนกระดานหมากรุกที่พิจารณามีจำนวนไม่เท่ากัน แล้วจะไม่สามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกดังกล่าวได้

ในปี ค.ศ. 1991 Schwenk [2] ได้เผยแพร่เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 [2] บนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ โดยที่ $m \leq n$ จะมีการเดินแบบปิดของม้าได้ ยกเว้นถ้าเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

- a) m และ n เป็นจำนวนคี่ทั้งคู่ หรือ
- b) $m = 1$ หรือ 2 หรือ 4 หรือ
- c) $m = 3$ และ $n = 4$ หรือ 6 หรือ 8

นอกจากนี้ Schwenk [2] ยังพิสูจน์ว่า ถ้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ มีการเดินแบบปิดของม้าแล้วจะได้ว่าสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าที่ผ่านระหว่างตำแหน่งสองตำแหน่งบนกระดานดังกล่าวทั้งหมด 10 คู่ ที่เราสามารถระบุตำแหน่งคู่นั้นได้เสมอ

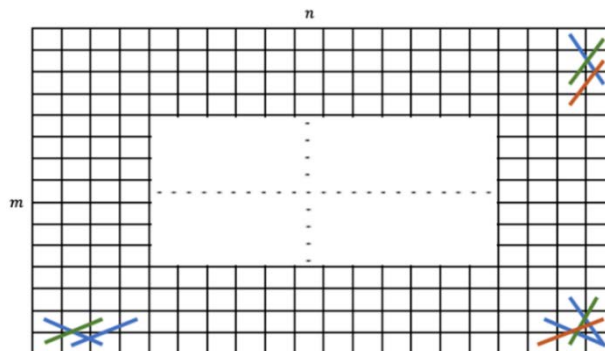
ทฤษฎีบท 1.2 [2] สำหรับกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีการเดินแบบปิดของม้า เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าที่ผ่านช่องบนกระดานหมากรุกนั้น 10 คู่ คือ

$$(1, n-1) - (3, n), (m-2, n-1) - (m, n), (m-1, 1) - (m, 3), (m-1, n-2) - (m, n),$$

$$(4, n-1) - (2, n), (1, n) - (3, n-1), (m-2, n) - (m, n-1), (m, 1) - (m-1, 3),$$

$$(m, n-2) - (m-1, n) \text{ และ } (m, 2) - (m-1, 4)$$

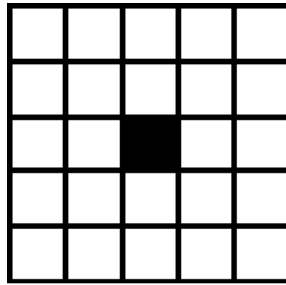
ได้เสมอ



รูปที่ 1.2 ตำแหน่งสองตำแหน่งทั้งหมด 10 คู่ ตามทฤษฎีบท 1.2

บนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีการเดินแบบปิดของม้า

ต่อมานักวิจัยบางท่านได้หันไปให้ความสนใจกับการเดินของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่รูตรงกลางขนาด $r \times r$ โดยที่ m, n, r เป็นจำนวนเต็มที่ $r \geq 1$ และ $m, n > 2r$ ซึ่งเรียกกระดานแบบนี้ว่า *กระดานวงแหวน* (m, n, r)



รูปที่ 1.3 ตัวอย่างกระดานวงแหวน $(5,5,1)$

สำหรับกรณีเฉพาะที่ $m = n$ จะเห็นว่าเหนือรูขนาด $r \times r$ จะมีช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่จำนวน $\frac{n-r}{2}$ แถว ซึ่งเราเรียกว่าความหนาของกระดานวงแหวน (n, n, r) เช่น ในรูป 1.3 จะเห็นว่ากระดานวงแหวน $(5,5,1)$ มีความหนาเป็น 2

ในปี ค.ศ. 1996 Wiitala [3] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (n, n, r) ที่มีความหนาเป็น 2 ซึ่งได้ผลการศึกษาดังนี้

ทฤษฎีบท 1.3 [3] ไม่มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (n, n, r) ที่มีความหนาเป็น 2 เมื่อ $n \geq 5$

บทความฉบับนี้จะศึกษาเงื่อนไขเกี่ยวกับการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่บางจำนวน โดยการแบ่งกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ออกเป็นส่วน ๆ แล้วพิจารณาการเดินของม้าในส่วนเหล่านั้นและพยายามหาทางเชื่อมต่อกันจนเป็นการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ที่สมบูรณ์

2. การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

กรณี 1 เมื่อ $n = 3$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(3, 3, 1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.1 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

1	6	3
4		8
7	2	5

รูปที่ 2.1 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(3, 3, 1)$

กรณี 2 เมื่อ $n = 5$ จากรูป 1.3 กระดานวงแหวน $(5, 5, 1)$ มีความหนาเป็น 2 ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.3 จะได้ว่าไม่มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

กรณี 3 เมื่อ $n = 7$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(7, 7, 1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.2 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

10	7	2	5	20	13	22
1	4	9	12	23	16	19
8	11	6	3	18	21	14
41	48	39		15	24	17
38	45	42	27	30	35	32
43	40	47	36	33	28	25
46	37	44	29	26	31	34

รูปที่ 2.2 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(7, 7, 1)$

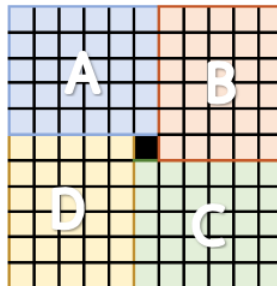
กรณี 4 เมื่อ $n = 9$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(9, 9, 1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.3 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

กรณี 5 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่บวกที่ $n \geq 11$ เราแบ่งกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ออกเป็นกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ เท่า ๆ กันจำนวน 2 กระดาน และกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ เท่า ๆ กันจำนวน 2 กระดาน ตามแนวเส้นขอบของรูขนาด 1×1 ของกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$

5	10	17	12	27	34	23	38	25
18	13	4	9	22	39	26	33	30
3	6	11	16	35	28	31	24	37
14	19	8	1	40	21	36	29	32
7	2	15	20		60	55	42	47
72	69	76	61	80	41	48	59	54
77	64	71	68	75	56	51	46	43
70	73	66	79	62	49	44	53	58
65	78	63	74	67	52	57	50	45

รูปที่ 2.3 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (9, 9, 1)

ดังตัวอย่างการแบ่งกระดานวงแหวน (11, 11, 1) ออกเป็น 4 กระดานในรูป 2.4 โดยจะเรียกกระดานหมากรุกย่อยตำแหน่งซ้ายบนว่ากระดาน A และเรียกกระดานย่อยกระดานอื่น ๆ ตามทิศทางตามเข็มนาฬิกาว่ากระดาน B, C และ D ตามลำดับ



รูปที่ 2.4 แนวการแบ่งกระดานวงแหวน (11, 11, 1) ออกเป็น 4 กระดาน

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 11$ ดังนั้น $\frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ติดกัน ทำให้ $\frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ไม่ได้ นั่นคือ กระดานหมากรุกขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข a) ของทฤษฎีบท 1.1 ยิ่งไปกว่านั้นเรายังได้ว่า $\frac{n-1}{2} \geq 5$ นั่นคือ กระดานหมากรุกขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข b) และ c) ของทฤษฎีบท 1.1

จึงสรุปได้ว่า กระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ และกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ เหล่านี้ มีการเดินแบบปิดของม้าเสมอ

ต่อไป เพื่อให้ง่ายต่อการขยายแนวคิดในภายหลัง สำหรับกรณีนี้ เราจะใช้สัญลักษณ์ n แทนจำนวนแถวของกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ และ $\bar{n}$ แทนจำนวนหลักของกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.2 จะได้ว่า มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ ดังนี้

$$\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_A - \left(3, \frac{n+1}{2}\right)_A \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2}, 2\right)_A - \left(\frac{n-3}{2}, 4\right)_A$$

มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ ดังนี้

$$(2, 1)_B - (4, 2)_B \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_B - \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-5}{2}\right)_B$$

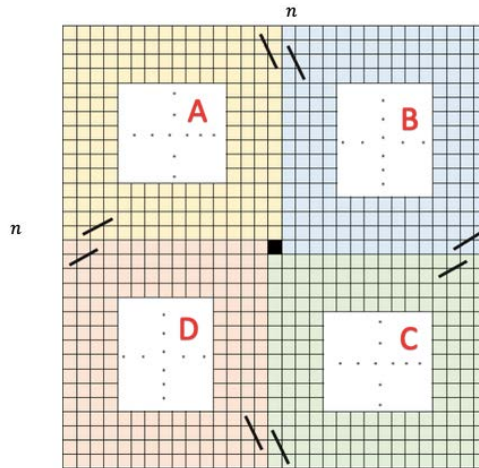
มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ ดังนี้

$$\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_C - \left(2, \frac{n-5}{2}\right)_C \text{ และ } \left(\frac{n-5}{2}, 1\right)_C - \left(\frac{n-1}{2}, 2\right)_C$$

และมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ ดังนี้

$$(1, 3)_D - (2, 1)_D \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_D - \left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)_D$$

ทั้งนี้ในความเป็นจริงแล้วหากหมุนกระดาน B และกระดาน D ไป 90 องศาในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะได้ว่าตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดานทั้งสอง คือ ตำแหน่งเดียวกันกับตำแหน่งทั้ง 2 คู่บนกระดาน A และกระดาน C ตามลำดับ ดังรูป 2.5



รูปที่ 2.5 การเดินของม้าที่ผ่านตำแหน่ง 2 คู่ ของกระดาน A , B , C และ D

จะเห็นว่าม้าสามารถเดินข้ามกระดานย่อยทั้งสี่ที่แบ่งออกมาได้โดย

เดินข้ามระหว่างกระดาน A ไปกระดาน B ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_A - (2, 1)_B \text{ และ } (4, 2)_B - \left(3, \frac{n+1}{2}\right)_A$$

เดินม้าข้ามระหว่างกระดาน B ไปกระดาน C ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_B - \left(1, \frac{n-1}{2}\right)_C \text{ และ } \left(2, \frac{n-5}{2}\right)_C - \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-5}{2}\right)_B$$

และเดินม้าข้ามระหว่างกระดาน C ไปกระดาน D ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)_C - \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_D \text{ และ } \left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)_D - \left(\frac{n-5}{2}, 1\right)_C$$

ดังนั้นจะได้อะไรจากการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ทำได้โดย ยกเลิกการเดินผ่าน

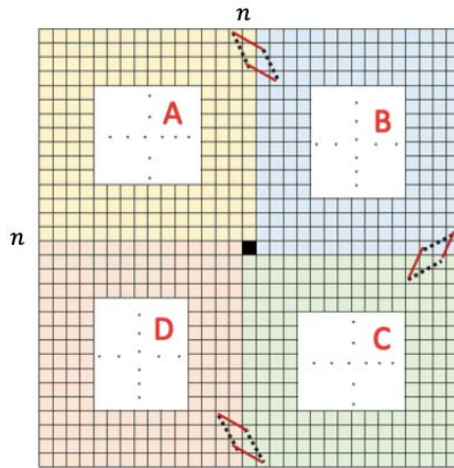
ตำแหน่งทั้ง 2 คู่ดังกล่าว บนกระดาน B และ กระดาน C และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$$\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_A - \left(3, \frac{n+1}{2}\right)_A \text{ บนกระดาน } A \text{ และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ } \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_D - \left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)_D \text{ บนกระดาน } D$$

ต่อมาเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2, 1)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-5}{2}\right)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(2, \frac{n-5}{2}\right)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2}, 1\right)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน B ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4, 2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน A ที่ตำแหน่ง $\left(3, \frac{n+1}{2}\right)_A$ สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น

รูป 2.6 ด้านล่างนี้แสดงการยกเลิกการเดินบนกระดานต่าง ๆ ตามการอธิบายข้างต้นด้วยเส้นประ และแสดงเส้นทางการเดินเชื่อมระหว่างกระดานย่อย ๆ ทั้งสี่ด้วยเส้นทึบ



รูปที่ 2.6 การเดินของม้าที่ยกเลิกไปและการเดินของม้าเชื่อมระหว่างกระดาน

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณากระดานวงแหวน $(11, 11, 1)$ เริ่มจากการแบ่งกระดานวงแหวน $(11, 11, 1)$ ออกเป็นกระดานย่อย ๆ ขนาด 5×6 และ 6×5 อย่างละ 2 กระดาน ซึ่งจะสามารถหาเส้นทางเดินแบบปิดของม้าในแต่ละกระดานย่อย 4 กระดานได้ดังรูป 2.7 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานย่อยต่าง ๆ

1 _A	10 _A	5 _A	20 _A	25 _A	16 _A	29 _B	22 _B	11 _B	4 _B	1 _B
4 _A	21 _A	2 _A	17 _A	6 _A	19 _A	12 _B	3 _B	30 _B	21 _B	10 _B
11 _A	30 _A	9 _A	24 _A	15 _A	26 _A	23 _B	28 _B	9 _B	2 _B	5 _B
22 _A	3 _A	28 _A	13 _A	18 _A	7 _A	8 _B	13 _B	24 _B	17 _B	20 _B
29 _A	12 _A	23 _A	8 _A	27 _A	14 _A	27 _B	18 _B	15 _B	6 _B	25 _B
16 _D	19 _D	26 _D	7 _D	14 _D		14 _B	7 _B	26 _B	19 _B	16 _B
25 _D	6 _D	15 _D	18 _D	27 _D	14 _C	27 _C	8 _C	23 _C	12 _C	29 _C
20 _D	17 _D	24 _D	13 _D	8 _D	7 _C	18 _C	13 _C	28 _C	3 _C	22 _C
5 _D	2 _D	9 _D	28 _D	23 _D	26 _C	15 _C	24 _C	9 _C	30 _C	11 _C
10 _D	21 _D	30 _D	3 _D	12 _D	19 _C	6 _C	17 _C	2 _C	21 _C	4 _C
1 _D	4 _D	11 _D	22 _D	29 _D	16 _C	25 _C	20 _C	5 _C	10 _C	1 _C

รูปที่ 2.7 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานย่อยทั้งสิ้น

ต่อมายกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ คือ $(2, 1)_B - (4, 2)_B$, $(5, 5)_B - (6, 3)_B$, $(1, 5)_C - (2, 3)_C$ และ $(3, 1)_C - (5, 2)_C$ บนกระดาน B และ กระดาน C ตามลำดับ และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $(1, 5)_A - (3, 6)_A$ บนกระดาน A และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $(5, 5)_D - (3, 4)_D$ บนกระดาน D

แล้วเริ่มการเดินทางจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $(1, 5)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2, 1)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(6, 3)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(2, 3)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(5, 2)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $(5, 5)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $(3, 4)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(3, 1)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(1, 5)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(5, 5)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4, 2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน A ที่ตำแหน่ง $(3, 6)_A$

สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาถึงตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป 2.8

1 _A	10 _A	5 _A	20 _A	25 _A	16 _A	29 _B	22 _B	11 _B	4 _B	1 _B
4 _A	21 _A	2 _A	17 _A	6 _A	19 _A	12 _B	3 _B	30 _B	21 _B	10 _B
11 _A	30 _A	9 _A	24 _A	15 _A	26 _A	23 _B	28 _B	9 _B	2 _B	5 _B
22 _A	3 _A	28 _A	13 _A	18 _A	7 _A	8 _B	13 _B	24 _B	17 _B	20 _B
29 _A	12 _A	23 _A	8 _A	27 _A	14 _A	27 _B	18 _B	15 _B	6 _B	25 _B
16 _D	19 _D	26 _D	7 _D	14 _D		14 _B	7 _B	26 _B	19 _B	16 _B
25 _D	6 _D	15 _D	18 _D	27 _D	14 _C	27 _C	8 _C	23 _C	12 _C	29 _C
20 _D	17 _D	24 _D	13 _D	8 _D	7 _C	18 _C	13 _C	28 _C	3 _C	22 _C
5 _D	2 _D	9 _D	28 _D	23 _D	26 _C	15 _C	24 _C	9 _C	30 _C	11 _C
10 _D	21 _D	30 _D	3 _D	12 _D	19 _C	6 _C	17 _C	2 _C	21 _C	4 _C
1 _D	4 _D	11 _D	22 _D	29 _D	16 _C	25 _C	20 _C	5 _C	10 _C	1 _C

รูปที่ 2.8 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดานย่อย

เมื่อเรานำมาเรียงเขียนแนวการเดินทางทั้งกระดานใหม่จะได้ดังรูป 2.9 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวน $(11, 11, 1)$

นอกจากนี้ เมื่อเรายกเลิกการเดินทางผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดาน B และกระดาน C และยกเลิกการเดินทางผ่านตำแหน่ง 1 คู่ บนกระดาน A และกระดาน D ตามที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว เราอาจหาเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าอีกเส้นทางหนึ่ง โดยเริ่มการเดินทางจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $(1, \frac{n-1}{2})_A$ แล้ว

1	10	5	20	25	16	39	106	27	34	37
4	21	2	17	6	19	26	35	38	107	28
11	120	9	24	15	116	105	40	29	36	33
22	3	118	13	18	7	30	115	104	111	108
119	12	23	8	117	14	41	110	113	32	103
82	79	72	61	84		114	31	42	109	112
73	62	83	80	71	44	87	98	53	102	89
78	81	74	85	60	97	48	43	88	93	52
63	66	59	70	75	86	45	54	99	90	101
58	77	68	65	56	49	96	47	92	51	94
67	64	57	76	69	46	55	50	95	100	91

รูปที่ 2.9 การเดินของม้าบนกระดานวงแหวน $(11, 11, 1)$

เดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2, 1)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2}, 1\right)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(2, \frac{n-5}{2}\right)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน B ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-5}{2}\right)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4, 2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน A ที่ตำแหน่ง $\left(3, \frac{n+1}{2}\right)_A$ สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงเส้นทางเดินแบบปิดของม้าอีกเส้นทางหนึ่งที่ได้นำเสนอ

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณากระดานวงแหวน $(13, 13, 1)$ ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่าเส้นประที่แสดงในรูป คือ เส้นทางที่ม้าจะเดินข้ามระหว่างกระดานย่อยทั้งสี่ และตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานย่อยต่าง ๆ

1 _A	12 _A	27 _A	30 _A	19 _A	14 _A	17 _A	38 _B	41 _B	36 _B	11 _B	28 _B	1 _B
28 _A	25 _A	2 _A	13 _A	16 _A	31 _A	20 _A	35 _B	10 _B	39 _B	42 _B	25 _B	12 _B
11 _A	42 _A	29 _A	26 _A	3 _A	18 _A	15 _A	40 _B	37 _B	24 _B	29 _B	2 _B	27 _B
36 _A	39 _A	24 _A	5 _A	8 _A	21 _A	32 _A	9 _B	34 _B	5 _B	26 _B	13 _B	30 _B
41 _A	10 _A	37 _A	34 _A	23 _A	4 _A	7 _A	6 _B	23 _B	8 _B	3 _B	16 _B	19 _B
38 _A	35 _A	40 _A	9 _A	6 _A	33 _A	22 _A	33 _B	4 _B	21 _B	18 _B	31 _B	14 _B
17 _D	20 _D	15 _D	32 _D	7 _D	22 _D		22 _B	7 _B	32 _B	15 _B	20 _B	17 _B
14 _D	31 _D	18 _D	21 _D	4 _D	33 _D	22 _C	33 _C	6 _C	9 _C	40 _C	35 _C	38 _C
19 _D	16 _D	3 _D	8 _D	23 _D	6 _D	7 _C	4 _C	23 _C	34 _C	37 _C	10 _C	41 _C
30 _D	13 _D	26 _D	5 _D	34 _D	9 _D	32 _C	21 _C	8 _C	5 _C	24 _C	39 _C	36 _C
27 _D	2 _D	29 _D	24 _D	37 _D	40 _D	15 _C	18 _C	3 _C	26 _C	29 _C	42 _C	11 _C
12 _D	25 _D	42 _D	39 _D	10 _D	35 _D	20 _C	31 _C	16 _C	13 _C	2 _C	25 _C	28 _C
1 _D	28 _D	11 _D	36 _D	41 _D	38 _D	17 _C	14 _C	19 _C	30 _C	27 _C	12 _C	1 _C

รูปที่ 2.10 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดานย่อย

ซึ่งจะนำมาเรียงเขียนแนวการเดินทั้งกระดานได้ดังรูป 2.11 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวน (13, 13, 1)

1	12	153	156	145	14	143	18	21	16	33	134	23
154	151	2	13	142	157	146	15	32	19	22	131	34
11	168	155	152	3	144	141	20	17	130	135	24	133
162	165	150	5	8	147	158	31	140	27	132	35	136
167	10	163	160	149	4	7	28	129	30	25	122	125
164	161	166	9	6	159	148	139	26	127	124	137	36
83	86	81	98	73	88		128	29	138	121	126	123
80	97	84	87	70	99	108	119	50	53	42	37	40
85	82	69	74	89	72	51	48	109	120	39	54	43
96	79	92	71	100	75	118	107	52	49	110	41	38
93	68	95	90	61	64	101	104	47	112	115	44	55
78	91	66	63	76	59	106	117	102	57	46	111	114
67	94	77	60	65	62	103	58	105	116	113	56	45

รูปที่ 2.11 การเดินของม้าบนกระดานวงแหวน (13, 13, 1)

3. สรุปและอภิปรายผล

ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 4$ จะได้ว่ากระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ มี $n^2 - 1$ ช่อง ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ทำให้ช่องสีขาวและช่องสีดำมีจำนวนไม่เท่ากัน จากข้อสังเกตในหัวข้อที่ 1 ทำให้ได้ว่าไม่มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจากการวิเคราะห์ในหัวข้อ 2 ทำให้สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับจำนวนนับ n ที่ $n \geq 2$ จะมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \neq 5$

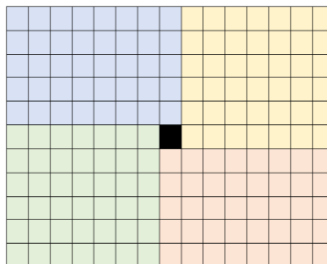
จากหัวข้อที่ 2 แม้ว่าจะมีตำแหน่งที่แน่นอนในการแบ่งกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ และตำแหน่งที่แน่นอนในการเดินข้ามระหว่างกระดานย่อยที่แบ่งแล้ว แต่สิ่งที่ยังคงยุ่งยาก คือ การหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานย่อย ๆ เหล่านั้น อย่างไรก็ตามหากสังเกตจากตัวอย่าง 2.1 และ 2.2 จะเห็นว่าหากได้ทางเดินแบบปิดของม้าบนกระดานย่อยกระดานหนึ่งแล้ว สามารถนำมาหมุนหรือพลิกเพื่อสร้างเป็นทางเดินแบบปิดของม้าบนกระดานย่อยที่เหลือได้

ยิ่งไปกว่านั้นหากขยายแนวคิดไปสู่กระดานวงแหวน $(m, m + 4k, 1)$ เมื่อ $m \geq 11$ และ $k \geq 0$ จะสามารถแบ่งกระดานวงแหวน $(m, m + 4k, 1)$ ออกเป็นสี่ส่วน แล้วเปลี่ยนตัวแปร n และ $\bar{n}$ ในกรณี 5 ของหัวข้อที่ 2 เป็น m และ $m + 4k$ ตามลำดับ ก็จะได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้ ซึ่งถือเป็นภาคขยายส่วนหนึ่งของทฤษฎีบท 3.1

ทฤษฎีบท 3.2 สำหรับจำนวนเต็มคี่ m ที่ $m \geq 11$ และจำนวนเต็ม k ที่ $k \geq 0$ จะมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, m + 4k, 1)$

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณากระดานวงแหวน $(11, 15, 1)$ นั่นคือ $m = 11$ และ $k = 1$

เริ่มต้นแบ่งกระดานวงแหวน $(11, 15, 1)$ เป็นกระดานย่อยขนาด 5×8 6 \times 7



รูปที่ 3.1 แนวการแบ่งกระดานวงแหวน $(11, 15, 1)$

จะสามารถหาเส้นทางเดินม้าแบบปิดในแต่ละกระดานย่อย 4 กระดาน ได้ดังรูป 3.2 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานย่อยต่าง ๆ

1 _A	36 _A	5 _A	10 _A	29 _A	24 _A	17 _A	12 _A	1 _B	8 _B	19 _B	34 _B	3 _B	10 _B	17 _B
4 _A	9 _A	2 _A	37 _A	16 _A	11 _A	30 _A	25 _A	20 _B	35 _B	2 _B	9 _B	18 _B	33 _B	4 _B
35 _A	40 _A	21 _A	6 _A	23 _A	28 _A	13 _A	18 _A	7 _B	42 _B	27 _B	36 _B	5 _B	16 _B	11 _B
8 _A	3 _A	38 _A	33 _A	20 _A	15 _A	26 _A	31 _A	28 _B	21 _B	6 _B	15 _B	26 _B	37 _B	32 _B
39 _A	34 _A	7 _A	22 _A	27 _A	32 _A	19 _A	14 _A	41 _B	14 _B	23 _B	30 _B	39 _B	12 _B	25 _B
38 _B	31 _B	24 _B	13 _B	40 _B	29 _B	22 _B		22 _B	29 _B	40 _B	13 _B	24 _B	31 _B	38 _B
25 _B	12 _B	39 _B	30 _B	23 _B	14 _B	41 _B	14 _C	19 _C	32 _C	27 _C	22 _C	7 _C	34 _C	39 _C
32 _B	37 _B	26 _B	15 _B	6 _B	21 _B	28 _B	31 _C	26 _C	15 _C	20 _C	33 _C	38 _C	3 _C	8 _C
11 _B	16 _B	5 _B	36 _B	27 _B	42 _B	7 _B	18 _C	13 _C	28 _C	23 _C	6 _C	21 _C	40 _C	35 _C
4 _B	33 _B	18 _B	9 _B	2 _B	35 _B	20 _B	25 _C	30 _C	11 _C	16 _C	37 _C	2 _C	9 _C	4 _C
17 _B	10 _B	3 _B	34 _B	19 _B	8 _B	1 _B	12 _C	17 _C	24 _C	29 _C	10 _C	5 _C	36 _C	1 _C

รูปที่ 3.2 ลำดับการเดินของม้าบนกระดานย่อยต่าง ๆ

ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ คือ $(2, 1)_B - (4, 2)_B$, $(5, 7)_B - (6, 5)_B$, $(1, 7)_C - (2, 5)_C$ และ $(3, 1)_C - (5, 2)_C$ บนกระดาน B และ กระดาน C ตามลำดับ และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $(1, 7)_A - (3, 8)_A$ บนกระดาน A และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ $(3, 6)_D - (5, 7)_D$ บนกระดาน D

ต่อมาเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $(1, 7)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2, 1)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(5, 7)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(1, 7)_C$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(5, 2)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $(5, 7)_D$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $(3, 6)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(3, 1)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(2, 5)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(6, 5)_B$ จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4, 2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากกระดาน A ที่ตำแหน่ง $(3, 8)_A$ สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป 3.3

1 _A	36 _A	5 _A	10 _A	29 _A	24 _A	17 _A	12 _A	1 _B	8 _B	19 _B	34 _B	3 _B	10 _B	17 _B
4 _A	9 _A	2 _A	37 _A	16 _A	11 _A	30 _A	25 _A	20 _B	35 _B	2 _B	9 _B	18 _B	33 _B	4 _B
35 _A	40 _A	21 _A	6 _A	23 _A	28 _A	13 _A	18 _A	7 _B	42 _B	27 _B	36 _B	5 _B	16 _B	11 _B
8 _A	3 _A	38 _A	33 _A	20 _A	15 _A	26 _A	31 _A	28 _B	21 _B	6 _B	15 _B	26 _B	37 _B	32 _B
39 _A	34 _A	7 _A	22 _A	27 _A	32 _A	19 _A	14 _A	41 _B	14 _B	23 _B	30 _B	39 _B	12 _B	25 _B
38 _D	31 _D	24 _D	13 _D	40 _D	29 _D	22 _D		22 _B	29 _B	40 _B	13 _B	24 _B	31 _B	38 _B
25 _D	12 _D	39 _D	30 _D	23 _D	14 _D	41 _D	14 _C	19 _C	32 _C	27 _C	22 _C	7 _C	34 _C	39 _C
32 _D	37 _D	26 _D	15 _D	6 _D	21 _D	28 _D	31 _C	26 _C	15 _C	20 _C	33 _C	38 _C	3 _C	8 _C
11 _D	16 _D	5 _D	36 _D	27 _D	42 _D	7 _D	18 _C	13 _C	28 _C	23 _C	6 _C	21 _C	40 _C	35 _C
4 _D	33 _D	18 _D	9 _D	2 _D	35 _D	20 _D	25 _C	30 _C	11 _C	16 _C	37 _C	2 _C	9 _C	4 _C
17 _D	10 _D	3 _D	34 _D	19 _D	8 _D	1 _D	12 _C	17 _C	24 _C	29 _C	10 _C	5 _C	36 _C	1 _C

รูปที่ 3.3 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดาน

เมื่อเรานำมาเรียงเขียนแนวการเดินทั้งกระดานใหม่จะได้ดังรูป 3.4

1	160	5	10	153	148	17	12	37	30	19	46	35	28	21
4	9	2	161	16	11	154	149	18	45	36	29	20	47	34
159	164	145	6	147	152	13	142	31	38	53	44	33	22	27
8	3	162	157	144	15	150	155	52	141	32	23	54	43	48
163	158	7	146	151	156	143	14	39	24	139	50	41	26	55
104	111	118	87	102	113	120		140	51	40	25	138	49	42
117	88	103	112	119	86	101	76	123	136	131	126	69	56	61
110	105	116	85	94	121	114	135	130	77	124	137	60	65	70
89	84	95	106	115	100	93	122	75	132	127	68	125	62	57
96	109	82	91	98	107	80	129	134	73	78	59	64	71	66
83	90	97	108	81	92	99	74	79	128	133	72	67	58	63

รูปที่ 3.4 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(11, 15, 1)$

สำหรับผู้สนใจศึกษาเพิ่มเติม อาจพิจารณาขยายปัญหาไปในแนวทางต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. พิจารณาว่ามีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เมื่อ $m < 11$ และ $n < 11$ หรือไม่
2. พิจารณาว่ามีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (m, n, r) ที่ $r \geq 2$ หรือไม่

3. นอกจากการเดินม้าแบบปกติที่นำเสนอในบทความนี้แล้ว Chia และ Ong [1] ยังได้นำเสนอการเดินม้าแบบ (a, b) เมื่อ $a \leq b$ ซึ่งคือการเดินม้าที่ม้าจะเดินไปในแนวนอนหรือแนวตั้งจำนวน a ช่องแล้วหมุนในระนาบเดียวกัน 90 องศากับแนวเดิมและเดินต่อไปอีก b ช่อง ดังนั้นผู้สนใจอาจพิจารณาว่าสำหรับการเดินม้าแบบ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ จะมีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (m, n, r) ที่ $r \geq 2$ หรือไม่

เอกสารอ้างอิง

- [1] Chia, G.L. and Ong, S.-H. (2005). Generalized Knight's Tours on Rectangular Chessboards, *Discrete Applied Mathematics*, 150, p. 80 - 98.
- [2] Schwenk, A.L. (1991). Rectangular Chessboards have a Knight's Tour, *Math. Magazine*, 64, p. 325 - 332.
- [3] Wiitala, H.R. (1996). The Knight's Tour Problem on Boards with Holes, *Research Experiences for Undergraduates Proceedings*, p.132-151.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้
ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

ที่อยู่ อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ สรุป เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคขึ้น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคขึ้น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1

2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาต ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ เป็นภาพวาดคำ และลายเส้นต่าง ๆ ให้ใช้เส้นสีดำ ทั้งนี้ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับได้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป” เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ “ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทยก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

ประเภทของสมาชิก

สมาชิกมี 3 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ สมาชิกสามัญ และสมาชิกวารสาร

☐ **สมาชิกสามัญ** สำหรับผู้ที่มีความสนใจ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ
2. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

☐ **สมาชิกวารสาร** สำหรับบุคคลหรือหน่วยงานที่มีความสนใจวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ เป็นประจำ

สิทธิของสมาชิกวารสาร

1. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
2. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นอันเป็นประโยชน์ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
3. มีสิทธิได้รับความช่วยเหลือในทางการศึกษาคณิตศาสตร์ หรือความช่วยเหลือในประการอื่นใด เท่าที่คณะกรรมการบริหารสมาคมฯ จะจัดทำได้

ค่าสมัครสมาชิก ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท

ค่าสมาชิกสามัญ		ค่าสมาชิกวารสาร	วาระการเป็นสมาชิก (สามัญรายปี และวารสาร) เริ่มในวันที่ 1 พฤษภาคม ของทุกปี และสิ้นสุดในวันที่ 30 เมษายน ของปีต่อไป
ตลอดชีพ	3,000 บาท	250 บาทต่อปี	
รายปี	250 บาท		

ดาวน์โหลด ใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

<http://www.mathassociation.net> หัวข้อ “สมัคร”

ใบสมัครสมาชิก
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

☐ สมาชิกใหม่
☐ ต่ออายุ เลขที่สมาชิกเดิม.....

วันที่ เดือน พ.ศ.

ข้าพเจ้า (ชื่อ-นามสกุล) อาชีพ

เบอร์โทรศัพท์ อีเมล

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท) ☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)
☐ สมาชิกวารสาร (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน - 30 - บาท

รวมเป็นเงิน บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์ เลขที่บัญชี 162-0-25671-1

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับจัดส่งวารสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ซอย หมู่ที่

ถนน ตำบล อำเภอ

จังหวัด รหัสไปรษณีย์

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....

รับเงินค่าสมาชิกจำนวน

วันที่

ลงนาม..... ผู้สมัคร

(.....)

ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน มาที่

(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตูป.ณ. 2022 ปณ.พ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332

หรือ (ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบ

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ วางพานพุ่มถวายราชสักการะ “พระบิดาแห่งวิทยาศาสตร์ไทย”



เมื่อวันอาทิตย์ที่ 18 สิงหาคม 2562 ที่ผ่านมา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์ นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ พร้อมด้วยกรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ เข้าร่วมพิธีวางพานพุ่มและถวายราชสักการะ พระบาทสมเด็จพระจอม

เกล้าเจ้าอยู่หัว ในฐานะทรงเป็น “พระบิดาแห่งวิทยาศาสตร์ไทย” เนื่องในวันวิทยาศาสตร์แห่งชาติ ณ บริเวณลานพระบรมราชานุสาวรีย์พระบาทสมเด็จพระจอมเกล้าเจ้าอยู่หัว กระทรวงการอุดมศึกษา วิทยาศาสตร์ วิจัย และนวัตกรรม เพื่อน้อมรำลึกถึงพระมหากรุณาธิคุณที่ทรงมีต่อวงการวิทยาศาสตร์ไทยและประเทศชาตินับอเนกประการ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ขอน้อมถวายความจงรักภักดี ด้วยสำนึกในพระมหากรุณาธิคุณเป็นล้นพ้นอันหาที่สุดมิได้

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ วางพานพุ่มถวายราชสักการะ “พระบิดาแห่งเทคโนโลยีของไทย”



เมื่อวันเสาร์ที่ 19 ตุลาคม 2562 ที่ผ่านมา อ. ดร. ฉวีวรรณ กิริติกร อุปนายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ พร้อมด้วยกรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ เข้าร่วมพิธีวางพานพุ่มและถวายราชสักการะ เพื่อเทิดพระเกียรติพระบาทสมเด็จพระบรมชนกาธิเบศร มหาภูมิพลอดุลยเดชมหาราช บรมนาถบพิตร ในฐานะทรงเป็น “พระบิดาแห่งเทคโนโลยีของไทย” เนื่องใน “วันเทคโนโลยีของไทย” ประจำปี 2562 ณ บริเวณลานพระบรมราชานุสาวรีย์พระบาทสมเด็จพระจอมเกล้าเจ้าอยู่หัว กระทรวงการอุดมศึกษา วิทยาศาสตร์ วิจัย และนวัตกรรม สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ น้อมสำนึกในพระมหากรุณาธิคุณที่ทรงมีต่องานด้านเทคโนโลยีของไทยเป็นล้นพ้นอันหาที่สุดมิได้

การประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ปี 2562

กิจกรรมหนึ่งที่เป็นการสนับสนุนการศึกษาและพัฒนาด้านคณิตศาสตร์ ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ คือ การจัดประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี โดยมีหลักการว่าต้องเป็นโครงงานใหม่ที่มีความน่าสนใจ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มีประโยชน์ และเน้นถึงความถูกต้องของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ โดยโรงเรียนจะคัดเลือกโครงงานเข้าประกวด ระดับละ 1 โครงงาน (ทุกโครงงานต้องมีนักเรียนร่วมกันจัดทำ 3 ถึง 4 คน) มีการตัดสินสองรอบ หากผ่านเข้าประกวดรอบสอง นักเรียนต้องนำโครงงานมาจัดแสดงและเสนอผลงาน ทั้งในรูปแบบโปสเตอร์และปากเปล่า ในช่วงงานสัปดาห์วันวิทยาศาสตร์แห่งชาติ

ในปี 2562 นี้ มีโครงงานส่งเข้าประกวด คือ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น จำนวน 26 โครงงาน และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 32 โครงงาน สำหรับการประกวดรอบสุดท้าย จัดขึ้นในวันอาทิตย์ที่ 18 สิงหาคม 2562 ณ อิมแพค เมืองทองธานี ฮอลล์ 11



ผู้รับรางวัล ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ถ่ายภาพร่วมกับคณะกรรมการฯ



ผู้รับรางวัล ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ถ่ายภาพร่วมกับคณะกรรมการฯ

ผลการประกวดโครงการคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ปี 2562

รางวัลที่ 1 ได้รับโล่ พร้อมบัตรประกาศเกียรติคุณ และเงินรางวัล 10,000 บาท

ชื่อโครงการ การศึกษาลำดับพีโนนกซ์ของตาสับปรดกับ

ค่าความหวานเพื่อการพยากรณ์เอทานอล

โรงเรียน สตรีพัทลุง จ.สตูล

เด็กหญิง ภาวิดา ดวงขวัญ

เด็กหญิง ศุภิสรา หนูในน้ำ

เด็กหญิง อัสมา ไชยชนะ



รางวัลที่ 2 ได้รับโล่ พร้อมบัตรประกาศเกียรติคุณ และเงินรางวัล 8,000 บาท

ชื่อโครงการ Hometown Tessellation Stickers

โรงเรียน สรชลวงพิทยาคม จ.พิจิตร

เด็กชาย ศิวกร เศษบุบผา

เด็กหญิง มณิสร อิ่มสมโภชน์

เด็กหญิง พกาวรรณ พลายกุ่มพล

เด็กหญิง ธมลวรรณ ปาคำวัง



รางวัลที่ 3 ได้รับโล่ พร้อมบัตรประกาศเกียรติคุณ และเงินรางวัล 6,000 บาท

ชื่อโครงการ ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน

โรงเรียน ภูเก็ตวิทยาลัย จ.ภูเก็ต

เด็กหญิง ปรัชญา สิทธิกุล

เด็กหญิง ณิชา โสภานนท์

เด็กชาย ภูริศ หลิมพัฒน์วงศ์



ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ปี 2562 (ต่อ)

รางวัลชมเชย ได้รับโล่ พร้อมบัตรประกาศเกียรติคุณ และเงินรางวัล 4,000 บาท มีสองรางวัล

- (1) **ชื่อโครงงาน** ความสัมพันธ์ของระยะทางจากจุดมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากไปยังจุดปลายของส่วนของเส้นตรงใด ๆ ที่ขนานกับด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

โรงเรียน ห้องสอนศึกษาในพระอุปถัมภ์ จ.แม่ฮ่องสอน

เด็กหญิง ศิริวรรณ ชุมชัย

เด็กหญิง ยุพา นาศิริ

เด็กหญิง เข้มจิรา ธนกรสกุล



- (2) **ชื่อโครงงาน** การหารูปแบบคำตอบทั่วไปโดยอาศัยการแยกตัวประกอบในรูปกำลังสมบูรณ์

โรงเรียน ตะกั่วป่า “เสนานุกูล” จ.พังงา

เด็กหญิง กรรณิการ์ คงชู

เด็กหญิง ภัททิรา แปโค

เด็กหญิง พีรดา ศรีทรัพย์

เด็กหญิง อภิขญา สุขนุช



ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ปี 2562

รางวัลที่ 1 ได้รับโล่ พร้อมบัตรประกาศเกียรติคุณ และเงินรางวัล 10,000 บาท

ชื่อโครงงาน ศึกษาอัตราส่วนของพื้นที่ผิวบรรจุภัณฑ์กรวย

ยอดตัดใหม่ต่อบรรจุภัณฑ์กรวยยอดตัดเดิม

เมื่อเปลี่ยนแปลงมุมที่เส้นสูงเอียง และหามุมที่

เส้นสูงเอียงที่เหมาะสมสำหรับการสร้างบรรจุภัณฑ์

โรงเรียน ชานุวิทยา จ.กำแพงเพชร

นาย สหรัตน์ เหมือนแสง

นางสาว กฤตพร ขุนแขวง

นางสาว ชลธิชา เล็กวงศ์

นางสาว นกัศวรณ ชอบธรรม



รางวัลที่ 2 ได้รับโล่ พร้อมบัตรประกาศเกียรติคุณ และเงินรางวัล 8,000 บาท

ชื่อโครงการ การระบายสีจุดยอดของกราฟเคย์เลย์ผลบวก

โรงเรียน เซนต์คาเบรียล กรุงเทพฯ

นาย กฤติน วามานนท์

นาย ต้นกล้า วิบูลย์เลิศวัฒนะ

นาย เมธาวิณ พูลเพิ่ม



รางวัลที่ 3 ได้รับโล่ พร้อมบัตรประกาศเกียรติคุณ และเงินรางวัล 6,000 บาท มีสองรางวัล

(1) ชื่อโครงการ เกลียววงกันหอย และเกลียวเหลี่ยม

กันหอยที่เกิดจากวัวพันหลัก หรือมุมด้ายเส้นหนึ่งรอบ

หลอดด้าย

โรงเรียน นครสวรรค์ จ.นครสวรรค์

นาย สุกฤษฎ์ รุกขชาติ

นางสาว ญณินชญา อุ่นจิตต์วรรณะ

นางสาว โสภณัฐ จิตรเอก



(2) ชื่อโครงการ การศึกษาพฤติกรรมและสมบัติของจุดเซนทรอยด์ที่ได้จากการแบ่งด้านแบบภายใน
ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

โรงเรียน ภูเก็ตวิทยาลัย จ.ภูเก็ต

นางสาว บุญสิตา ศรีชัย

นางสาว อัมรินทร์ หิมะ

นางสาว ธรณญญสรณ์ วศิณสุกุล



ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ปี 2562 (ต่อ)

รางวัลชมเชย ได้รับโล่ พร้อมบัตรประกาศเกียรติคุณ และเงินรางวัล 4,000 บาท มีสองรางวัล

- (1) **ชื่อโครงงาน** หุ่นยนต์ว่าดลวดลายจากความสัมพันธ์ของสมการเส้นโค้งไฮเพอร์บอยด์ และ
สมการเส้นโค้งเอพิโทรคอยด์

โรงเรียน วิทยาศาสตร์จุฬารามราชวิทยาลัย มุกดาหาร

จ.มุกดาหาร

นางสาว พรชิตา ศรีโณม

นางสาว พรชนก พนมสินรัตน์

นางสาว พิมพ์บุญ บุญศรี



- (2) **ชื่อโครงงาน** ถอดรหัสลำดับฟีโบนัชชี กับการถ่วงเข้าสู่อัตราส่วนทองคำ และอัตราส่วนอื่น ๆ ที่
สัมพันธ์กับลำดับเรขาคณิต และเอ็กซ์โพเนนเชียลของการสั่นแบบ Under Damped

โรงเรียน แก่น้อยศึกษา จ.เชียงใหม่

นางสาว ลักคณา แซ่หลี่

นางสาว อาฟู แซ่หลิว

นางสาว พรนภัส แซ่จื้อ



ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ในงาน

World Innovation Competition and Exhibition 2019 (WICE 2019)

ณ ประเทศมาเลเซีย

ตามที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ให้การสนับสนุนการจัดการประชุมวิชาการสำหรับ นักศึกษาระดับปริญญาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ (Undergraduate in Applied Mathematics Conference : UAMC) เป็นประจำทุกปี โดยในปี พ.ศ. 2562 UAMC 2019 จัดขึ้นที่ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อวันที่ 27 เมษายน 2562 และมีโครงงานเข้าร่วมนำเสนอแบบบรรยาย จำนวน 56 ผลงาน โครงงานที่นำเสนอแบบโปสเตอร์ จำนวน 63 ผลงาน จาก 11 สถาบันการศึกษา ซึ่งมีผู้เข้าร่วมงานทั้งสิ้น 406 คน

ในการนี้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ให้การสนับสนุนเพิ่มแก่ โครงงานดัดชนีวัดความเหมาะสมต่อการเพาะปลูกและการพยากรณ์ผลผลิตทุเรียนในประเทศไทยโดยใช้เทคนิคเหมืองข้อมูล และ GIS จากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ โดยคณะผู้วิจัย ประกอบด้วย นางสาว ศุจินธร หงษ์หิน นางสาว ชนาภาณู ปรียะพานิช นางสาว สันท์สิริ ภูมิรา และมี



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ เกษามูล และ รองศาสตราจารย์ ดร.สุเพชร จิระขจรกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา เป็นตัวแทนประเทศไทยเข้าร่วมการประกวดโครงการคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ ในการประชุมวิชาการ World Innovation Competition and Exhibition (WICE 2019) ในระหว่างวันที่ 2 - 6 ตุลาคม 2562 ณ เมืองสุบังจาया ประเทศมาเลเซีย

ในการประกวดโครงงานในการประชุมวิชาการ WICE 2019 นั้น โครงงานดัดชนีวัดความเหมาะสมต่อการเพาะปลูกและการพยากรณ์ผลผลิตทุเรียนใน

ประเทศไทยโดยใช้เทคนิคเหมืองข้อมูล และ GIS เป็นโครงงานในกลุ่มสาขา Environmental & Biology ซึ่งมีโครงงานเข้าร่วมการประกวดในกลุ่มนี้จำนวนทั้งสิ้น 33 โครงงาน ผลการตัดสินโครงงาน ดัชนีวัดความเหมาะสมต่อการเพาะปลูกและการพยากรณ์ผลผลิตทุเรียนในประเทศไทยโดยใช้เทคนิคเหมืองข้อมูล และ GIS ได้รับรางวัลเหรียญเงิน และรางวัลพิเศษ SEGi Special Mention Award นับเป็นการสร้างชื่อเสียงด้านคณิตศาสตร์ให้กับประเทศไทย และเป็นการกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการในวงการคณิตศาสตร์ของประเทศไทย อีกด้วย





น้ำพระทัยสมเด็จพระเจ้าฟ้าสุโณลิ้มปิภิชาการ



เมื่อวันศุกร์ที่ 25 ตุลาคม 2562 สมเด็จพระกนิษฐาธิราชเจ้า กรมสมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี เสด็จพระราชดำเนินทรงเปิดงาน 3 ทศวรรษ น้ำพระทัยสมเด็จพระเจ้าฟ้าสุโณลิ้มปิภิชาการ ณ ศูนย์นิทรรศการและการประชุมไบเทค บางนา กรุงเทพฯ ซึ่งจัดโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.) และสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (สพฐ.) ในระหว่างวันที่ 25 - 26 ตุลาคม 2562 เพื่อเทิดพระเกียรติและน้อมรำลึกถึงพระเมตตาและ



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF THAILAND
UNDER THE PATRONAGE OF HIS MAJESTY THE KING



ก้าวสู่การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ หรือ International Mathematical Olympiad (IMO)

จัดขึ้นครั้งแรกเมื่อ พ.ศ.2502 โดยประเทศสาธารณรัฐสังคมนิยมโรมาเนีย

เป็นกีฬาพหุวิทยาการในแถบยุโรปตะวันออก ได้แก่ บัลแกเรีย เชโกสโลวาเกีย เยอรมนีตะวันออก

อิตาลี โปแลนด์ และรัสเซีย ให้ส่งเยาวชนเข้าร่วมการแข่งขัน เพื่อแสวงหาและสนับสนุนเยาวชนที่มีอัจฉริยะทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนเสริมสร้างความสัมพันธ์อันดีระหว่างผู้เข้าร่วมแข่งขันจากนานาประเทศ

ตามระเบียบของการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ กำหนดให้ประเทศที่ยังไม่เคยเข้าร่วมการแข่งขันจะต้องส่งผู้แทนเข้าร่วมสังเกตการณ์ก่อน ในปี พ.ศ.2531 นางอัมพวัน กังสดาล จากศูนย์วิจัยกัมพูชาเพื่อการศึกษา เป็นผู้แทนเข้าร่วมสังเกตการณ์การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งที่ 29 ณ ประเทศออสเตรเลีย ปีต่อมาประเทศไทยจึงได้รับเชิญให้ส่งผู้แทนประเทศไทย จำนวน 6 คน เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศอย่างเป็นทางการ คณะกรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ได้รับแจ้งจาก ศาสตราจารย์ ม.ร.ว.พริ้งพวงศรีสุภิก สนิทวงศ์ นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย และ รองศาสตราจารย์ ดร.กำจัด มงคลกุล นายกสมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ในขณะนั้นว่าในปี พ.ศ.2532 ประเทศไทยจะส่งนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 6 คน เป็นผู้แทนประเทศไทยเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งที่ 30 ณ ประเทศสหพันธ์สาธารณรัฐเยอรมนี (เยอรมนีตะวันตก) พร้อมทั้งมอบเอกสารสำเนาข้อสอบ IMO ปี พ.ศ.2502 ถึง พ.ศ.2528 ไว้ให้ศึกษาเนื้อหาเพื่อเตรียมความพร้อมในด้านวิชาการ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ได้เชิญ ดร.ยติ กฤษณันกูร และรองศาสตราจารย์กิตดา บุญโต จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นหัวหน้าทีมและรองหัวหน้าทีมตามลำดับ



ในครั้งแรก การส่งผู้แทนไปร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ทำการคัดเลือกจากนักเรียนที่สอบได้ลำดับต้นๆ จากการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ นักเรียนโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสว.) และนักเรียนโครงการค่ายช้างเผือกเครือซิเมนต์ไทย มาเข้าค่ายอบรมขึ้น โดยวิทยาการการอบรมมาจากมหาวิทยาลัยต่าง ๆ ซึ่งส่วนหนึ่งเป็นกรรมการบริหารของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ เมื่อสิ้นสุดการอบรมแต่ละครั้งจะมีการสอบคัดเลือกนักเรียน เพื่อเข้าค่ายอบรมรอบต่อไป จนกว่าจะได้ผู้แทนประเทศไทย จำนวน 6 คน ไปร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

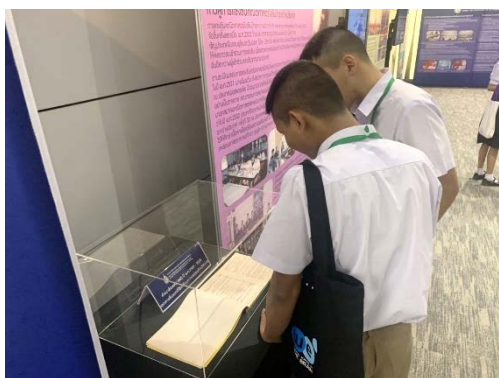


เหนือสิ่งอื่นใดในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ในครั้งแรกนั้น สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ ได้ทรงพระราชทานพระราชมหัยส่วนพระองค์สนับสนุนการดำเนินการดังกล่าว ในเวลาต่อมาทรงรับเป็นองค์อุปถัมภ์โครงการจัดส่งเยาวชนไทยไปแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา นับเป็นพระมหากรุณาธิคุณอย่างหาที่สุดมิได้

พระกรุณาใน สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ และพระมหากรุณาธิคุณของสมเด็จพระกนิษฐาธิราชเจ้า กรมสมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี ที่ทรงสนับสนุนโครงการโอลิมปิกวิชาการ และการดำเนินงานของมูลนิธิ สอวน. โดยนำเสนอผลการดำเนินงานของโครงการโอลิมปิกวิชาการ และมูลนิธิ สอวน. ในช่วงระยะเวลาที่ผ่านมา

รวมทั้งแนวทางการดำเนินงานในอนาคต ภายในงานยังมีกิจกรรมอีกมากมาย อาทิ การสาธิตการเรียนการสอนภายในค่ายโอลิมปิกวิชาการ การบรรยายเส้นทางสู่โอลิมปิกวิชาการ การแข่งขันตอบปัญหาทางวิชาการ

ในการนี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้รับเชิญให้เข้าร่วมจัดนิทรรศการภายใต้หัวข้อ “ก้าวสู่การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ” ซึ่งประกอบด้วย ประวัติความเป็นมาของการเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ (International Mathematical Olympiad : IMO) ของประเทศไทยครั้งแรก เมื่อปี พ.ศ. 2532 การร่วมเป็นเจ้าภาพ IMO 2015 ณ จ.เชียงใหม่ ผลการแข่งขัน IMO จากอดีตถึงปัจจุบัน ข้อสอบการแข่งขัน IMO ครั้งแรกของประเทศไทย และทำผู้แทนสำคัญของประเทศไทยใน IMO พร้อมทั้งได้นำเสนอประวัติและกิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จากอดีตสู่ปัจจุบัน ทั้งนี้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ยังได้นำหนังสือรวมข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ และวารสารคณิตศาสตร์ไปแจกจ่ายแก่ผู้สนใจภายในงานด้วย



กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2562
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมเพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารและหนังสือวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่ม 1) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
 - Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
2. จัดอบรมครูคณิตศาสตร์ภาคฤดูร้อน ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา ระหว่างวันที่ 25 - 27 เมษายน 2562 ณ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. จัดสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา วันอาทิตย์ที่ 24 พฤศจิกายน 2562
4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี (AMM) ครั้งที่ 24 ประจำปี พ.ศ. 2562 ระหว่างวันที่ 15 - 17 พฤษภาคม 2562 โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ซึ่งมีภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา เป็นเจ้าภาพ
5. จัดส่งผู้แทนประเทศไทยเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
6. ให้การสนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับอุดมศึกษา
The 8th Undergraduate in Applied Mathematics Conference (UAMC)
ซึ่งมี ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เป็นเจ้าภาพ โดยจัดขึ้นในวันที่ 27 เมษายน 2562
 - ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
โรงเรียนส่งผลงาน ภายในวันจันทร์ที่ 10 มิถุนายน 2562
ตัดสินผลรอบสุดท้ายวันอาทิตย์ที่ 18 สิงหาคม 2562
 - บรรยายสัณจรเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย ในเขตพื้นที่จังหวัดเชียงราย ระหว่างวันที่ 13 - 14 กรกฎาคม 2562

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาชิรธนิศ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทรศัพท์ และโทรสาร 0 - 2252 - 7980



สี Cyber

HEX #FFD300

RGB 252 210 0

Mathematical Journal

Volume 64 Number 699 September – December 2019

สีปก